TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

Determinantes

Ejercicio 1: a) Dada la matriz M, escriba tres productos elementales, encuentre el número de inversiones de cada uno de ellos e indique sus signos, Determine el número total de productos elementales distintos que se puede obtener.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

b) Encuentre los mismos productos elementales determinados en la parte a) para la matriz

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -5 & 7 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2: Evalúe por observación los siguientes determinantes. Justifique.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & -8 & 9 & -4 \\ -3 & 6 & -15 & -9 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -9 \end{vmatrix} =$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 8 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$

Ejercicio 3: Siendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$; encuentre: (justifique su respuesta)

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ -2a & -2b & -2c \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d-3g & e-3h & f-3i \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} =$

Ejercicio 4: Dadas las siguientes matrices, determine el valor de X si es posible. En caso de no serlo, justifique.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 6\\ -1 & 7\end{bmatrix}$

i) $X+|A|=\left|B^T\right|-|A+B|\,.\,|C.D|$

ii) $\left|A^T-C\right|-X=|A.B|$

Ejercicio 5: Resolver unificando determinantes:

$$\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -5\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}+\left\|\begin{matrix}5 & -2 & 1\\ 1 & -6 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{matrix}\right\|=$$

Ejercicio 6: Determine si las siguientes matrices son inversibles utilizando determinantes.

a) $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ -9 & 6 & 3\\ -1 & 5 & 8\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 4\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 9\\ 5 & 0 & 3\\ -9 & 0 & 2\end{bmatrix}$

Ejercicio 7: Encontrar los valores de k para que la matriz no sea inversible: $\begin{bmatrix}k & -3\\ 4 & 1-k\end{bmatrix}$

Ejercicio 8: Dada la matriz A=$\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & -2 & 6\end{bmatrix}$, encontrar los menores y los cofactores correspondientes a los elementos a_{21} y a_{33}. Sacar conclusiones.

Ejercicio 9: Evaluar por cofactores y por Chío los determinantes de las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 6\end{bmatrix}$ y verificar calculando por Sarrus.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10: Encontrar las inversas de las siguientes matrices, si es posible, utilizando determinantes. Verificar.

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 11: Demostrar:

a) Si k es un número y A una matriz de orden $n \times n$, entonces $\det(kA) = k^n \det(A)$.

b) Si A es una matriz antisimétrica de orden $n \times n$, entonces $\det(A) = (-1)^n \det(A)$.

c) Si A es una matriz ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.

d) Si A y B son matrices de orden $n \times n$ y $B = P^{-1}AP$, entonces $\det(A) = \det(B)$.

e) Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces $\det(Adj\ A) = \det(A)]^{n-1}$.

Ejercicio 12:

a) Sabiendo que A y B son matrices de orden 3×3; A es simétrica; $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$, completar en función de $\det(A)$ y $\det(B)$ para que la expresión resulte verdadera.

i) $\det(2A - A^T) =$

ii) $\det(3A.B^{-1}) =$

iii) $\det(A - 2B) =$

iv) $\det(2A^{-2}) =$

v) $\det(3A^2.2B^{-3}) =$

b) Sabiendo que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -5$, encontrar, si es posible, el valor de las expresiones del punto a).

Ejercicio 13: Escribir V ó F. Si es verdadero, justificarlo (con una demostración en caso posible). Si es falso, dar un contraejemplo.

a) Si el determinante de una matriz es 3, la matriz es de orden 3×3. ( )

b) Si el determinante de una matriz es 0, la matriz tiene dos filas proporcionales. ( )

c) Si una matriz es antisimétrica, se verifica que $\det(A) = 0$. ( )

d) Si una matriz es de orden 2×2, la suma de los productos de los elementos de una fila por cada uno de sus cofactores da como resultado su determinante. ( )

Si esta proposición es verdadera, ¿se puede generalizar para una matriz de $n \times n$?

e) En toda matriz cuadrada, el producto elemental formado por el producto de los elementos de la diagonal principal es negativo. ( )

f) La función determinante es inyectiva. ( )

g) La función determinante es suryectiva. ( )

h) Si dos matrices tienen el mismo determinante, son iguales. ( )

i) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ ( )

j) $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ ( )

k) $\det(A+B)^2 = (\det A)^2 + 2\det(AB) + (\det B)^2$ ( )

l) $\det(-A) = -\det(A)$ ( )

m) $\det(A.A^T) = \det(A^2)$

Ejercicio 14: Marque con una cruz la opción correcta

a) Si $2A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, entonces el valor de $\det(A^{-1})$ es:

i) $-\frac{2}{5}$ ( ) ii) $\frac{5}{4}$ ( ) iii) $\frac{4}{5}$ ( ) iv) $-\frac{4}{5}$ ( ) v) nrac

b) Sean A y B matrices de orden 3×3; $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -1$. Entonces:

i) $\det((A-B)) = 3$ ( ) ii) $A+B=C$ es inversible ( ) iii) $\det\left((AB)^{-1}\right) = \frac{1}{2}$

iv) $\det(2AB) = -16$ ( ) v) nrac ( )