

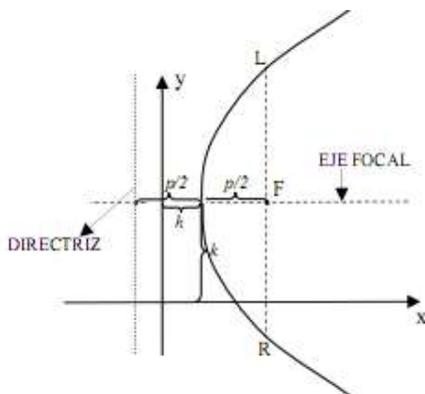
Trabajo Práctico N° 9: APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Ejercicio 1:

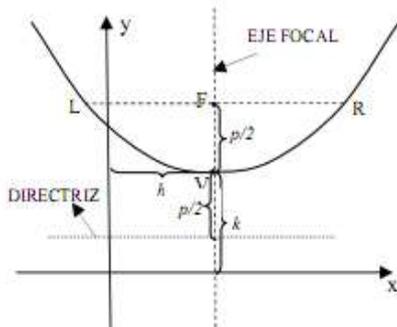
Halle la ecuación normal y general de la circunferencia sabiendo que tiene por diámetro al segmento cuyos extremos son (1; 2) y (1; -3). Represente gráficamente.

Ejercicio 2:

Analice la deducción de las expresiones que figuran en el cuadro a partir de la gráfica dada.



EUCUACIÓN CANÓNICA		$2 p (x - h) = (y - k)^2$	
EJE FOCAL //		EJE X	
VÉRTICE	$V(h ; k)$	Ecuación de la DIRECTRIZ	$x = h - p/2$
FOCO	$F(h+p/2; k)$	LADO RECTO	$LR = 2p.$



EUCUACIÓN CANÓNICA		$2 p (y - k) = (x - h)^2$	
EJE FOCAL //		EJE Y	
VÉRTICE	$V(h ; k)$	Ecuación de la DIRECTRIZ	$y = k - p/2$
FOCO	$F(h; k+p/2)$	LADO RECTO	$LR = 2p.$

Ejercicio 3:

Determine la ecuación normal y general de la parábola que tiene directriz $x=-4$ y

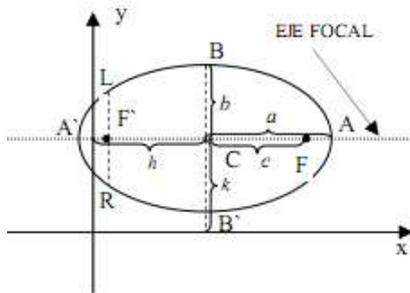
Foco (-6, 1). Represente gráficamente.

Ejercicio 4:

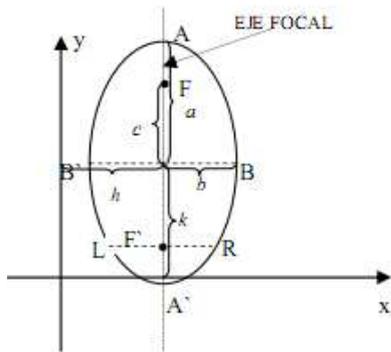
Dos postes de alambrados ubicados en bordes opuestos de una carretera, distantes 8 m entre sí y con 10 m de altura cada uno, sostienen en sus extremos superiores un cable que forman un arco parabólico cuya proyección en el suelo es perpendicular a los bordes de la carretera. A un metro de la base de cada poste, el cable está a 7 m del suelo. ¿Cuánto dista de la carretera el punto más bajo del cable?

Ejercicio 5:

Analice la deducción de las expresiones que figuran en el cuadro a partir de la gráfica dada.



EJE FOCAL //	EJE X	ECUACIÓN CANÓNICA	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
CENTRO	C(h, k)	VÉRTICES	A(h+ a; k) A'(h- a; k) B(h; k+ b) B'(h; k- b)
SEMIEJES	MAYOR: a MENOR: b	FOCOS:	F(h+ c; k) F'(h- c; k)
SEMIDISTANCIA FOCAL	c	FÓRMULA DE CÁLCULO	$a^2 = b^2 + c^2$
EXCENTRICIDAD	$e = \frac{c}{a}$	LADO RECTO	$LR = \frac{2b^2}{a}$



