TRABAJO PRÁCTICO Nº 7

Transformaciones Lineales

Ejercicio 1: En cada uno de los siguientes casos determine si la función dada es o no una transformación lineal y en caso de serlo, determine su núcleo e imagen y verifique el teorema de las dimensiones.

a) T: $R^2 \to$ □R^2 / T(x, y) = (x^2, y)

b) Sx: $R^2 \to$□R^2 / Sx (x, y) = (x, □y) que define la simetría respecto del eje X

c) Rα□: $R^2 \to$□R^2 / R□□(x, y) = (x cosα□- y senα, x senα□+ y cosα)

(Esta función define la rotación de ángulo α □en el sentido positivo alrededor del origen de coordenadas.)

d) T: $R^3 \to$ □R^2 / T(x, y, z) = (x + y, 2y)

e) T: $R^{2x2} \to$ □R / T(A) = det(A), siendo det(A) el determinante de la matriz A

f) T: $P^2 \to$ □P^1 / T(ax^2 + bx + c) = x – a

g) T: C[o,1] $\to$ □C[o,1] / T(f(x)) = *df(x)/dx*

h) T: $R^3 \to$ □R^{2x1} / T(x, y, z) = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

i) T: $R^3 \to$ □R^2 / T(x, y, z) = (0,0)

j)T: $M^{2x2} \to$□R / T ($\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$) = a+b – c – d + 1

Ejercicio 2: Sea la transformación lineal T: $P^2 \to$ □P^3 / T (p(x)) = x.p(x).

a) ¿Cuáles de los siguientes polinomios pertenecen al núcleo de T?

i) x^2 ii) 0 iii) 1 + x

b) ¿Cuáles de los siguientes polinomios pertenecen a la imagen de T?

i) x + x^2 ii) 1 + x iii) 2 – x^3

Ejercicio 3: Sea T : $R^2 \to$ □R^2 la transformación lineal definida como T(a,b) = (a,0).

a) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenece al núcleo de '?

i) (0,2) ii)(2,2) iii)(0,-1)

b) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenece a la imagen de '?

i) (3,0) ii) (3,2) iii) (0,1)

Ejercicio 4: Para las siguientes funciones de R3 en R3, halle su expresión analítica, pruebe que son transformaciones lineales y encuentre en cada caso la imagen del segmento determinado por los puntos P = (0,0,0) y Q = (2,1,3).

a) Proyección sobre el plano XY

b) Simetría respecto del origen.
c) Simetría respecto del plano XZ.
d) Simetría respecto del eje Z.

Ejercicio 5: Defina la transformación lineal T en cada uno de los siguientes casos
i) $T: R^3 \to$ □R^2 / T(1,0,0) = (1,0), T(0,1,0) = (0,1) y T(0,0,1) = (1,-1)
ii) $T: P^2 \to$ □P^2 / $T(1) = 1 + x$, $T(x) = 3 - x^2$, $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$
iii) : $P^1 \to$ □P^1 / T(t+1) = t - 1 , T(t - 1) = 2t +1

Ejercicio 6: . Sea la transformación lineal $T: R^3 \to$ □R^2 definida por:
T(x, y, z) = (x + y , x – z)
a) Encuentre la matriz asociada a T respecto de las bases
B = { (1,2,0),(-1,0,1),(1,1,1) } B' = { (1,3),(0,2)}
b) Determine la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas de ambos espacios.
c) determine la matriz asociada a dicha transformación para B y la canónica de codominio
d) determine la matriz asociada a dicha transformación para la canónica de dominio y B´

Ejercicio 7: En c/u de los siguientes casos determine la matriz asociada a la transformación lineal respecto
de las bases dadas.
a) $T: R^2 \to$ □R^2 / T(u) = Proyvu siendo v = (2,-4) , B la base canónica de R^2
b) $T: P^3 \to$ □P^2 / $T(p(x)) = d\, p(x)\_/dx$, B ={ 1, x, x^2, x^3 } B'= { 1, 1 + x, 1 + x + x^2 }

Ejercicio 8: La transformación lineal f: R3 $\to$ □R2 está caracterizada por la matriz A respecto de la base canónica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Determine el núcleo de f, la imagen y sus dimensiones.
b) Determine si f es inyectiva y/o sobreyectiva

Ejercicio 9: La transformación lineal f: $R^3 \to$ □R^3 está caracterizada por la matriz A respecto de la base canónica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine el núcleo de f, la imagen y sus dimensiones.
b) Determine si f es inyectiva y/o sobreyectiva.
c) Determine T(1,2,3) y T(0,1,1).

Ejercicio 10: En caso de compatibilidad, obtenga el conjunto solución del sistema en términos de una solución particular y del espacio solución del sistema homogéneo asociado.

a)
$x + y + 2z = -1$
$x + 2y - 3z + 2w = 2$
$2x - y + 2z = -4$

b)
$2x + 5y - 8z + 6w = 5$
$4x + y + 6z = -6$
$3x + 4y - 5z + 2w = 4$

c)
$x + y + z = 1$
$y + 2z = 0$
$2x + 3y + z = 1$

Ejercicio 11: Halle un sistema AX = B que admita a los vectores (1, 2, 0) y (0, -1, 1) como base del espacio solución de AX = 0 y al vector (1, 3, 1) como solución particular.

Ejercicio 12: Sea A de □R^{5x4} con rango 3
a) ¿Cuál es la dimensión del espacio solución del sistema AX = 0?
b) ¿AX = B es compatible para todo B de R^{5x1}? Justifique.

Ejercicio 13: Sea A de R^{4x6} tal que el conjunto solución del sistema AX = 0 tiene dimensión 2.
a) ¿Cuál es el rango de A?
b) ¿AX = B es compatible □□B de R^{4x1}? Justifique

Ejercicio 14: Sea A de □R^{4x4} con rango 4 ¿El sistema AX =B es compatible determinado para todo B de R^{4x1}? Fundamente su respuesta.

Ejercicio 15: En cada uno de los siguientes casos determine la imagen del triángulo con vértices en los puntos (0,0) ; (1,1) y (1,0) describa el comportamiento de la transformación y concluya.
a) T: $R^2 \to R^2$ / T(x, y) = (2x,2y)
b) Sx: $R^2 \to R^2$ / Sx (x, y) = (x, □y)
c) R_{30}□: $R^2 \to R^2$ / R_{30}□□(x, y) = (x cos30°□- y sen30°, x sen30°□+ y cos30°)
d) T: $R^2 \to R^2$ / T(x, y) = (y, x)
e) T: $R^2 \to$ □R^2 / T(x, y) = (| x |, 0)
f) T: $R^2 \to$ □R^2 / T(x, y) = (0, y)