Trabajo Práctico N° 5: <u>ESPACIOS VECTORIALES</u>

<u>Ejercicio 1</u>:

Determine si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas en cada caso son o no espacios vectoriales. Para aquellos que no lo sean, indique al menos uno de los axiomas que no se cumple:

a) $V = \{(x, y, z) \in R^3\}$ con las operaciones usuales en R^3: suma y producto por un escalar real.
b) $V = R^3$, con la suma definida por $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ y el producto de un escalar por un vector está definido por $k(x, y, z) = (x, ky, kz)$.
c) $V = \{(x, y) \in R^2 \;/\; x \geq 0, y \geq 0\}$ con las operaciones usuales en R^2: suma y producto por un escalar real.
d) El conjunto de las matrices simétricas de orden 2, con las operaciones usuales entre matrices: suma y producto por un escalar real.

<u>Ejercicio 2</u>:

Sabiendo que V es un espacio vectorial real con las operaciones usuales, y cada uno de los elementos mostrados son vectores de ese espacio vectorial o números reales, complete la demostración de la siguiente propiedad utilizando axiomas o propiedades de espacios vectoriales.

Propiedad: *Si* V *es un espacio vectorial real, entonces para todo* $\lambda \in$ R, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Demostración: Sea $\lambda \in$ R.

	Justificación
$\lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0})$	
$\lambda\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0}$	
$\lambda\mathbf{0} + (-\lambda\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0} + (-\lambda\mathbf{0})$	
$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} + [\lambda\mathbf{0} + (-\lambda\mathbf{0})]$	
$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} + \mathbf{0}$	
$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$	

<u>Ejercicio 3</u>:

Sabiendo que V es un espacio vectorial real, y cada uno de los elementos mostrados son vectores de ese espacio vectorial o números reales, demuestre que:

a) $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
b) $-\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u}$

Ejercicio 4:

Dado el subconjunto $S = \{(x, y) \in R^2 / x = -y\}$ de R^2.

a) Represente S en un sistema de coordenadas.
b) Verifique con ejemplos en forma geométrica que es un subespacio.
c) Demuestre, utilizando la condición necesaria y suficiente para subespacios, que S es un subespacio de R^2.

Ejercicio 5:

Construya una figura geométrica para ilustrar por qué una recta que no pasa por el origen como subconjunto de R^2 no es cerrada bajo la suma de vectores.

Ejercicio 6:

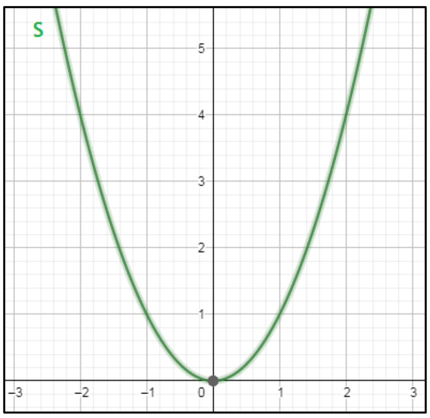
Sea V el espacio vectorial real indicado en cada caso con las operaciones usuales y sea S un subconjunto del mismo. Justifique, utilizando la condición necesaria y suficiente, si S es un subespacio vectorial de V.

a) $V = R^3$ y $S = \{(x, y, z) \in R^3 : y = 1\}$
b) $V = R^3$ y $S = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y, z) = t(-1, 0, 2), t \in R\}$
c) $V = R^3$ y $S = \left\{ \begin{bmatrix} x + y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \in R^3 \right\}$
d) $V = P_{2*}$[1] y S: es el conjunto de todos los polinomios de grado 2 (no ≤ 2, sino exactamente igual a 2).
e) $V = M_{2x2}$ y $S = \{A \in M_{2x2} / A^2 = A\}$

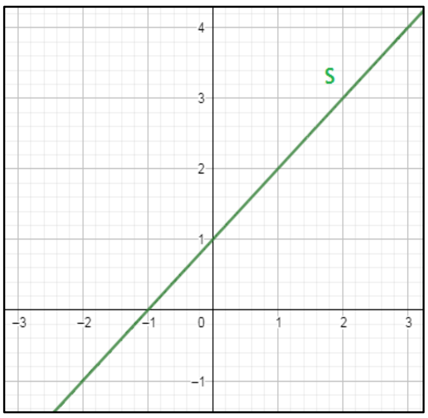
Ejercicio 7:

Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de R^2 son subespacios. Justifique.

a)

