Trabajo Práctico N°6: ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERIOR

Ejercicio 1: Para cada espacio vectorial indicado, determine cuáles de las siguientes expresiones son un producto interior.

a) $V = IR^3$, $\langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$, $u = (u_1, u_2, u_3) \in IR^3$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in IR^3$.

b) $V = IR^2$, $\langle u, v \rangle = 5u_1v_1 + 2u_2v_2$, $u = (u_1, u_2) \in IR^2$ y $v = (v_1, v_2) \in IR^2$.

c) $V = M_{2x2}$, $\langle A, B \rangle = tr(A.B)$, $A, B \in V$.

d) $V = IR^2$, $\langle u, v \rangle = u_1v_2 + 3u_2v_1$, $u = (u_1, u_2) \in IR^2$ y $v = (v_1, v_2) \in IR^2$.

Ejercicio 2: Complete la siguiente tabla considerando el producto interior definido en cada espacio vectorial indicado.

	$V = IR^2$, $\langle u, v \rangle =$ *producto* escalar, $u = (-1,3)$, $v = (2, 0)$	$V = IR^3$, $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + 4u_2v_2 + 5u_3v_3$, $u = (-2, 5, 3)$, $v = (3, 1, -2)$	$V = M_{2x2}$, $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, $u = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v = B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
$\langle u, v \rangle$			
$\| u \|$			
$\| v \|$			
$d(u,v)$			
$Áng(u,v)$			

Ejercicio 3: Sean *u* y *v* vectores cualesquiera de un espacio vectorial *V* con producto interior. Demuestre que:

a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

b) $\langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$

Ejercicio 4: Sean v y w vectores tales que $\langle v,w\rangle = -1$, $\|v\| = 3$ y w es un vector unitario. Calcule: $\langle v+2w, 3v-4w\rangle$.

Ejercicio 5: Para u, v y w vectores tales que v y w son ortogonales, $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = 1$, $\langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle = 5$, $\|v\| = \sqrt{3}$, $\|w\| = 2$ y u es un vector unitario, evalúe las siguientes expresiones.

a) $\|3u-2v\|^2 =$

b) $\langle v-2w,\ \mathrm{u}+3\mathrm{v}\rangle =$

Ejercicio 6: Sean los vectores $u = (-1,-2)$ y v= $(-3,2)$ con el producto interior de IR^2 definido por $\langle u,v\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$.

a) Escriba la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la triangular, y verifíquelas para dichos vectores.

b) Determine el valor de w_2 de modo que el vector $w = (-3, w_2)$ sea ortogonal a u.

c) Calcule el ángulo entre los vectores u y v.

d) Halle un vector unitario en la dirección de v.

Ejercicio 7: Considere el espacio vectorial IR^3 con el producto interior definido por $\langle u,v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$. Determine, de ser posible, el/los valor/es de k de modo que el conjunto $\{(2,\ k,\ -1); (0,\ k,\ 3k)\}$ resulte un conjunto de vectores ortogonales.

Ejercicio 8: Complete la siguiente tabla según corresponda. Considere en cada espacio vectorial indicado el producto interior euclidiano.

V	**Conjunto**	**Norma-lizado**	**Orto-gonal**	**Orto-normal**	**Base de *V***	**Base ortonor-mal de *V***
IR^2	$\{(1,1); (0,0)\}$					

IR^2	$\left\{ (\ldots,\ldots); \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\}$		X		X	
IR^3		X	X	X		
IR^3	$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), (0,1,0), (\ldots,\ldots,\ldots) \right\}$	X	X	X	X	X
IR^4	$\{(-1,0,0,0), (0,0,2,-1)\}$					

<u>Ejercicio 9</u>: Sea H la recta de IR^3 de ecuación cartesiana paramétrica

$$x = 2t,\ y = -5t,\ z = 4t,\ t \in IR$$

a) Determine el subespacio W de IR^3 que describe todos los vectores ortogonales a H, considerando el producto interior euclidiano en IR^3.

b) Obtenga la medida del ángulo entre W y el plano de ecuación $2x - 3y - z = 0$.

