TRABAJO PRÁCTICO Nº 5

Espacios Vectoriales

Ejercicio 1: Sea el conjunto IR^2, en el cual se han definido las siguientes leyes:

Adición	$(x ; y) + (x'; y') = (x + x'+1 ; y +y'+1)$
Multiplicación por un escalar	$k . (x ; y) = (kx ; ky)$

a) Sabiendo que el conjunto IR^2 respecto de la adición así definida tiene estructura de grupo conmutativo, es decir verifica los axiomas 1 al 5, determine: el elemento neutro y el elemento opuesto respecto de esta primer ley

b) Muestre que respecto de la segunda ley, no se verifican los axiomas referidos a las propiedades distributivas de la multiplicación por un escalar respecto de la adición en IR^2 y respecto de la adición en IR, es decir los axiomas 7 y 8.

Ejercicio 2: Sea el conjunto V, en el cual se ha definido la adición usual y la multiplicación externa indicada. Determine si V con las leyes definidas tiene estructura de espacio vectorial real, teniendo en cuenta que el conjunto V verifica todos los axiomas respecto de la primera ley, es decir los axiomas 1 al 5

a) $V = IR^3$ Multiplicación por un escalar $k . (x ; y ; z) = (kx ; ky ; 1)$

b) $V = M_2$ Multiplicación por un escalar $k . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$, siendo $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

PROPIEDADES

Ejercicio 3: Demuestre las siguientes propiedades de los espacios vectoriales:

a) En todo espacio vectorial real, el vector nulo, (elemento neutro respecto de la primera ley) es único.

b) Sean u, v y w vectores de V, si u + v = u + w, entonces v = w.

Ejercicio 4: Sea V un espacio vectorial real, respecto de la adición y la multiplicación por un escalar usual. Determine si los siguientes subconjuntos de V son subespacios vectoriales de V

a) $V = IR^2$ $S = \{(x ; y) / x + y = 1 \}$

b) $V = M_2$ $\qquad S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE

Ejercicio 5: Dados los siguientes espacios vectoriales reales V respecto de la adición y la multiplicación por un escalar usuales. Determine si los siguientes subconjuntos de V son o no subespacios vectoriales de V

a) V = IR^3 $\qquad$ S = {(x ; y ; z) / x + z = 1 }

b) V = IR^4 $\qquad S = \left\{ \left(x, y, z, t \right) \in IR^4 / x - y = 0 \wedge z + t = 0 \right\}$

c) $V = P_3$ $\qquad S = \left\{ p(x) \in P_3 / p(x) = a.x^3 + b \right\}$

d) $V = M_2$ $\qquad S = \left\{ A \in M_2 / A.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.A \right\}$

Ejercicio 6: Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} ;\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Demuestre que el conjunto W es un subespacio de IR^3.

W = { B $\in$ IR^3 / A . X = B es compatible }

COMBINACIÓN LINEAL

Ejercicio 7: Encuentre una combinación lineal de los vectores u y v que exprese a w:

a) u = (1; 2; –3) $\qquad$ v = (–1; –3; 2) $\qquad$ y $\qquad$ w = (3; 7; –8)

b) u = 3 x – 1 $\qquad$ v = – ½ x + 1 $\qquad$ y $\qquad$ w = x + 3

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Ejercicio 8: Determine cuales de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes, en caso de no serlo, exprese uno de ellos como combinación lineal de los otros.

a) V = IR^3 $\qquad$ S = {(0, 0, 1) ; (0, 1, 0) ; (1, 1, 1)}

S = {(1, 0, a) ; (a, 1, 0) ; (a, 0, 1)}   con a $\in$ IR

b) $V = P_2$ S = { $1-x^2$; $1+x$; x^2-x ; x^2+x }

S = { $1+x^2$; $2+x^2$ }

Ejercicio 9: Determine para qué valores de a, el conjunto S es linealmente dependiente.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicio 10: Dado el siguiente conjunto:

$$S = \{ (0, 1, k+1) ; (k, 0, 1) ; (0, k-1, 0) \}$$

Determine el valor de k para que el conjunto S sea:

a) linealmente dependiente
b) linealmente independiente

CONJUNTO GENERADOR, BASE Y DIMENSIÓN

Ejercicio 11: Determine el subespacio de V generado por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores

a) V = P_2 S = { 1 ; x –2 ; x^2-2x+1 }

b) V = P_2 S = { x +1 ; x^2+1 }

c) $V = M_2$ S = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Ejercicio 12: Considere el conjunto solución de los siguientes sistemas homogéneos

$$a)\begin{cases} x+2y-3t+w=0 \\ x+2y+z-4t-w=0 \\ y+z-2t-w=0 \\ x+z-2t-3w=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+2z=0 \\ 3x+3y+z=0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 3x+3z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$$

Determine para cada uno de ellos:

a) un sistema generador
b) una base
c) y la dimensión de dichos conjuntos.

Ejercicio 13: Halle una base y la dimensión del subespacio vectorial M definido mediante la siguiente forma:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a+b+3c & 2a-b \\ -a-c & a+2b+5c \end{bmatrix} / a, b, c \in IR \right\}$$

Ejercicio 14: Determine el conjunto de valores que debe tomar a para que B sea base de M_2

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & a \end{bmatrix} \right\}$$

COORDENADAS DE UN VECTOR

Ejercicio 15: Sea B = {(2, 1, 0) ; (1, 2, 1) ; (0, 1, 2)} una base de IR^3. Halle las coordenadas del vector (-1, 1, 3) respecto de B.

Ejercicio 16: Sean B = {(1, 0, -1) ; (-1, 1, 0) ; (1, 1, 1)} una base ordenada de IR^3 y sea $u_B = (6,-3,2)$ un vector de IR^3. Encuentre el vector u en la base canónica

Ejercicio 17: Sean B = {(0, 1, 0) ; (3, 0, 1) ; (0, 1, 2)} y B' = {(3, 1, 0) ; (-2, 1, 0) ; (1, 0, 1)} dos bases de IR^3. Halle la matriz de cambio de base de B a B'.

Ejercicio 18: Sean B y B' = {(1, 0, 1) ; (-1, 1, 0) ; (0, 0, 1)} dos bases ordenadas de IR^3 y sea $T_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de cambio de la base B a la B'

a) Encuentre la base B'.

b) Para u = (1, 2, 3), determine u_B

Ejercicio 19: Sea B = { 1 , x , x^2 + 1 } un conjunto de polinomios de P_2

a) Demuestre que B es una base de P_2

b) Si $[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces determine la base B'

c) Determine las coordenadas de p(x) = 1+ 2 x – 4 x^2 en la base B

Ejercicio 20: Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) S = {(1, 0, -1) (1, 1, 1)} genera un plano en IR^3.

b) El conjunto {(0,0)} es un conjunto linealmente independiente.

c) El conjunto M = $\{A \in M_2 \ / \ \det(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial de M_2.

d) El conjunto solución del SEL A.X = 0, con A de orden 2x4 es un subespacio de IR^2.

e) El conjunto generado por las filas de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ es un subespacio de dim 2.

f) El conjunto generado por las columnas de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ es un subespacio de IR^3.