FACULTAD
REGIONAL
MENDOZA

Álgebra y Geometría Analítica

Unidad nº 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Algunas demostraciones, contraejemplos, explicaciones.

1) Sistemas equivalentes y Teorema de Rouché-Frobenius

https://youtu.be/W0Pm9DeMVbQ

2) A de orden nxn. A es una matriz inversible sí y sólo si para cada matriz B de orden nx1, el sistema A.X = B tiene exactamente una sola solución y esta es: $X = A^{-1}. B$

https://drive.google.com/open?id=11Q4UQ1UnNef6HBexHRoOpbL-i2lJ8kfk

https://youtu.be/WtXp-0Db8r0

Una matriz A_{nxn} es inversible si y solo si el sistema de ecuaciones lineales $AX=B$ tiene solución única para toda matriz B_{nx1}, a saber $X=A^{-1}B$.

$p \Leftrightarrow q$ doble implicación

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ equivalencia lógica

A B

A $p \Rightarrow q$: Si la matriz A_{nxn} es inversible entonces $AX=B$ tiene solución única, a saber $X=A^{-1}B$

$AX=B$

Pre-multiplicar por A^{-1}

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$

Asociativa del producto

$(A^{-1}A)X=A^{-1}B$

Definición de inversa $A^{-1}A=I$

$IX=A^{-1}B$

Elemento neutro del producto $IX=X$

$X=A^{-1}B$

. Luego, la solución del SEL es $X=A^{-1}B$, y es única por la propiedad de unicidad de A^{-1}

B $q \Rightarrow p$: Si el SEL $AX=B$ tiene solución única, a saber $X=A^{-1}B$, para toda matriz B_{nx1} entonces A_{nxn} es inversible.

. Sabemos que $AX=B$ es un sistema compatible determinado ya que tiene solución única.

. Por teorema de Rouché-Frobenius, $AX=B$ tiene única solución si y solo si $\rho(A)=\rho(A')=n$.

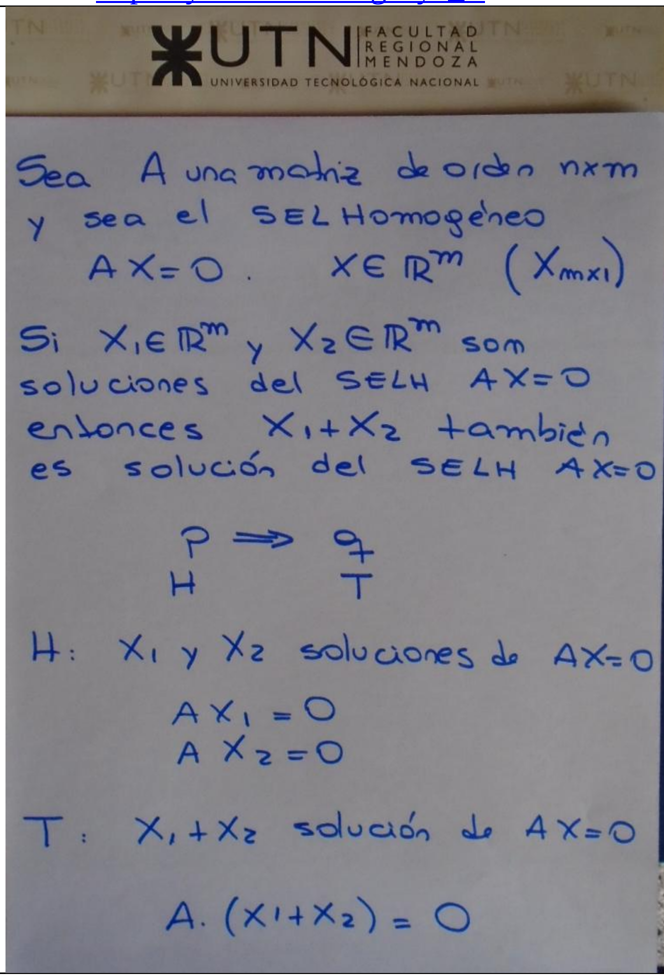
. Una matriz cuadrada A_{nxn} es inversible si y solo si $\rho(A)=n$.

. Luego la matriz A_{nxn} es inversible.