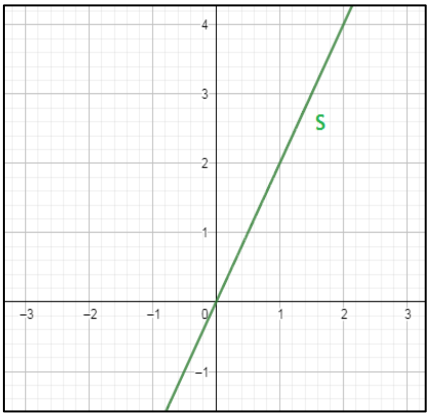


b)

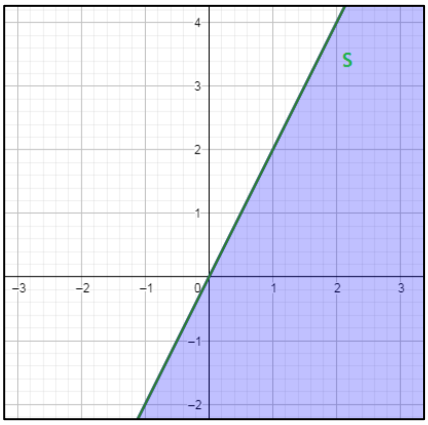


[1] P_2: Espacio Vectorial de todos los polinomios de grado ≤ 2 junto con el polinomio cero.

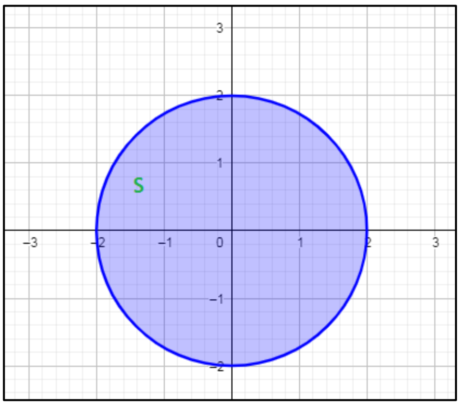
c)



d)



e)



<u>Ejercicio 8</u>:
Determine en cada caso, si el vector $\boldsymbol{u}$ pertenece al espacio generado por el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$.

f) $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1})$ $\boldsymbol{donde}$: $\boldsymbol{v_1} = (1,0,0,1)$; $\boldsymbol{v_2} = (0,1,1,0)$; $\boldsymbol{v_3} = (1,1,1,1)$
g) $\boldsymbol{u} = (0,5,-2)$ donde: $\boldsymbol{v_1} = (1,2,-1)$; $\boldsymbol{v_2} = (2,-1,0)$; $\boldsymbol{v_3} = (-1,8,-3)$
h) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ donde: $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
i) $\boldsymbol{u} = \mathrm{t}^2 + 2\mathrm{t} + 4$ donde: $\boldsymbol{v_1} = \mathrm{t} - 1$; $\boldsymbol{v_2} = \mathrm{t} + 1$; $\boldsymbol{v_3} = \mathrm{t}^2 + \mathrm{t} + 1$

<u>Ejercicio 9</u>:
Determine el espacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores. En los ítems a) y b), interprete geométricamente.

a) En R^2:
   i. {(1, 2); (0, 0)}
   ii. {(-1, 0); (1, 1); (0, 1)}

b) En R^3:
   i. {(1, 2,0); (2, 4,0); (0, 0, 1), (2, 4, 2)}
   ii. $\{(1, 2,0); (-1, 1,0); (1, 0, 1)\}$
   iii. $\{(1, -1, 1); (2, -2, 2); (3, -3, 3)\}$

c) En M_{2s2}:

i. $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

ii. $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

Ejercicio 10:

Siendo V un espacio vectorial, para cada subespacio vectorial S halle un conjunto generador.

a) S es el plano de ecuación $\boldsymbol{-x + y + 2z = 0}$ en $V = R^3$.
b) S es el conjunto de las matrices triangulares inferior de orden dos, $V = M_{2x2}$.
c) S = $\boldsymbol{\{(x, y, z) = t\,(1, 1,1),\ t \in R\}}$, $V = R^3$.
d) S = $\boldsymbol{\{(x, y, z) \in R^3\!: y = 0\}}$, $V = R^3$.
e) S = V = R^2.
f) S = $\boldsymbol{\{A \in M_{3x3}\!: A \text{ es antisimétrica}\}}$, $V = M_{3x3}$.

Ejercicio 11:

a) Dado el plano en R^3 de ecuación $\boldsymbol{x + y - 3z = 0}$, indique dos conjuntos distintos que lo generen y que tengan distinta cantidad de elementos.
b) Dado el plano en R^3 de ecuación $\boldsymbol{y = -2x - z}$, indique dos conjuntos distintos que lo generen pero que tengan la misma cantidad de elementos.