EJE FOCAL //	EJE Y	ECUACIÓN CANÓNICA	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
CENTRO	C(h, k)	VÉRTICES	A(h; k+ a) A'(h; k- a) B(h+ b; k) B'(h- b; k)
SEMIEJES	MAYOR: a MENOR: b	FOCOS:	F(h; k+ c) F'(h; k- c)
SEMIDISTANCIA FOCAL	c	FÓRMULA DE CÁLCULO	$a^2 = b^2 + c^2$
EXCENTRICIDAD	$e = \frac{c}{a}$	LADO RECTO	$LR = \frac{2b^2}{a}$

Ejercicio 6:

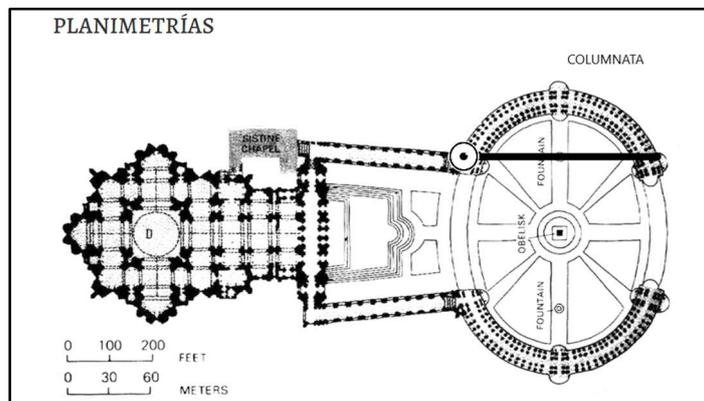
Halle la ecuación normal de la elipse con eje focal paralelo al eje y, con centro C (2; 2), que tiene uno de sus vértices en A(2; 7) y cuya excentricidad es 3/5. Represente gráficamente.

Ejercicio 7:

La plaza de San Pedro en Roma tiene una estructura elíptica. El ancho total de la plaza es de 230m. En el centro se encuentra un obelisco colocado por Sixto V. La medida transversal de la plaza es de 97 m aproximadamente. Cómo se puede visualizar en la imagen la plaza tiene dos fuentes de agua, estas se encuentran en cada foco elíptico. En los laterales hay dos pasajes que se denominan la Columnata de San Pedro.



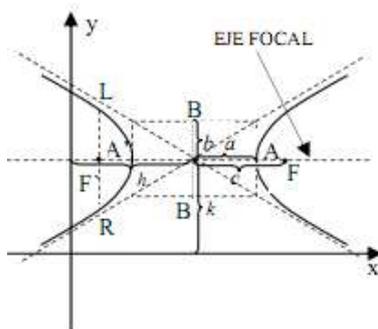
- Encuentra la ecuación canónica de la elipse que describe a la plaza.
- Encuentre las coordenadas de los focos.
- Si una persona se encuentra justo enfrente de una de las fuentes, sobre la línea recta y parada dentro de la columnata de San Pedro, como se muestra en la figura.



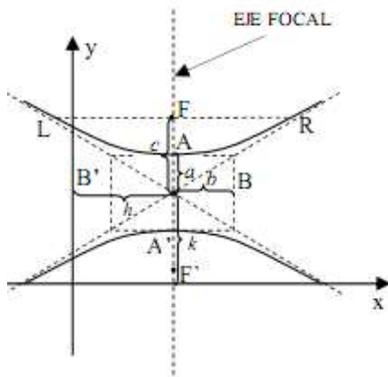
Calcule las coordenadas de esa persona tomando como referencia el origen en el obelisco.

Ejercicio 8:

Analice la deducción de las expresiones que figuran en el cuadro a partir de la gráfica dada.



EJE FOCAL //	EJE X	ECUACIÓN CANÓNICA	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
CENTRO	$C(h, k)$	VÉRTICES	$A(h+a; k)$ $A'(h-a; k)$ $B(h; k+b)$ $B'(h; k-b)$
SEMIEJES	REAL: a IMAGINARIO: b	FOCOS:	$F(h+c; k)$ $F'(h-c; k)$
SEMIDISTANCIA FOCAL	c	FORMULA DE CÁLCULO	$c^2 = a^2 + b^2$
EXCENTRICIDAD	$e = \frac{c}{a}$	LADO RECTO	$LR = \frac{2b^2}{a}$
ECUACIÓN ASÍNTOTAS		$y = \pm \frac{b}{a}(x-h) + k$	



EJE FOCAL //	EJE Y	ECUACIÓN CANÓNICA	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
CENTRO	$C(h, k)$	VÉRTICES	$A(h; k+a)$ $A'(h; k-a)$ $B(h+b; k)$ $B'(h-b; k)$
SEMIEJES	REAL: a MAGINARIO: b	FOCOS:	$F(h; k+c)$ $F'(h; k-c)$
SEMIDISTANCIA FOCAL	c	FÓRMULA DE CÁLCULO	$c^2 = a^2 + b^2$
EXCENTRICIDAD	$e = \frac{c}{a}$	LADO RECTO	$LR = \frac{2b^2}{a}$
ECUACIÓN ASÍNTOTAS		$y = \pm \frac{a}{b}(x-h) + k$	

Ejercicio 9:

Halle la ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados si sus vértices están en $(\pm 4, 1)$ y tiene asíntotas $y = 1 \pm 2x$. Represente gráficamente.

