

Trabajo Práctico N°3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio 1: Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ -6x - 4y + 2z = -8 \end{cases}$$

- a) Determine si las ternas $(2,0,2)$, $(2,1,4)$ y $(1,0,1)$ son soluciones del sistema.
b) Muestre que toda terna de la forma $(1 + t, 1 - t, 1 + t)$, donde t es un número real, es solución del sistema.
c) Indique si se puede afirmar que el conjunto solución del sistema es
 $S = \{(1 + t, 1 - t, 1 + t) \in \mathbb{R}^3\}$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2: Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^5 y \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = -1 \\ x_2 - \frac{x_3}{6} + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ 4x - 8y = 3 \end{cases}$$

- a) Escriba en forma matricial.
b) Analice el sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius e indique cómo se clasifica.
c) Resuelva los sistemas por método de Eliminación de Gauss.
d) Indique, si hay, las variables principales y libres y los grados de libertad del sistema.

SOLUCIÓN:

Enunciamos a continuación el teorema de Rouché-Frobenius:

TEOREMA DE ROUCHÉ- FROBENIUS o de KRONECKER

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales (SEL) de $m \times n$ y sea $A|B = A'$ la matriz aumentada o ampliada del sistema con los términos independientes.

Entonces

- i) si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = n$, el SEL es compatible determinado (solución única);
- ii) si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') < n$, el SEL es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y el grado de indeterminación o de libertad del SEL es $g = n - \text{rango}(A)$, g indica el número de variables libres del sistema;
- iii) si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A')$, el SEL ES incompatible o inconsistente (no tiene solución)

EJERCICIO 2A

PARTE 1

<https://drive.google.com/file/d/1VAxdiIur9nHlDew8ihScSzXlqX7NIVBs/view>

PARTE 2

https://drive.google.com/file/d/1W2h9EODUx3kppWp8VfpTv_lux_r7AKyx/view

EJERCICIO 2B

PARTE 1

<https://drive.google.com/file/d/131w68DNTQISc9fBKytFXCPSZKNSw16n7/view>

PARTE 2

https://drive.google.com/file/d/13SjFb5vGrAGzw_H9cNJuuFs3RDh0nXH_/view

EJERCICIO 2C

<https://drive.google.com/file/d/1f1OnG-YisFP4ppRP5mjAmPRUvsZNCCAQ/view>

Ejercicio 3: Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales empleando cuando sea posible, método matricial, regla de Cramer y/o método de Eliminación de Gauss. Interprete gráficamente.

$$\text{a) } \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6x - 3y = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

EJERCICIO 3A

https://drive.google.com/file/d/16-DaSG2fxvuF2thOl2_aftkHVqb2z8MZ/view?usp=sharing

EJERCICIO 3B

https://drive.google.com/file/d/15G-32IonHiqkCcASsYyfvCtKb1SMi0j_/view?usp=sharing

Ejercicio 4: Determine, si es posible, el/los valores de λ para que los siguientes sistemas tengan solución única, infinitas soluciones o no tengan solución.

$$\text{i) } \begin{cases} 1x - \lambda y = 3 \\ \lambda x - 9y = \lambda^2 \end{cases} \quad \text{ii) } \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \lambda \end{array} \right]$$

SOLUCIÓN:

i) <https://www.youtube.com/watch?v=SxD5G3yVquw>

ii) <https://www.youtube.com/watch?v=1EGV4RFgitA>

Ejercicio 5: Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

a) Resuélvalo por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Solución: https://drive.google.com/open?id=1VjYkdEwQQYnDyL2eDJfWev09iOBn_6co

b) Analice el sistema homogéneo asociado por el método de Gauss-Jordan. ¿Podría ser incompatible?

