Trabajo Práctico N°2: DETERMINANTES

Ejercicio 1: Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuántos productos elementales tiene?

b) Escriba dos de sus productos elementes, indicando el número de inversiones y su signo.

Ejercicio 2: De las siguientes expresiones con determinantes de orden 2, señale las que son correctas y enuncie las propiedades que se utilizan.

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -12 & 30 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 10 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 20.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

Ejercicio 3: Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$$

Use propiedades para conocer, en el caso de ser posible, el valor de los siguientes determinantes. Justifique su respuesta.

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} =$

e) $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} \\ a_{21}+a_{12} & a_{22}+a_{22} & a_{23}+a_{32} \\ a_{31}+a_{13} & a_{32}+a_{23} & a_{33}+a_{33} \end{vmatrix} =$

f) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$

Ejercicio 4: Sabiendo que las siguientes proposiciones son verdaderas, argumente o demuestre, justificando cada paso:

a) Si k es un número real y A una matriz de orden n, entonces det (k.A) = k^n. det(A)

b) Si A y B son matrices de orden n, P una matriz del mismo orden e inversible y B = P^{-1} AP, entonces det(A) = det (B)

c) Si A es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) de orden n, entonces det(A) = ±1

d) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

*e) Si una matriz cuadrada tiene una fila (o columna) de ceros, su determinante es cero[1].

Ejercicio 5: Determine el valor de los siguientes determinantes aplicando propiedades. Justifique.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 7 \\ 7 & 28 & -21 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

Ejercicio 6: Sabiendo que A y B son matrices de 2x2 y que $|A| = -3$, $|B| = 2$ encuentre, si es posible, el resultado de los siguientes determinantes:

a) $|-2A| =$

d) $|(B^{-1})^2| =$

g) $\left| \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} . \left(4B^{-1}\right) \right| =$

b) $|B^4| =$

e) $|B - \frac{1}{2}B| =$

h) $\left| \left(\frac{1}{2}AB\right)^{-1} \right| =$

[1]**Referencia de consulta**: Anton. *Introducción al Álgebra Lineal*. 4ª Edición. Teorema 2.2.1 de la Sección 2.2: Evaluación de determinantes por reducción de renglones.

c) $|A^t.B| =$ f) $|\frac{1}{4}B - 2A| =$

Ejercicio 7: Calcule el/los valores de λ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 8: Sean A y B matrices genéricas de orden n. Resuelva los determinantes y complete:

a) $\det(A - 3A) =$

b) $\det((2B^t)^{-1}) =$

c) $\det(5I) =$

d) $\det(2A + 4B) =$

Ejercicio 9: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

a) Encuentre los menores y cofactores correspondientes al elemento a_{23} y al elemento -2.

b) Evalúe el determinante de A mediante cofactores y verifique calculando por Sarrus.

Ejercicio 10: Halle el determinante de la siguiente matriz utilizando la regla de Chío.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11: Considere la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ -8 & 4-k & 0 \\ 8 & 1 & 9-k \end{bmatrix}$$

a) Halle,de ser posible, los valores de k para los que M admite inversa.

b) Calcule, si es posible, M^{-1} utilizando determinantes para k = 2.

Ejercicio 12: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Si es verdadero, demuestre y en caso de ser falso proponga un contraejemplo.

a) Sean A y B matrices de orden n, si A es singular entonces el producto $A.B$ es una matriz singular.

b) Si A_{2x2} y B_{2x2}, entonces $det(A + B) = det\,(A) + det\,(B)$.

c) Si A es una matriz de orden n, entonces $det(Adj\,A) = [det\,(A)]^{n-1}$.

d) Si el determinante de una matriz es cero, entonces tiene una fila (o columna) de ceros.

e) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces |A. B| = |B. A|.

f) El determinante del producto de una matriz de 2x1 por una de 1x2 es siempre cero.

g) Si una matriz es simétrica, se verifica que $det(A) = 0$.

h) Si A es una matriz antisimétrica de orden n, entonces $det(A) = 0$.