Ejercicio 10:

Se realiza una traslación de ejes con el punto $(2, -2)$ como nuevo origen de coordenadas.

- Encuentre las nuevas coordenadas del punto $Q(5, -1)$. Verifique gráficamente.
- Encuentre la ecuación de la siguiente circunferencia, en el nuevo sistema de ejes:
 $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$.

Ejercicio 11:

Dadas las ecuaciones de las siguientes cónicas, encuentre su ecuación normal, determine sus elementos principales y grafique. Escriba la ecuación trasladada respecto de las coordenadas del nuevo sistema.

- $x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
- $-36x^2 + 64y^2 + 288x + 128y - 2816 = 0$
- $x^2 + 8x + 12y - 8 = 0$
- $4x^2 + y^2 + 16x - 6y + 21 = 0$
- $2x^2 + 2y^2 - 12x - 8y - 6 = 0$
- $x^2 - 4y - 8x = 0$
- $y^2 + x^2 - 2x - 6y - 15 = 0$
- $-9y^2 + 4x^2 - 36 = 0$
- $25y^2 + 9x^2 - 54x + 100y - 44 = 0$

Ejercicio 12:

Dadas las siguientes ecuaciones:

- a) $4xy - 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 1/2 = 0$
- b) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$
- c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y + 250 = 0$
- d) $x^2 - 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$
- e) $xy - 2 = 0 \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$
- f) $2xy + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$
- g) $5x^2 + 5y^2 - 8xy = 36$
- h) $2y^2 + 4xy + 2x^2 + 8\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}x + 9 = 0$

- a) Exprese la ecuación en forma matricial.
- b) Identifique la cónica a partir de los valores propios.
- c) Encuentre la matriz que diagonaliza ortogonalmente a la matriz de la forma cuadrática.
- d) Verifique que la matriz hallada representa una rotación.
- e) Exprese la ecuación referida al nuevo sistema rotado o rototrasladado.
- f) Halle el ángulo de rotación.
- g) Grafique

i) $4xy - 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \frac{1}{2} = 0$

SOLUCIÓN:

1) Forma matricial $[x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-3\sqrt{2} \ \sqrt{2}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-1/2] = 0$ siendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

2) Valores y vectores propios para A

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \quad \lambda_1 = 2 \quad y \quad \lambda_2 = -2$$

Para $\lambda_1 = 2$ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $-2x + 2y = 0$ $x = y$ $v_1 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = -2$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $2x + 2y = 0$ $x = -y$ $v_2 = \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix}$

3) La matriz P para la diagonalización ortogonal es: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

La matriz diagonal semejante a la matriz de la forma cuadrática es: $D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4) Considerando que $X = P X'$, la nueva ecuación matricial es:

$$[x' \ y'] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-3\sqrt{2} \ \sqrt{2}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-1/2] = 0$$

$$[x' \ y'] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-3\sqrt{2} \ \sqrt{2}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-1/2] = 0$$

$$2x'^2 - 2y'^2 - 2x' + 4y' = 1/2$$

$$2(x'^2 - x') - 2(y'^2 - 2y') = 1/2$$

$$2(x'^2 - x' + 1/4 - 1/4) - 2(y'^2 - 2y' + 1 - 1) = 1/2$$

$$2(x' - 1/2)^2 - 1/2 - 2(y' - 1)^2 + 2 = 1/2$$

$$2(x' - 1/2)^2 - 2(y' - 1)^2 = -1$$

$$-2(x' - 1/2)^2 + 2(y' - 1)^2 = 1$$

5) La ecuación normal de la cónica es: $-\frac{(x' - 1/2)^2}{1/2} + \frac{(y' - 1)^2}{1/2} = 1$