De esta manera queda demostrada la doble implicaci

3) Sea A una matriz de orden nxm y sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo AX=O. Si X_1 y X_2 son soluciones del sistema AX=0 entonces X_1+X_2 también es solución del sistema.
De manera análoga para $k.X_1$, siendo k un número real.

https://youtu.be/8kP3g0zyo_E



UTN FACULTAD REGIONAL MENDOZA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Sea A una matriz de orden nxm y sea el SEL Homogéneo $AX=O$. $X \in \mathbb{R}^m$ $(X_{m\times 1})$

Si $X_1 \in \mathbb{R}^m$ y $X_2 \in \mathbb{R}^m$ son soluciones del SELH $AX=O$ entonces X_1+X_2 también es solución del SELH $AX=O$

$$\underset{H}{p} \Rightarrow \underset{T}{q}$$

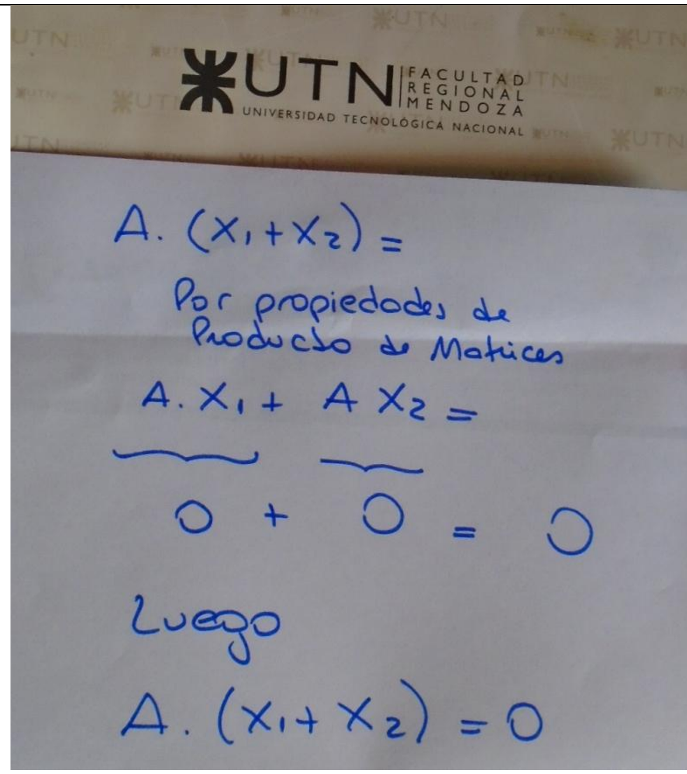
H: X_1 y X_2 soluciones de $AX=O$

$AX_1=O$

$AX_2=O$

T: X_1+X_2 solución de $AX=O$

$A.(X_1+X_2)=O$



UTN FACULTAD REGIONAL MENDOZA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

$A.(X_1+X_2) =$

Por propiedades de Producto de Matrices

$$\underbrace{A.X_1}_{O} + \underbrace{A\,X_2}_{O} = O + O = O$$

Luego

$A.(X_1+X_2)=O$

3- ¿Vale la propiedad anterior para cualquier sistema de ecuaciones lineales AX=B?
https://youtu.be/ihIWJ-pIMP8

4- ¿Si A_{nxm} es equivalente a C_{nxm} entonces los sistemas $AX=B_1$ y $CX= B_2$ son equivalentes??

https://drive.google.com/open?id=1ocxVkDzqX-Hxem9mcpNDGRyV-qe5BrD4

https://youtu.be/YAYcwNLxaEA

Si la matriz A_{mxn} es equivalente a la matriz C_{mxn}, los sistemas de ecuaciones lineales $AX=B_1$ y $CX=B_2$ son equivalentes?

$p \Rightarrow q$ implicación

- Contraejemplo

- $AX=B_1$: $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $B_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $S_1=\{(0,0)\}$

- $A \sim C$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrows F_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- $CX=B_2$: $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=0 \end{cases}$

$C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $B_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $S_2=\{(1,-1)\}$

- Luego $S_1 \neq S_2$ y $AX=B_1$ no es equivalente a $CX=B_2$, por lo que el enunciado es falso.

Nota: recuerde que cuando se propone un contraejemplo de una implicación ($p \rightarrow q$) que es falsa, el contraejemplo debe seguir el esquema de la siguiente proposición $p \wedge -q$, en este caso proponer dos matrices A y C que sean equivalentes por filas, y dos sistemas de ecuaciones (con A y C como matrices de coeficientes) que NO sean equivalentes.

FE DE ERRATAS: en el minuto 2:57 digo "... ya que según la lógica de predicado p entonces q es falsa si y solo si q es falsa". Esta afirmación no es correcta, y debe ser reemplazada por: "... ya que según la lógica de predicado p entonces q es falsa si y solo si p es verdadera y q es falsa"