Trabajo Práctico Nº 2

DETERMINANTES.

Ejercicio 1:

Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuántos productos elementales tiene?
b) Escriba tres de sus productos elementales, indicando el número de inversiones y su signo.

Ejercicio 2:

Justificar las igualdades

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 2 & 20 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 20 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

d) $-3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -12 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Ejercicio 3:

Evaluar los siguientes determinantes utilizando propiedades. Justificar.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 14 & 17 \\ 1 & 20 & 34 & -45 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$

Ejercicio 4:

Suponiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$; halle el valor de: (justifique su respuesta)

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$

Ejercicio 5:

Resolver unificando determinantes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Ejercicio 6:

Encontrar los valores de k para que la matriz no sea inversible:

$$\begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 1-k \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7:

Dada la matriz A= $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, encontrar los menores y los cofactores correspondientes a los elementos a_{21} y a_{33}. Sacar conclusiones.

Ejercicio 8:

Evaluar por cofactores los determinantes de las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ y verificar calculando por Sarrus.

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9:

Evaluar los determinantes de las matrices del ejercicio 8 utilizando la regla de Chío.

Ejercicio 10:

Encontrar las inversas de las siguientes matrices, si es posible, utilizando determinantes. Verificar.

a) A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) B= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ c) C= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 20 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

Ejercicio 11:

Demostrar:

a) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

b) Si k es un número y A una matriz de orden $n \times n$, entonces $\det(kA) = k^n \det(A)$.

c) Si A es una matriz inversible de orden $n \times n$, entonces $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$ y $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

d) Si A es una matriz antisimétrica de orden $n \times n$, entonces $\det(A) = (-1)^n \det(A)$.

e) Si A es una matriz ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.

f) Si A y B son matrices de orden $n \times n$ y $B = P^{-1}AP$, entonces $\det(A) = \det(B)$.

g) Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces $\det(Adj\ A) = \det(A)]^{n-1}$.

Ejercicio 12:

Completar para que la expresión resulte verdadera

a) sabiendo que A y B son matrices de orden $n \times n$; $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$

i) $\det\left((AB)^t\right) =$

ii) $\det\left(\left(\dfrac{1}{k}A\right)^{-1}\right) =$

iii) $\det\left(\left(A^t\right)^t\right) =$

iv) $\det\left((AB)^{-1}\right) =$

b) sabiendo que A y B son matrices de orden 2×2; $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -1$

i) $\det\left(\dfrac{1}{2}A^t\right) =$

ii) $\det\left((8A)^{-1}\right) =$

iii) $\det\left(7A^2\right) =$

iv) $\det\left((2A)^2\right)=$

v) $\det\left((3A)^{-2}\right)=$

vi) $\det(4A^{-3})=$

vii) $\det\left((AB)^{-1}\right)=$

viii) $\det\left((4AB)^{-1}\right)=$

ix) $\det\left((3AB)^{-2}\right)=$

x) $\det\left((\frac{1}{2}A)^{-2}(5B)^{-1}\right)=$

Ejercicio 13:

Escribir V ó F. Si es verdadero, demostrarlo. Si es falso, dar un contraejemplo.

a) Si el determinante de una matriz es 2, la matriz es de orden 2×2. ( )
b) Si el determinante de una matriz es 0, la matriz tiene dos filas iguales. ( )
c) Si una matriz es simétrica, se verifica que $\det(A)=0$. ( )
d) Si una matriz es de orden 3×3, la suma de los productos de los elementos de una fila por cada uno de sus cofactores da como resultado su determinante. ( )
e) El producto elemental formado por el producto de los elementos de la diagonal principal es positivo. ( )
f) La función determinante es inyectiva. ( )
g) Si dos matrices son equivalentes, tienen el mismo determinante. ( )
h) det(A+B)=det(A)+det(B).( )

Ejercicio 14:

Marque con una cruz la opción correcta

a) Sean A y B matrices de orden $n\times n$; $\det(A)=-3$ y $\det(B)=2$. Entonces:

i) $\det\left((A+B)^t\right)=-1$ ( ) ii) $A+B=C$ es inversible ( ) iii) $\det\left((AB)^{-1}\right)=-6$

iv) $\det(2A)=-3.2^n$ ( ) v) nrac ( )

b) Si $3A^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, entonces

i) $\det(A^{-1})=6$ ( ) ii) $\det(A^{-1})=\frac{1}{6}$ ( ) iii) $\det(A^{-1})=4{,}5$ ( )

iv) $\det(A^{-1})=\frac{2}{9}$ ( ) v) nrac