Trabajo práctico N°1: MATRICES

Nota: Los ejercicios señalados con un asterisco, se encuentran resueltos en la bibliografía indicada.

Ejercicio 1: Determine la matriz e identifique, si es posible, según sus características.

a) La matriz $A_{4x3} = [a_{ij}]$, donde $\begin{cases} a_{ij} = 2 \text{ para todo } i = j\,. \\ a_{ij} = 0\; para\; todo\; i\; \neq j. \end{cases}$

b) La matriz $A_{3x3} = [a_{ij}]$, donde $\begin{cases} a_{ij} = \;-3\; si\; i \leq j \\ a_{ij} = 0\; si\; i > j \end{cases}$

c) La matriz $A_{3x3} = [a_{ij}]$, donde $\begin{cases} a_{ij} = \; i + j \;\; si\; |i-j| \;\geq 1 \\ a_{ij} = i - j\; si\;\; |i-j| \;< 1 \end{cases}$

Ejercicio 2: Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad F = [2]$$

Realice las operaciones propuestas siempre que sea posible, en caso de no serlo, justifique.

a) B+D	d) (B-D). C	g) F.E	j) -3. (A - I_{2x2})
b) A- C	e) E^T. A	h) A^2	k) -1(B.C) + A
c) (-1A). D	f) E.F	i) C^3	l) $[(D+B)^T .A]$-C

Verifique d) y e) realizando el cálculo en https://matrixcalc.org/es/ u otro calculador o bien usando la app Mathway para celulares.

***Ejercicio 3:** Considere las matrices:[1]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que $AB = AC$.
b) Analice si es correcto cancelar la matriz A en ambos miembros de la igualdad anterior. Justifique.
c) Determine el producto AD y elabore una conclusión en función del resultado.

Ejercicio 4: Interprete geométricamente las siguientes operaciones (En la solución, tenga en cuenta que $\lambda \in \mathcal{R}$, $\lambda > 1$, $0 < \lambda < 1$ y $\lambda < 0$)

---

[1] **Referencia de consulta:** Anton, H. (2008). *Introducción al álgebra lineal* (4th ed., pp. Sección 1.4: Inversas; Reglas de la Aritmética de matrices.). México: Limusa.

a) $\lambda v,\ v=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ b) $Av=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ c) $Av=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

d) $X^T A\,\mathrm{X}=1,\ \text{siendo } \mathrm{X}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\ \text{ y }\ \mathrm{A}=\mathrm{I}\ \text{ de } 2\mathrm{x}2$

Ejercicio 5: Determine cuál de las siguientes matrices, son elementales e indique la operación elemental que se realizó:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$$

***Ejercicio 6:** A continuación se muestran cuatro matrices elementales. Indique las operaciones con que se obtuvieron[2].

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ejercicio 7:

a) Determine qué matrices están en forma escalonada por filas, en forma escalonada reducida o ninguna de ellas:

a) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$

b) Indique el rango de las matrices anteriores e indique cuáles de ellas son invertibles.

Verifique el rango de las matrices anteriores en https://matrixcalc.org/es/ u otro calculador o en la app Mathway para celulares.

Ejercicio 8: Dada A una matriz de 3x3 genérica, evalúe y analice que sucede con esta matriz cuando es pre multiplicada y post multiplicada por la matriz elemental E.

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

[2] **Referencia de consulta:** Anton, H. (2008). *Introducción al álgebra lineal* (4th ed., pp. Sección 1.5: Matrices elementales y un método para determinar A-1.). México: Limusa.

Ejercicio 9: Para los siguientes ítems:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Encuentre la matriz elemental E tal que EA= B. Verifique si la E propuesta es la correcta, realizando el producto con las herramientas digitales propuestas anteriormente.

***Ejercicio 10:** Considere la matriz[3] $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ y la matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine el producto *EA* y describa qué le sucede a la matriz *A*.

Ejercicio 11: Calcule, de ser posible, las inversas de las siguientes matrices:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

Verifique los cálculos realizados para las matrices C y D con las herramientas digitales propuestas.

Ejercicio 12: Aplicando propiedades, resuelva:

a) Si se conoce $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, calcule:

a.1) $(3.\,A)^{-1}$ a.2) $(A^2)^{-1}$ a.3) $(A^T)^{-1}$

b) Si la transpuesta de 2B es $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, calcule la inversa de B

c) Utilizando las matrices A y B de los incisos anteriores resuelva:

c.1) $(A.B)^{-1}$ c.2) $(A^T + B^T)^T$

***Ejercicio 13:** Considere las matrices[4] $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

[3] **Referencia de consulta:** Anton, H. (2008). *Introducción al álgebra lineal* (4th ed., pp. Sección 1.5: Matrices elementales y un método para determinar A^{-1}.). México: Limusa.

[4] **Referencia de consulta:** Anton, H. (2008). *Introducción al álgebra lineal* (4th ed., pp. Sección 1.4: Inversas; Reglas de la Aritmética de matrices..). México: Limusa.

a) Determine, de ser posible, A^{-1}, B^{-1} y $(AB)^{-1}$

b) Compruebe, de ser posible, que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Ejercicio 14: Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales, de ser posible, para obtener la expresión de la matriz X. Aplique propiedades. Todas las matrices son cuadradas, del mismo orden e invertibles.

a) $[2.(A.B.X)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}[(A+B)]$

b) $(A^{-1}X)^{-1}.B = A^2.(B^{-1}.A)^{-1}$

c) $[C.(A+X).B] = 2.C.(A.B)$

d) $A^3.B^{-1}.X.(C^{-1}+D) = A^2.[C^{-2}+(C.D^{-1})^{-1}].C$

Ejercicio 15: Dados los siguientes enunciados, demuestre cuando sean verdaderas y proponga un contraejemplo cuando sean falsas.

a) Si A y B son matrices diagonales de orden nxn entonces A.B=B.A.

b) Si A es simétrica entonces A^T es simétrica.

c) Si A y B son matrices cuadradas de orden 2 y A.B= **0,** entonces A o B es la matriz nula.

d) El producto de dos matrices elementales es siempre una matriz elemental.

e) La inversa de una matriz simétrica es también simétrica.

f) Si A y B son matrices nxn no singulares, A+B es no singular.

g) Para cualquier matriz cuadrada A, $A.A^T$ y $A^T.A$ son matrices simétricas.

