TRABAJO PRÁCTICO N° 6

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Ejercicio 1: Pruebe que el producto escalar de vectores en IR^3 es un producto interior.

Ejercicio 2: a) Demuestre que el espacio vectorial V = IR^2 es un espacio con producto interior para el producto definido del siguiente modo: $\langle u,v\rangle = 4u_1v_1 + u_2v_2$.

b) Sean $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$. Completar la tabla:

	Producto escalar en IR^2	$\langle u,v\rangle = 4u_1v_1 + u_2v_2$
$\langle u,v\rangle$		
$\|u\|$		
$d(u,v)$		
Ang(u,v)		

Ejercicio 3: a) Sea A de nxn una matriz simétrica y definida positiva. Sean u y v vectores de IR^n. Demuestre que $\langle u,v\rangle = u^T \cdot A \cdot v$ define un producto interior.

b) Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, y sean $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Completar la tabla:

	Producto escalar en IR^2	$\langle u,v\rangle = u^T \cdot A \cdot v$
$\langle u,v\rangle$		
$\|u\|$		
$d(u,v)$		
Ang(u,v)		

Ejercicio 4: Determine en cada caso cuál de los cuatro axiomas de producto interno no se cumple. Proporcione un ejemplo específico en cada caso.

i. Sean $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ en IR^2

a) $\langle u,v\rangle = u_1 \cdot v_1$

b) $\langle u,v\rangle = u_1 \cdot v_1 - u_2 \cdot v_2$

c) $\langle u,v\rangle = u_1 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_1$

ii. En M_{2x2},

$\langle A,B\rangle = \det(A \cdot B)$

Ejercicio 5: Encuentre el subespacio de IR^3 que describa a todos los vectores ortogonales al vector (-1,3,2), considerando el producto interior euclideano. Verifique que estos son los puntos de una recta que pasa por el origen.

Ejercicio 6: Considere el producto interior euclideano en IR^2 y demuestre:

a) El teorema de Pitágoras.
b) El teorema del coseno.
c) Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Ejercicio 7: Suponga que u, v y w son son vectores de un espacio con producto interno tales que $\langle u,v\rangle = 1$; $\langle u,w\rangle = 5$; $\langle v,w\rangle = 0$; $\|u\| = 1$; $\|v\| = \sqrt{3}$; $\|w\| = 2$

Evalúe las siguientes expresiones:

a) $\langle u+w, v-w\rangle$
b) $\|u+v\|$
c) $\|2u-3v+w\|$

Ejercicio 8: Verifique la desigualdad de Schwarz y la propiedad triangular entre los vectores (-3,2) y (2,1),

a) con el producto interior euclideano definido en IR^2

b) con el producto interior definido por $\langle u,v\rangle = u_1 \cdot v_1 + 2u_2 \cdot v_2$

Ejercicio 9: Sea el espacio vectorial V, con producto interior euclideano , complete el siguiente cuadro:

V	Conjunto	Normalizado	Ortogonal	Ortonormal	Base de V	Base ortonormal de V
R^2	{(1,1),(0,0)}					
R^2	{(1,2),(_,_)}		X		X	
	{(2,3,6),(3,-6,2),(6,2,-3)}					
R^3		X	X	X		
R^4		X	X	X	X	X
	{(1,0,0,0),(0,0,0,-1)}					

Ejercicio 10: Dados los vectores $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, complete con un tercer vector para obtener una base ortonormal de IR^3.

Ejercicio 11: Determine si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y justifique la respuesta.

a) Sea $A = \{(-1,1,0), (0,0,-1)\}$ es un conjunto ortogonal de IR^3.

b) Sea $A = \{(1,1,0), (0,0,-1)\}$ es una base ortonormal de IR^3.

c) Sea IR^3 con producto interior euclideano, para $k = \frac{1}{2}$, los vectores u = (2, 1, 3) y v = (1, 7, k) son ortogonales.

d) El vector v = $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ es un versor o vector unitario.

e) Para todo vector v de V, k de R , $\|kv\| = |k| \cdot \|v\|$.