Trabajo práctico N° 5

ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicio 1:

Determine si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas en cada caso son o no espacios vectoriales. Para aquellos que no lo sean, diga qué axiomas no se cumplen:

a) $V = R^2$ con las operaciones:

$$(x, y) + (x', y') = (y + y', x + x') \quad y$$
$$k (x, y) = (kx ; ky)$$

b) $V = R^3$ con las operaciones:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \quad y$$
$$k (x, y, z) = (2kx; 2ky, 2kz)$$

c) $V = \{ A \in R^{2x2} / A$ es matriz diagonal $\}$, con las operaciones entre matrices: suma y producto por un escalar.

Ejercicio 2:

Demuestre que en un conjunto V que tiene estructura de espacio vectorial real, se cumple:

a) $o . v = 0$, siendo o el elemento neutro de R, 0 es el elemento neutro de la adición usual en V.

b) $- (-v) = v$, para todo v de V

c) Para todo $v \in V$ existe un único $-v$ tal que: $v + (-v) = 0$

Ejercicio 3:

Sea V un espacio vectorial en el cual se han definido la suma y el producto por un escalar usual y sea S un subconjunto del mismo. Determine utilizando la condición necesaria y suficiente, si S es un subespacio vectorial de V

a) $V = R^{2x2}$ $\qquad S = \{ A \in R^{2x2} / \det (A) =0 \}$

b) $V = R^{2x2}$ $\qquad S = \{ A \in R^{2x2} / A = A^T \}$

c) $V = R^2$ $\qquad S = \{ (x, y) / x \geq 0 \}$

d) $V = P_4$ $\qquad S = \{ a x^4 + b x^2 + c \in P_4$, a, b y c son reales $\}$

Ejercicio 4:

Dado el sistema de ecuaciones lineales A.X = B, determine el valor de B para que el conjunto solución de este sistema sea un subespacio vectorial de R^n.

Ejercicio 5:

Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes. En caso de no serlo, exprese uno de los vectores como combinación lineal de los otros.

a) A = { (0, 2, -1) , (1, -3, 4) , (1,-1, 1) } en R^3

b) B = { x, x^2+1, x^3+x, 2 } en P_3

c) C = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ en R^{2x2}

Ejercicio 6:

Muestre que para todo par (x,y), el conjunto de vectores { (1, 0) , (0, 1) , (x, y) }, es linealmente dependiente.

Ejercicio 7:

Determine si los siguientes conjuntos de vectores generan el espacio vectorial V, en caso negativo, encuentre el subespacio generado por ellos.

a) V = R^2 i) { (2, 2) ; (- 1, 2) ; (1, 0) }

ii) { (1, 2) ; (2, 4) ; (4, 8) , (-2, - 4) }

b) V = R^{2x2} i) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

c) V = P_2 i) { x^2 + x ; x ; x^2 }

ii) { x + x^2 ; 1 - x + 2 x^2 ; x^2 + 2 ; x + 2 }

Ejercicio 8:

Demuestre las siguientes propiedades:

a) Un conjunto formado por un único vector v no nulo de un espacio vectorial V es linealmente independiente.

b) Un conjunto formado por dos vectores paralelos es linealmente dependiente.

c) Un conjunto formado por n vectores L.I. de R^n es una base de R^n.

d) Las coordenadas de un vector de un espacio vectorial V respecto de una base son únicas.

Ejercicio 9:

Muestre cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son base de los espacios vectoriales que se indican.

a) V = P_3 i) { 1 , x^2 , 1 + x , x^3 + x^2 }

ii) { 1, x + x^2 , x^3,1 + x }

b) V = R^{2x2} i) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ejercicio 10:

Determine una base y la dimensión del subconjunto S del espacio vectorial V dado en cada caso.

a) V = R^3 S es el subespacio de R^3 generado por: { (0,1,1), (1,1,1) }

b) V = P_2 S = { ax^2+bx+c / a+b+c = 0 }

c) V = R^4 S es el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x - 2y + z - w = 0 \\ y + 2w = 0 \end{cases}$

d) V = R^{2x2} S = { A $\in$ R^{2x2} / A = -A^T}

Ejercicio 11:

Muestre que los conjuntos de vectores

A = { (0, 2, -1) , (1, -3, 4) , (1,-1, 3) }
B = { (1, 1, -2) , (2, -4, 7) }

generan el mismo subespacio vectorial. Interprete geométricamente.
Encuentre una base y la dimensión para este subespacio.

Ejercicio 12:

Complete las siguientes proposiciones de manera que resulte un enunciado verdadero:

a) Un subconjunto de vectores de R^2, que lo genere pero que no sea base ……………………………………………………………………………………………

d) un subconjunto de vectores de P_2 L.I. pero que no sea base ……………………………………………………………………………………………

e) Una base de R^3 que contenga los vectores u = (1,1,1) y v = (0,1,1) ……………………………………………………………………………………………

f) El subespacio de R^3, S = { (x,y,z) $\in$ R^3 /x = y = z } tiene dimensión ……………………………………………………………………………………………

g) Un ejemplo de un subespacio de R^{2x3} de dimensión 2 ……………………………………………………………………………………………

f) Las coordenadas de $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

……………………………………………………………………………………………………