Solución: https://drive.google.com/open?id=1gs4f_WcudotnF1fmYpaGa75BoRmZ_kyK

Ejercicio 6: Dado el siguiente sistema rectangular:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ x - 5y + 2z = -3 \end{cases}$$

a) Determine el conjunto solución.

b) En cada uno de los siguientes casos responda y proporcione un ejemplo:

¿Es posible agregar una ecuación al sistema dado de manera que el sistema 3×3 resultante:

b₁) tenga única solución?

b₂) tenga infinitas soluciones?

b₃) no tenga solución?

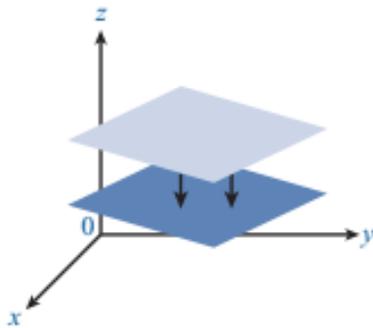
***Ejercicio 7:** Determine, si es posible aplicando el método matricial, un vector x tal que $Ax = b$ si¹:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

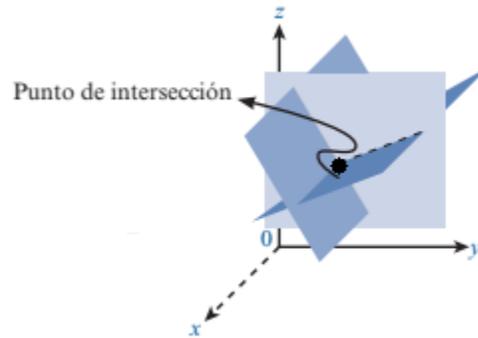
¹Referencia de consulta: Anton. *Introducción al Álgebra Lineal*. 4ª Edición. Ejemplo 1 de la Sección 1.6: Otros resultados sobre sistemas de ecuaciones e invertibilidad.

Ejercicio 8: Los sistemas de ecuaciones lineales en \mathbb{R}^3 se pueden representar mediante planos en el espacio.

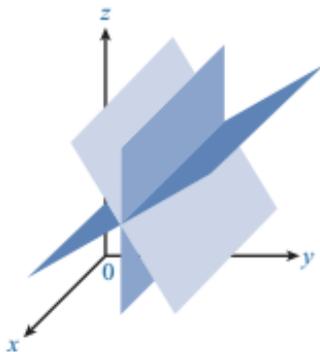
Según la relación que observa entre los planos, clasifique los sistemas.



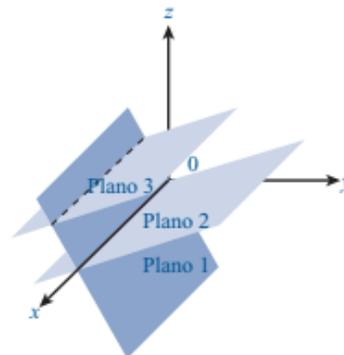
Sistema



Sistema



Sistema



Sistema

Ejercicio 9: Clasifique los sistemas lineales con las siguientes matrices ampliadas como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, en función de los parámetros a y b . Cuando un caso no se verifique, escriba "nunca". Cuando un caso se de siempre, independientemente del valor de a y b escriba "siempre". Para los casos en los que obtengas varios valores de parámetros, escribalos explícitamente utilizando los conectivos lógicos de conjugación o disyunción que se leen "y" u "o".

a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2b & b+2 \end{array} \right]$$

Compatible determinado.....
 Compatible indeterminado.....
 Incompatible.....

SOLUCIÓN:

<https://drive.google.com/file/d/1YfwxcalfQeUtDaldb67qF9YK9UICXYgI/view?usp=drivesdk>

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & a & 4 & 3 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{array} \right]$$

Compatible determinado.....
 Compatible indeterminado.....
 Incompatible.....

SOLUCIÓN:

<https://drive.google.com/file/d/1m9LCFoodLMpBkzarQZhsUeZ5b0Q92ODz/view?usp=drivesdk>

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right]$$

Compatible determinado.....
 Compatible indeterminado.....
 Incompatible.....

