TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejercicio 1: Resuelva, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, empleando:

i) el método matricial
ii) el método de Cramer

Interprete geométricamente cada una de las situaciones y saque conclusiones.

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 6x-9y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 6x-8y=5 \end{cases}$

Ejercicio 2: Marque con una cruz la opción correcta:

a) El sistema $\begin{cases} 2x-y=a \\ 2x-y=b \end{cases}$ tiene solución única si:

i) $a=b$ ( ) ii) $a\neq b$ ( ) iii) nunca ( ) iv) siempre ( ) v) nrac ( )

b) El sistema $\begin{cases} 3x-y=a \\ 2x-4y=d \end{cases}$ es

i) compatible indeterminado ( ) ii) compatible determinado ( ) iii) incompatible ( )

c) El sistema $\begin{cases} x-y=a \\ x-y=b \end{cases}$ no tiene solución si:

i) $a\neq b$ ( ) ii) $a=b$ ( ) iii) nrac ( )

d) El sistema $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 6x-2y=8 \end{cases}$ es incompatible:

i) a veces ( ) ii) nunca ( ) iii) siempre ( )

e) El sistema $\begin{cases} x-y+2z=a \\ x-y+2z=b \end{cases}$ no tiene solución si:

i) $a\neq b$ ( ) ii) $a=b$ ( ) iii) nrac ( )

e) El sistema $\begin{cases} x-y+2z=a \\ x-y+2z=b \end{cases}$ tiene infinitas solución si:

i) $a\neq b$ ( ) ii) $a=b$ ( ) iii) nrac ( )

f) El sistema $\begin{cases} x - y + 2z = a \\ x - y + 2z = b \end{cases}$ tiene solución única si:

i) $a \neq b$ ( ) ii) $a = b$ ( ) iii) nrac ( )

Ejercicio 3: Determinar en cada caso si los dos sistemas de ecuaciones dados son equivalentes y analice los resultados.

a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

Ejercicio 4: Dado el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

a) Resolverlo por el método de eliminación de Gauss.
b) Sabiendo que cada una de las ecuaciones del sistema representa un plano, ¿qué significa geométricamente la solución del mismo?
c) ¿Qué relación deberá existir entre los planos de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas para que el sistema sea incompatible?
d) ¿Y para que sea compatible indeterminado?

Ejercicio 5: Resuelva los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss. Analice aplicando Rouché-Frobenius.

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ -2x + 5y + 2z = 2 \\ -7x + 7y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y-4z=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-3y+5z-w=4 \\ 2x-y+z-2w=2 \end{cases}$

En d) resulta un sistema compatible indeterminado. Dar dos conjuntos solución distintos e identificar las variables principales o libres y las variables secundarias o ligadas.

Ejercicio 6: Resolver los ejercicios del punto 4 utilizando el método de Gauss-Jordan.

Ejercicio 7: Resolver los sistemas homogéneos asociados a los sistemas del punto 4.

Ejercicio 8: Escriba un sistema de ecuaciones lineal homogéneo de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga:
a) una solución b) infinitas soluciones

Ejercicio 9: ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que el sistema sea:
a) compatible determinado b) compatible indeterminado c) incompatible?

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_5=a \\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5=b \\ 5x_3+10x_4=c \end{cases}$$

Ejercicio 10: Calcular el valor de k para que los planos dados se corten en una recta. Analizar primero si el sistema debe ser compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=11 \end{cases}$$

Ejercicio 11: ¿Cómo se puede interpretar geométricamente un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible determinado?

Ejercicio 12:Plantear y resolver los siguientes problemas si es posible

a) Hallar los números cuya suma es -2 y la suma del suplo del primero más el segundo es -1.
b) Hallar los números sabiendo que su diferencia es 3 y que la diferencia entre sus duplos es 6.
c) Hallar los números que verifican que el doble del primero más el otro es 2 y que la suma del primero más la mitad del segundo es 3.

Ejercicio 13: Marque con una cruz él o los resultados correctos

Dado el siguiente SEL $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x - 4y = 3 \\ 6x - 2y = 7 \end{cases}$

i) tiene infinitas soluciones
ii) tiene única solución
iii) no tiene solución
iv) el rango de la matriz del sistema es 2

Ejercicio 14: Indique si las siguientes proposiciones son (V) o (F). Si son verdaderas, argumente su veracidad (demuestre de ser posible). Si son falsas, de un contraejemplo.

a) Si A es una matriz cuadrada y el sistema $AX = 0$ es compatible determinado, su solución es igual a la del sistema $A^T X = 0$.
b) Si A es una matriz cuadrada y el sistema $AX = B$ es compatible determinado, su solución es igual a la del sistema $A^T X = B$.
Si la proposición es falsa, ¿qué condición debería cumplir A para que fuera verdadera?
c) Si un sistema tiene más incógnitas que ecuaciones (tiene variables libres), el sistema es incompatible.
d) Dado un sistema de ecuaciones lineales que tiene una solución única es posible siempre añadir otra ecuación para que el sistema sea incompatible.
e) Un SELH con matriz de coeficientes cuadrada es siempre compatible determinado.
f) Si en $AX = B$, X es solución, entonces kX es solución, k es un número real.
g) Si en $AX = 0$, X es solución, entonces kX es solución, k es un número real.
h) Si en $AX = 0$, X_1 y X_2 son soluciones, entonces $X_1 + X_2$ es solución.
i) Si A y C son dos matrices equivalentes los sistemas $AX = B$ y $CX = B$ tienen el mismo conjunto solución.
j) Si A es equivalente por filas a la identidad,, entonces el sistema $AX = B$ es compatible determinado.
k) Si el sistema $AX = B$ es compatible determinado, entonces $\det(A) \neq 0$.
l) Si el sistema $AX = B$ es compatible determinado, entonces la matriz A es inversible.
Si la proposición anterior es falsa, ¿qué condición debería cumplir A para que fuera verdadera?
m) Si una matriz A es inversible, entonces el sistema $AX = B$ es compatible determinado.
n) Un sistema de ecuaciones lineales rectangular nunca puede ser compatible determinado.