Trabajo Práctico N°3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio 1: Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ -6x - 4y + 2z = -8 \end{cases}$$

a) Determine si las ternas $(2,0,2)$, $(2,1,4)$ y $(1,0,1)$ son soluciones del sistema.

b) Muestre que toda terna de la forma $(1+t,\ 1-t, 1+t)$, donde t es un número real, es solución del sistema.

c) Indique si se puede afirmar que el conjunto solución del sistema es
$S = \{(1+t,\ 1-t, 1+t) \in IR^3\}$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2: Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en IR^3, IR^5 y IR^2:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 = -1 \\ x_2 - \frac{x_3}{6} + x_5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ 4x - 8y = 3 \end{cases}$$

a) Escriba en forma matricial.

b) Analice el sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius e indique cómo se clasifica.

c) Resuelva los sistemas por método de Eliminación de Gauss.

d) Indique, si hay, las variables principales y libres y los grados de libertad del sistema.

Ejercicio 3: Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales empleando cuando sea posible, método matricial, regla de Cramer y/o método de Eliminación de Gauss. Interprete gráficamente.

a) $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 3y = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

Ejercicio 4: Determine, si es posible, el/los valores de λ para que los siguientes sistemas tengan solución única, infinitas soluciones o no tengan solución.

i) $\begin{cases} 1x - \lambda y = 3 \\ \lambda x - 9y = \lambda^2 \end{cases}$ ii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \lambda \end{array}\right]$

Ejercicio 5: Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

a) Resuélvalo por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

b) Analice el sistema homogéneo asociado por el método de Gauss-Jordan. ¿Podría ser incompatible?

Ejercicio 6: Dado el siguiente sistema rectangular:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ x - 5y + 2z = -3 \end{cases}$$

a) Determine el conjunto solución.

b) En cada uno de los siguientes casos responda y proporcione un ejemplo:

¿Es posible agregar una ecuación al sistema dado de manera que el sistema 3×3 resultante:

b_1) tenga única solución?

b_2) tenga infinitas soluciones?

b_3) no tenga solución?

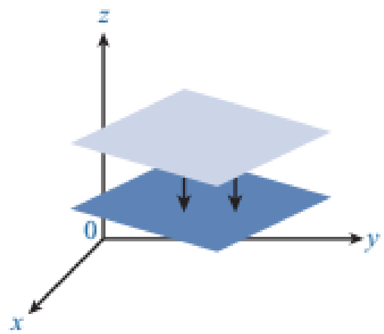
***Ejercicio 7:** Determine, si es posible aplicando el método matricial, un vector x tal que $Ax = b$ si[1]:

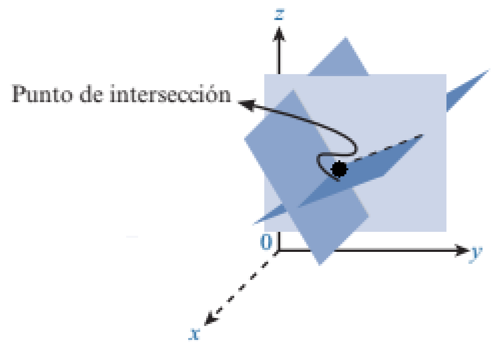
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

[1]**Referencia de consulta**: Anton. *Introducción al Álgebra Lineal*. 4ª Edición. Ejemplo 1 de la Sección 1.6: Otros resultados sobre sistemas de ecuaciones e invertibilidad.

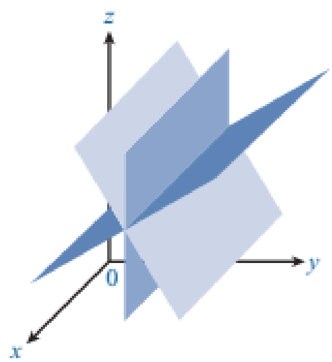
Ejercicio 8: Los sistemas de ecuaciones lineales en IR^3 se pueden representar mediante planos en el espacio.