Ejercicio 12:

Determine si los conjuntos de vectores dados en cada espacio vectorial indicado son linealmente independientes o linealmente dependientes. En este último caso exprese uno de ellos como combinación lineal de los demás.

a) {(2, 0); (1, 1)} en R^2.
b) {(2, 3); (-1, -2); (1, 1)} en R^2.
c) $\{(-1, 2, 0); (-3, 0, 2): (0, 1, 1)\}$ en R^3.
d) {(1,0,1,2); (0,1,1,2); (1,1,1,3)} en R^4.
e) $\{t^2 + t + 2;\ 2t^2 + t;\ 3t^2 + 2t + 2\}$ en P_2.

Ejercicio 13:

Dado el conjunto $\{(1, 1, \mathrm{k}); (\mathrm{k}, 0, 0): (0, \mathrm{k}, 4)\}$ en R^3, determine para qué valor o valores de k el conjunto resulta linealmente independiente y para cuáles linealmente dependiente.
¿Qué interpretación geométrica puede hacer si el conjunto es linealmente independiente? ¿Y en el caso de ser linealmente dependiente?

Ejercicio 14:

Por simple inspección determine si los siguientes conjuntos son base para el espacio vectorial enunciado en cada caso.

Conjunto	Es/no es base de V
$A = \{(5,0); (7,5); (1, 1)\}$ para $V = R^2$	
$B = \{(1, 1); (1, -2)\}$ para $V = R^2$	
$C = \{(0,8, 0); (0, 0, 7); (0, -1, 0)\}$ para V: el plano yz de R^3.	
$D = \{(2, 0, 0); (0, 1, 0)\}$ para $V = R^3$	

E = $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ para V = M_{2x2}	

Ejercicio 15:

Determine una base y la dimensión del subespacio S del espacio vectorial V dado en cada caso.

a) V = R^3, S es la recta de ecuación $\frac{x}{2} = y = -z$
b) V = R^4, $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 / x = y,\ z = 2y + w\}$
c) V = M_{2x2}, S = {A ∈ M_{2x2}/A es simétrica}.
d) V = P_3, S es el subconjunto de los polinomios de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ donde $a_0 = 0$.

Ejercicio 16:

Siendo V = M_{2x2}, proponga ejemplos teniendo en cuenta las condiciones pedidas en cada caso.

a) Un subconjunto de vectores linealmente independiente pero no base de V.
b) Un subconjunto de vectores que genere a V pero no sea base de V.
c) Un subespacio de V de dimensión 1.
d) Un subespacio de V de dimensión 2.

Ejercicio 17:

Dado el vector v = (-4,7):

a) Represente al vector v en R^2 como combinación lineal de los vectores de la base canónica de R^2.
b) Represente al vector v en el mismo plano como combinación lineal de los vectores de la base B = {(1,2); (-2, 1)}.
c) Determine los vectores de coordenadas $[v]_{BC}$ y $[v]_B$.

Ejercicio 18:

Halle las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ en la base B del espacio vectorial indicado.

a) v = (1, 2), B = {(1, 1); (1, −1)} de R^2.
b) v = (1, 2, −1), B = {(1, 0, 1); (0, −1, 1), (2, 3, −5)} de R^3.

Ejercicio 19:

a) El vector de coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ de R^3 en la base B = {(0,1,-1); (1,0,0); (1,1,1)} es $[v]_B = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$. Encuentre las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ en la base canónica.
b) Sea B = {(0, 0, 1); (1, 2, 0), (0, 1, 1)} una base ordenada de R^3 y sea $\boldsymbol{u}$ = (1, 4, 2) un vector de R^3 expresado en la base B. Halle el vector de coordenadas de $\boldsymbol{u}$ en la base B′ = {(2, 2, 0); (1, 0, 1); (3, 2, 0)}.

Ejercicio 20:

Argumente la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) R^2 es subespacio de R^3.
b) El valor de k para que $u = (1, -2, k)$ de R^3 sea combinación lineal de los vectores $v = (3,0,-2)$; $w = (2,-1,-5)$ es $k = -8$.
c) El plano $\boldsymbol{xy}$ es generado por los vectores $\{(2,-1,0); (1,3,0)\}$
d) El conjunto solución del sistema homogéneo $AX = 0$, siendo $A \in Mnxn$, es un subespacio vectorial de R^n.

e) Sean ***u***, ***v***, ***w***, ***z*** vectores de un espacio vectorial *V*. Si ***u*** es combinación lineal de ***v*** y ***w***, entonces ***u*** es combinación lineal de ***v***, ***w*** y ***z***.

f) El conjunto $\{(0, 0, 0)\}$ de R^3 es un conjunto linealmente dependiente.

g) Todos los conjuntos que generan a R^2 tienen la misma cantidad de elementos.

h) Si el conjunto {***u, v, w***} genera al espacio vectorial *V*, entonces el conjunto {***u, v***} no genera a *V*.