• Tipo de cónica: Hipérbola

- Centro: $C (\frac{1}{2}; 1)$ $[C (h; k)]$

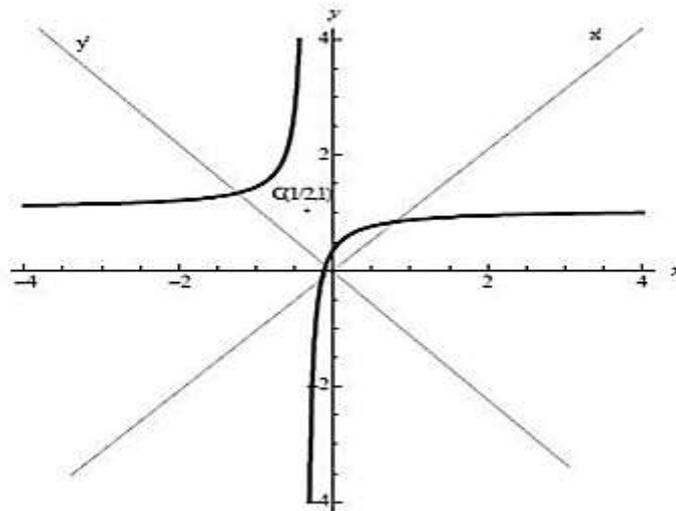
- Semiejes: $a = b = 1/\sqrt{2}$

- Semidistancia focal: $c = 1$ $[c^2 = a^2 + b^2]$

- Vértices: $A (\frac{1}{2}; 1 + 1/\sqrt{2})$ $A' (\frac{1}{2}; 1 - 1/\sqrt{2})$ $[A (h; k \pm a)]$
 $B (\frac{1}{2} + 1/\sqrt{2}; 1)$ $B' (\frac{1}{2} - 1/\sqrt{2}; 1)$ $[B (h \pm b; k)]$

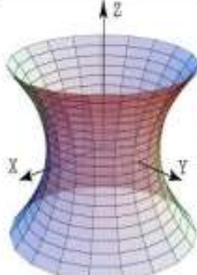
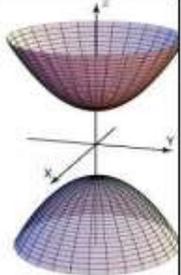
- Focos: $F (\frac{1}{2}; 2)$ $F' (\frac{1}{2}; 0)$ $[F (h; k \pm c)]$

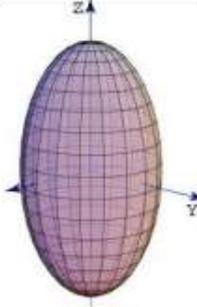
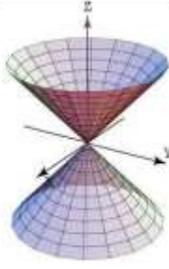
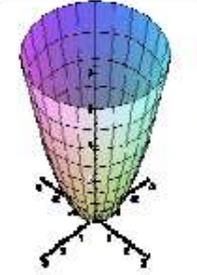
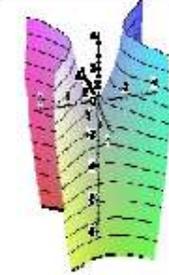
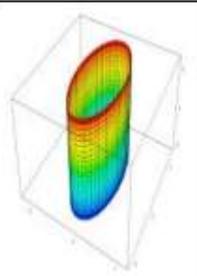
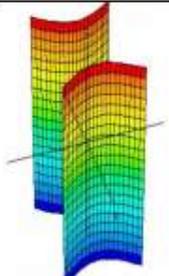
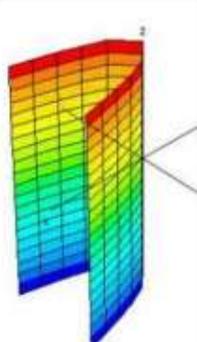
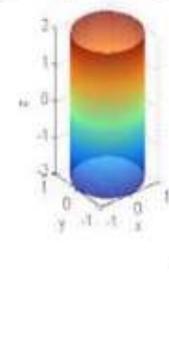
- Lado recto: $LR = \sqrt{2}$ $[LR = 2 b^2/a]$



Ejercicio 13:

Analice las relaciones que existen entre las gráficas dadas y las ecuaciones indicadas.