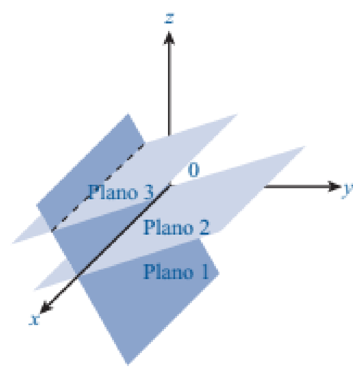
Según la relación que observa entre los planos, clasifique los sistemas.





Sistema …………………………………… Sistema ……………………………………





Sistema …………………………………… Sistema ……………………………………

Ejercicio 9: Clasifique los sistemas lineales con las siguientes matrices ampliadas como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, en función de los parámetros *a* y *b*. Cuando un caso no se verifique, escriba “nunca". Cuando un caso se de siempre, independientemente del valor de *a* y *b* escriba “siempre". Para los casos en los que obtengas varios valores de parámetros, escríbalos explícitamente utilizando los conectivos lógicos de conjugación o disyunción que se leen “y" u “o".

a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2b & b+2 \end{array}\right]$$

Compatible determinado............................
Compatible indeterminado.........................
Incompatible..

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & a & 4 & 3 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{array}\right]$$

Compatible determinado............................
Compatible indeterminado.........................
Incompatible..

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$

Compatible determinado............................
Compatible indeterminado.........................
Incompatible..

d)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{array}\right]$$

Compatible determinado............................
Compatible indeterminado.........................
Incompatible..

e)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & a & b+1 \end{array}\right]$$

Compatible determinado............................
Compatible indeterminado.........................
Incompatible..

<u>Ejercicio 10:</u> Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

$$(A - \lambda I)\, X = 0 \text{, siendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 11: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, plantee el sistema de ecuaciones que corresponda en cada caso para encontrar una matriz B de 2x2 tal que

a) A B = O   (O es la matriz nula)

b) A B = I   (I es la matriz identidad)

Ejercicio 12: Argumente la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Siendo A de 2x4 tal que A·X = B, se puede encontrar una matriz B para que el sistema tenga solución única.
b) Si el sistema A· X = O tiene solución única, A es cuadrada.
c) El sistema cuadrado A· X = B tiene solución única si A es equivalente por filas a la matriz identidad.
d) Si en el sistema A· X = B, X_1 es solución y X_2 también lo es, entonces $X_1 + X_2$ es solución del sistema.
e) Un sistema homogéneo con matriz de coeficientes cuadrada puede tener infinitas soluciones.
f) Si en el sistema A· X = O, X_1 es solución, entonces $k.X_1$ (k real) también es solución.
g) Un sistema con más incógnitas que ecuaciones siempre es indeterminado.
h) El rango de la matriz ampliada debe coincidir con el rango de la matriz de coeficientes para que el sistema A.X = B sea compatible.
i) Si A es una matriz cuadrada y el sistema A.X = 0 es compatible determinado, su solución es igual a la del sistema A^t. X = 0.

RESUELTO

Ejercicio 13: Determine si los sistemas de ecuaciones lineales dados son equivalentes:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - b = -1 \\ -6b + 2a = 0 \\ -\frac{1}{3}a + b = 0 \end{cases}$$

Solución:

Se debe encontrar el conjunto solución de ambos sistemas y compararlos:

Del 1° sistema $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-3y=0 \end{cases}$, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -3 & & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se obtiene que $x=-\frac{3}{2}$; $y=-\frac{1}{2}$

Del 2° sistema $\begin{cases} a-b=-1 \\ -6b+2a=0 \\ -\frac{1}{3}a+b=0 \end{cases}$, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & -1 \\ 2 & -6 & \vdots & 0 \\ -1/3 & 1 & & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & & -1 \\ 0 & -4 & \vdots & 2 \\ 0 & 2/3 & & -1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & -1/2 \\ 0 & 2/3 & & -1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & -1/2 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & -3/2 \\ 0 & 1 & \vdots & -1/2 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$ se obtiene que $x=-\frac{3}{2}$; $y=-\frac{1}{2}$

Luego, como los sistemas de ecuaciones lineales tienen el mismo conjunto solución $S=\left\{\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$, los sistemas son equivalentes.