SOLUCIÓN:

Parte 1:

<https://drive.google.com/file/d/1Z4C1-Bqg8OdFjVVOLFfP20-1il5gqirX/view?usp=drivesdk>

Parte 2:

<https://drive.google.com/file/d/1m12xdsfyD5SIEJCF4QXPDjd3OqIhepnL/view?usp=drivesdk>

d)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Compatible determinado.....} \\ \text{Compatible indeterminado.....} \\ \text{Incompatible.....} \end{array}$$

e)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & a & b+1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Compatible determinado.....} \\ \text{Compatible indeterminado.....} \\ \text{Incompatible.....} \end{array}$$

SOLUCIÓN:

<https://drive.google.com/file/d/1mJbDaxx29wCEaxnfyYfnLpof9Fsl1k5X/view?usp=drivesdk>

Ejercicio 10: Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

$$(A - \lambda I) X = 0, \text{ siendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 11: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, plantee el sistema de ecuaciones que corresponda en cada caso para encontrar una matriz B de 2x2 tal que

- a) $A B = O$ (O es la matriz nula)
- b) $A B = I$ (I es la matriz identidad)

Ejercicio 12: Argumente la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

- a) Siendo A de 2x4 tal que $A \cdot X = B$, se puede encontrar una matriz B para que el sistema tenga solución única.

Solución: <https://youtu.be/hM72mi3ZO2M>

b) Si el sistema $A \cdot X = O$ tiene solución única, A es cuadrada.

Solución: <https://youtu.be/nGdf465ci4Y>

c) El sistema cuadrado $A \cdot X = B$ tiene solución única si A es equivalente por filas a la matriz identidad.

Solución: <https://youtu.be/FjauPdehJg8>

d) Si en el sistema $A \cdot X = B$, X_1 es solución y X_2 también lo es, entonces $X_1 + X_2$ es solución del sistema.

Solución: <https://youtu.be/c5609PAW0go>

e) Un sistema homogéneo con matriz de coeficientes cuadrada puede tener infinitas soluciones.

Solución: <https://youtu.be/ecV3Uma4ELI>

f) Si en el sistema $A \cdot X = O$, X_1 es solución, entonces $k \cdot X_1$ (k real) también es solución.

Solución: <https://youtu.be/1DstOTcjGEG>

g) Un sistema con más incógnitas que ecuaciones siempre es indeterminado.

Solución: <https://youtu.be/2X3Ldk6wIdQ>

h) El rango de la matriz ampliada debe coincidir con el rango de la matriz de coeficientes para que el sistema $A \cdot X = B$ sea compatible.

Solución: <https://youtu.be/IUrGQFiDC8Y>

i) Si A es una matriz cuadrada y el sistema $A \cdot X = 0$ es compatible determinado, su solución es igual a la del sistema $A^t \cdot X = 0$.

Solución: <https://youtu.be/IRM4QKANBA0>

RESUELTO

Ejercicio 13: Determine si los sistemas de ecuaciones lineales dados son equivalentes:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ -6b + 2a = 0 \\ -\frac{1}{3}a + b = 0 \end{cases}$$

Solución:

Se debe encontrar el conjunto solución de ambos sistemas y compararlos:

Del 1° sistema $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & : & 1 \\ 1 & -3 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -2 & : & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & : & -1 \\ 0 & 1 & : & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & : & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{se obtiene que } x = -\frac{3}{2};$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Del 2° sistema $\begin{cases} a - b = -1 \\ -6b + 2a = 0 \\ -\frac{1}{3}a + b = 0 \end{cases}$, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & : & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & : & 2 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & : & -1/2 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & : & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & : & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{se obtiene que } x = -\frac{3}{2}; y = -\frac{1}{2}$$

Luego, como los sistemas de ecuaciones lineales tienen el mismo conjunto solución

$$S = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}, \text{ los sistemas son equivalentes.}$$