	<p>Hiperboloide de una hoja</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		<p>Hiperboloide de dos hojas</p>	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
---	-------------------------------------	---	---	--------------------------------------	--

	Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		Superficie cónica	$z^2 = x^2 + y^2$
	Paraboloide elíptico	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$		Paraboloide hiperbólico	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
	Cilindro elíptico	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		Cilindro hiperbólico	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
	Cilindro parabólico	$x = a y^2$		Cilindro circular	$x^2 + y^2 = a^2$

Ejercicio 14:

Halle los elementos de la siguiente cuádrica e identifique el nombre:

$$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$$

Completando cuadrados en x y en y: $4x^2 - 16x + 36y^2 - 216y - 9z^2 + 304 = 0$

$$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 + 304 = 0$$

$$4(x^2 - 4x + 4 - 4) + 36(y^2 - 6y + 9 - 9) - 9z^2 + 304 = 0$$

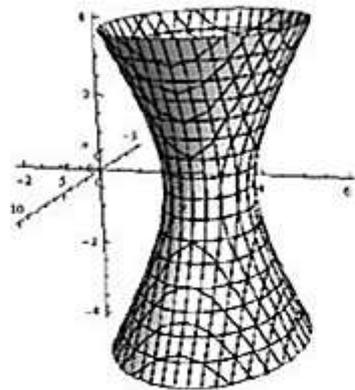
$$4[(x - 2)^2 - 4] + 36[(y - 3)^2 - 9] - 9z^2 + 304 = 0$$

$$4(x - 2)^2 - 16 + 36(y - 3)^2 - 324 - 9z^2 + 304 = 0$$

$$4(x - 2)^2 + 36(y - 3)^2 - 9z^2 - 36 = 0 \quad \text{dividiendo por 36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{hiperboloide de una hoja}$$

- ❖ Tipo de cuádrica: Hiperboloide de una hoja (alrededor del eje z)
- ❖ Centro: $C = (2, 3, 0)$ [C = (h, k, l)]
- ❖ Vértices: $V1 = (4, 3, 0)$ y $V2 = (0, 3, 0)$; $V3 = (2, 4, 0)$ y $V4 = (2, 2, 0)$
- ❖ Semiejes: $a = 3, b = 1, c = 2$



Ejercicio 15:

Dada la siguiente ecuación:

$$144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$$

- a) Expresar la ecuación en forma matricial.
- b) Encuentre la matriz que diagonaliza ortogonalmente a la matriz de la forma cuadrática.
- c) Expresar la ecuación referida al nuevo sistema rotado o rototrasladado.

SOLUCIÓN:

Dada la ecuación de la cuádrica:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

expresamos dicha ecuación en forma matricial:

$$X^T A X + K X + [j] = 0$$

Siendo: $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$ $K = [g \ h \ i]$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

a)

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 144 & 0 & -108 \\ 0 & 100 & 0 \\ -108 & 0 & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -540 & 0 & -720 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Con $A = \begin{bmatrix} 144 & 0 & -108 \\ 0 & 100 & 0 \\ -108 & 0 & 81 \end{bmatrix}$ y $K = [-540 \ 0 \ -720]$

b) Buscamos los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 144 - \lambda & 0 & -108 \\ 0 & 100 - \lambda & 0 \\ -108 & 0 & 81 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(144 - \lambda)(100 - \lambda)(81 - \lambda) - 108^2 \cdot (100 - \lambda) = 0$$

$$(100 - \lambda)(\lambda^2 - 225\lambda + 11664 - 108^2) = 0$$

$$(100 - \lambda)(\lambda^2 - 225\lambda) = 0$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 0 & \lambda_2 = 100 & \lambda_3 = 225 \\ \lambda_1 = 0 & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 144 & 0 & -108 \\ 0 & 100 & 0 \\ -108 & 0 & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 144a - 108c = 0 \\ 100b = 0 \\ -108a + 81c = 0 \end{cases} \quad a = 3/4c; \ b = 0; \ v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}; \ \hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 100 \longrightarrow \begin{bmatrix} 44 & 0 & -108 \\ 0 & 0 & 0 \\ -108 & 0 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 44a - 108c = 0 \\ -108a - 19c = 0 \end{cases} \quad a = c = 0; \ b \in \mathbb{R}; \ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 225 \longrightarrow \begin{bmatrix} -81 & 0 & -108 \\ 0 & -125 & 0 \\ -108 & 0 & -144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -81a - 108c = 0 \\ -125b = 0 \\ -108a - 144c = 0 \end{cases} \quad a = -4/3 c; b = 0; v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \hat{v}_3 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

c) Reemplazando X por P X'

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -540 & 0 & -720 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$100 y'^2 + 225 z'^2 - 900 x' = 0$$

$$4 y'^2 + 9 z'^2 - 36 x' = 0$$

$$x' = \frac{y'^2}{9} + \frac{z'^2}{4}$$

PARABOLOIDE ELÍPTICO

ContourPlot3D[144x'^2+100y'^2-81z'^2-216x'-540x'-720z', {x,-10,20}, {y,-13,13}, {z,-10,10}, ViewPoint->(1,-4,3), Axes->True, AxesLabel->{'x','y','z'}, PlotPoints->0]

