Trabajo Práctico Nº 8: <u>VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS. DIAGONALIZACIÓN</u>.

<u>Ejercicio 1</u>: Dada $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, muestre si $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$son vectores propios de A e indique a qué valor propio está asociado.

<u>Ejercicio 2</u>: Dada la matriz $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, calcula sus valores y vectores propios. ¿Es N inversible?

<u>Ejercicio 3</u>: Dada la transformación lineal de R^2 en R^2, reflexión de un vector con respecto al eje *y*, halle los valores y vectores propios e interprete geométricamente.

<u>Ejercicio 4</u>: Para las siguientes matrices:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d)

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Encuentre, de ser posible:

i. Los valores propios.
ii. Los espacios propios asociados a cada valor propio.
iii. Una base y la dimensión de los espacios propios.
iv. Interprete geométricamente cada caso.

<u>Ejercicio 5</u>: Demuestre que:

a) Si A es una matriz triangular superior o inferior entonces los valores propios son los elementos de la diagonal principal.
b) La transformación semejanza $T(A) = C^{-1}AC$, es transformación lineal.
c) Si λ es valor propio de A entonces λ^2 es valor propio de A^2.

Ejercicio 6: Busque una aplicación en el celular para calcular valores y vectores propios o investiga en las funciones de la calculadora. Utilice dicha aplicación para hallar valores y vectores propios de la matriz E.

$E = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 7: Complete, de ser posible, la siguiente tabla, teniendo en cuenta que P es una matriz que diagonaliza a cada matriz de la primer columna y que D es la matriz diagonal semejante a dicha matriz, obtenida a partir de P.

Matriz	Valores propios	Vectores propios L.I.	¿Es diagona-lizable?	Matriz P, si existe	Matriz D, si existe
A (punto 4)					
Matriz P de la matriz A					
B (punto 4)					
C (punto 4)					
D (punto 4)					
E	$\lambda_1=\lambda_2=1$ $\lambda_3=3$	$v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,			

$F=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$					

Ejercicio 8: Proporcione, si es posible, un ejemplo de una matriz A que verifique las condiciones requeridas en cada caso:

a) A tiene valores propios distintos y es diagonalizable.

b) A tiene valores propios distintos y no es diagonalizable.

c) A tiene valores propios iguales y no es diagonalizable.

d) A tiene valores propios iguales y es diagonalizable.

e) A es inversible y es diagonalizable.

f) A es inversible y no es diagonalizable.

g) A no es inversible y es diagonalizable.

h) A no es inversible y no es diagonalizable.

Ejercicio 9: Encuentre, en cada caso, una matriz P que diagonalice ortogonalmente a la matriz $\mathbf{A}$ y determine $P^{-1}AP$.

a) A=$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, b) B= I_3

Ejercicio 10: Si A es una matriz de orden *nxn*, argumente la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Si λ es valor propio de A, entonces det(A- λI) = 0.

b) Los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.

c) Los valores propios de A, son los elementos de la diagonal principal.

d) Si A tiene n-2 valores propios, entonces no es diagonalizable.

e) A y A^T tienen los mismos vectores propios.

f) Si A es diagonalizable y A semejante a B_{nxn}, entonces B_{nxn} es también diagonalizable.

g) La multiplicidad algebraica de λ es menor o igual a la multiplicidad geométrica

h) Sea A una matriz de orden 3 cuyos valores propios son 3, 0 y 6, entonces todo sistema de ecuaciones lineales de matriz de coeficientes A es compatible.

i) Si A es diagonalizable ortogonalmente, entonces A es simétrica.

j) Si A es una matriz inversible y ortogonalmente diagonalizable, entonces A^{-1} es ortogonalmente diagonalizable.

k) Si los subespacios propios de una matriz A_{4x4} son

$$E1 = \{\begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ -y \end{bmatrix}, x, y \in IR\}$$

$$E2 = \{\begin{bmatrix} z \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix}, z, t \in IR\}$$

Entonces la matriz A es diagonalizable.

<u>Ejercicio 11</u>: En cada caso, indique la (o las) respuestas correctas:

a) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces:
   1) $det(A - \lambda I) = det(B - \lambda I)$
   2) A y B son diagonalizables.
   3) A y B son inversibles
   4) Ninguna respuesta anterior es correcta.

b) Si A es una matriz de orden 3 con valores propios 0, 1 y -1, entonces:
   1) A es equivalente por filas a la identidad.
   2) A es diagonalizable.
   3) $tr\,(A) = 0$.
   4) Ninguna respuesta anterior es correcta.

c) Si A es una matriz de orden n tal que $A = A^T$, entonces:
   1) A es inversible.

2) A es diagonalizable ortogonalmente.
3) A es ortogonal.
4) Ninguna respuesta anterior es correcta.

d) Sea P(λ) el polinomio característico de A, $P(\lambda) = (\lambda-1)\,(\lambda-3)^2\,(\lambda-4)^3$ entonces:
1) A es de orden 3x3
2) A es diagonalizable
3) A tiene entre 3 y 6 vectores propios
4) Ninguna respuesta anterior es correcta.

<u>Ejercicio 12</u>: Sea A una matriz de orden 2 cuyos valores propios son -2 y 5. Complete o responda según corresponda:

a) $det(A) =$……………………………………………………………………..………..

b) ¿Qué puede asegurar acerca de det(A-5I)?..

c) Los valores propios de B = 4A son …………………………...……………………….

d) Los valores propios de A^T son……………………………………...……………..

e) $det\,(A^T + I)$ es………..…………………………………………………...……….

f) Si M es una matriz semejante a A, entonces sus valores propios son…………….……

g) ¿A es inversible? Justifique su respuesta. En caso de serlo, los valores propios de A^{-1} son ……………………….…………………………………………………………...…..

h) $traza(A) =$…………………………………………………………………….…………

i) ¿A es diagonalizable? Justifique su respuesta………………………………………….