<u>Ejercicio 10</u>: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Demuestre las verdaderas y proporcione contraejemplos para las falsas.

a) Si u y v son vectores ortogonales en un espacio vectorial con producto interior, tales que $\|u\| = \|v\| = 1$, entonces $\|u - v\| = \sqrt{2}$.

b) Todo conjunto de vectores linealmente independiente de IR^n es un conjunto ortogonal.

c) Los vectores $u = (1,-3,1)$ y $v = (0,-1,-3)$ con el producto interior de IR^3 definido por $\langle u,v \rangle = 5u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ son ortogonales.

d) Si u es un vector de un espacio vectorial con producto interior V y $k \in IR$ entonces $\| k\,u \| = | k |\ \| v \|$.

e) Todo conjunto ortogonal de vectores de IR^n es una base de IR^n.

f) Sean u, v y w vectores de un espacio vectorial con producto interior V, si w es ortogonal al vector u y al vector v, entonces w es ortogonal a toda combinación lineal de u y v.

g) Si v, w ∈ V son vectores ortogonales, entonces $\| v \|^2 + \|w\|^2 = \| v + w \|^2$

<u>Ejercicio 11</u>: PROYECCIÓN ORTOGONAL

Si P es un punto en el espacio tridimensional ordinario y W es un plano que pasa por el origen, entonces el punto Q en W más próximo a P se obtiene al trazar una perpendicular de P a W. Sea $u = \overline{OP}$, el vector w_1 (Figura 1) se denomina proyección ortogonal de u sobre W y se denota $proy_W u$ y el vector w_2 ($w_2 = u - proy_W u$) se denomina componente de u ortogonal a W. Si el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es una base ortonormal de W, entonces:

$$proy_W u = <u, v_1> v_1 + <u, v_2> v_2 + \ldots <u, v_r> v_r$$

La distancia entre P y W está dada por $\| u - proy_W u \|$.

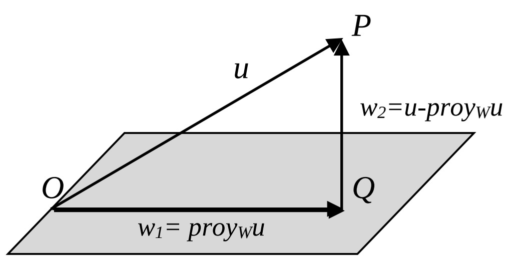

Figura 1

Sea W el plano en IR^3 de ecuación $-x + z = 0$

a) Encuentre una base ortonormal para W.
b) Determine el vector v de W más próximo al vector $u = (1, -1, 1) \in IR^3$.
c) Obtenga la distancia de u a W.

<u>Ejercicio 12 (OPCIONAL)</u>: Un producto interior asociado con el Cálculo

a) Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que la siguiente expresión $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$ define un producto interior sobre el espacio de todas las funciones continuas definidas en $[a, b]$.
b) Utilice el producto interior definido en el ítem (a) para calcular $\langle f, g \rangle$ para la función f

dada por $f(x)=cos(2\pi x)$ y para la función g dada por $g(x)=sen(2\pi x)$, con $x\in[0,1]$.

c) Calcule $\|g\|$ para $g(x)=sen(2\pi x)$, con $x\in[0,1]$.

Solución

a) Sean f, g y h funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. Sea $k\in IR$.

1. $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=\langle g,f\rangle$
2. $\langle f+g,h\rangle=\int_a^b (f(x)+g(x))\,h(x)dx=\int_a^b f(x)h(x)dx+\int_a^b g(x)h(x)dx=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$
3. $\langle k\,f,g\rangle=\int_a^b k\,f(x)g(x)dx=k\int_a^b g(x)f(x)dx=k\langle g,f\rangle$
4. $\langle f,f\rangle=\int_a^b f(x)f(x)dx=\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$ por ser $f^2(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$.

Además, por ser f continua y $f^2(x)\geq 0$ en $[a,b]$, $\int_a^b f^2(x)dx=0$ si y sólo si $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$. Por lo tanto, se tiene que $\langle f,f\rangle=0$ si y sólo si $f\equiv 0$.
Luego, $\langle f,g\rangle$ es un producto interior.

b) $\langle f,g\rangle=\int_0^1 cos(2\pi x)sen(2\pi x)dx=\left.\frac{1}{2\pi}\frac{sen^2(2\pi x)}{2}\right]_0^1=0\Rightarrow\langle f,g\rangle=0$

c) $\|f\|^2=\langle f,f\rangle=\int_0^1 cos(2\pi x)cos(2\pi x)dx=\int_0^1 cos^2(2\pi x)\,dx=\int_0^1\frac{1+cos(4\pi x)}{2}\,dx=$

$$=\frac{1}{2}x\Big]_0^1+\left.\frac{1}{2}\frac{sen(4\pi x)}{4\pi}\right]_0^1=\frac{1}{2}+0\Rightarrow\|f\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$