Ejercicios de aplicación

Ejercicio 16:

Matrices asociadas a grafos moleculares (Rozas, 2011)

Se puede utilizar como instrumento algebraico la matriz de adyacencia de un grafo, que indica qué pares de nodos están unidos por aristas; si la molécula consta de *N* átomos, la matriz de adyacencia del grafo molecular *G*, $A = A(G)$ es una matriz *N* x *N* simétrica cuyas componentes son

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si los átomos } i \text{ y } j \text{ están ligados,} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

A continuación, la figura 1 muestra la molécula de 2-bromopropanol y su grafo molecular.

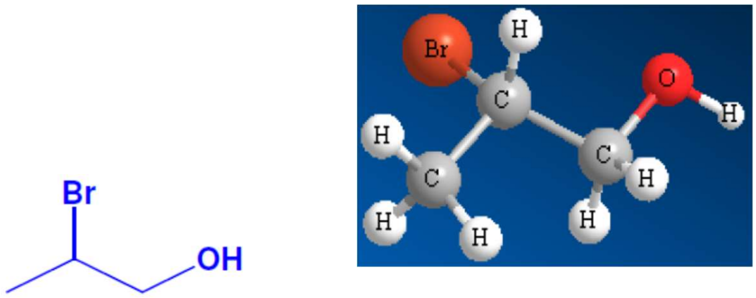
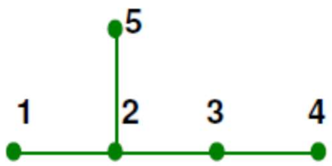


Figura 1: Molécula 2- bromopropanol y su grafo molecular

La representación del grafo matemático puede ser



a) La matriz de adyacencia $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ es:
Si, como ocurre, por ejemplo con el 2- bromopropanol, la molécula sólo tiene enlaces simples, entonces la suma de todos los elementos de la fila i de A, $\sum_{j=1}^{N} A_{ij}$ así como la suma de todos los elementos de la columna i, $\sum_{j=1}^{N} A_{ji}$, dan indistintamente el número total de ejes que confluyen en el átomo i.

b) La matriz de distancia $D = (D_{ij})$, es una matriz N x N simétrica cuyas componentes son las distancias topológicas. Se define:

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{longitud mínima de los caminos que unen } i \text{ y } j, \text{ si } i \neq j, \\ 0, \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Luego, D es ……………………………

Ejercicio 17 (resuelto): Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

a) Represente la información en dos matrices

b) Halle una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Solución:

a) Matriz de producción (Filas: Modelos A y B. Columnas: Terminaciones N, L, S)

$$P = \begin{bmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{bmatrix}$$

Matriz de costo en horas (Filas: Terminaciones N, L, S. Columnas- costo en horas: T y A)

$$C = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1,2 \\ 33 & 1,3 \end{bmatrix}$$

b) Matriz que expresa las horas de taller y de administración para cada uno de los modelos:

$$P.\,C = \begin{bmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1,2 \\ 33 & 1,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{bmatrix}$$

El modelo A empleará 17650 horas de taller y 705 horas de administración. Mientras que el modelo B empleará 11490 horas de taller y 459 horas de administración.

Ejercicio 2: Se analizará el gasto mensual que producen tres familias en base a los siguientes datos:

Consumo promedio mensual de alimentos por familia:

Familia A: pan 1 kg, carne 2 kg, leche 1 kg.

Familia B: pan 2 kg, carne 3 kg, leche 1 kg.

Familia C: pan 2 kg, carne 3 kg, leche 2 kg.

Costo por kg de alimento del mes 1: Pan \$5, Carne \$30, Leche \$20.

a) Plantee la operación matricial que nos permitirá obtener el gasto mensual total que produce cada familia en el mes 1. Considere en la operación matricial a las familias como filas y a Pan, Carne y leche como Columnas.
b) Si tenemos una cuarta familia D que consume: Pan 1 kg, carne 1 kg, leche 1 kg y el costo por kg del mes 2 es: Pan \$7, Carne \$40, Leche \$30, amplíe el sistema matricial planteado para obtener el gasto total mensual que produce cada familia en el mes 1 y 2.

Solución:

a)
$$\begin{array}{c} \text{Familia} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{P} & \text{C} & \text{L} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{CostoxKg} \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Mes1} \\ \begin{bmatrix} 85 \\ 120 \\ 140 \end{bmatrix} \end{array}$$

El gasto mensual total que produce cada familia en el mes 1 es: \$85 para la familia 1, \$120 para la familia 2 y \$140 para la familia 3.

b)
$$\begin{array}{c} Familia \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & C & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} Costo\ x\ Kg \\ \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 30 & 40 \\ 20 & 30 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Mes\ 1 & Mes\ 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 85 & 117 \\ 120 & 164 \\ 140 & 90 \\ 55 & 77 \end{bmatrix} \end{array}$$

El gasto mensual total que produce cada familia 4 en el mes 1 es: \$55.

El gasto mensual total que produce cada familia en el mes 2 es: \$117 para la familia 1, \$164 para la familia 2, \$90 para la familia 3 y \$77 para la familia 4.