Trabajo Práctico Nº 7

TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejercicio 1:

Determine si las siguientes son TL

a) $T: IR^3 \to IR^3 definido T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

b) $T\ : IR^3 \to IR^3 definido T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ z \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $T: IR^2 \to IR^3 definido T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y \\ x \\ y \end{pmatrix}$

d) $T: IR^2 \to IR\ definido T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x-y$

e) $T: IR^2 \to IR^{2x2} definido T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$

Ejercicio 2:

Para las funciones del ejercicio 1 que sean transformaciones lineales

a) Obtener núcleo e imagen de T.

b) Obtener una base para el núcleo.

c) Obtener una base para la imagen.

d) Verificar el teorema de la dimensión.

e) Clasificar las transformaciones lineales.

Ejercicio 3:

Sea $T: IR^2 \to IR^3$ una transformación lineal tal que T(1,0) = (1,2,3) y T(0,1) = (-4,0,5)

a) Determine $T(2,4)$.

b) Encuentre $T(x,y)$ para (x,y) de IR^2.

c) Verifique los resultados de (a) usando (b).

Ejercicio 4:

Encuentre la ley de la transformación tal que T (0, 3, 0) = (1 , 3) ;
T (1, 0, 0) = (1, 4) y T (0, 0, 7) = (1, 1). Halle la imagen de T (1, 3, 5).

Ejercicio 5:

Para cada una de las transformaciones lineales, encontrar la matriz asociada a las bases canónicas y dar su orden.

$T_1 : IR^3 \rightarrow IR^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

$T_2 : IR^2 \rightarrow IR^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$$

$T_3 : P_3 \rightarrow IR$

$$T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = a_2$$

$T_4 : IR \rightarrow IR^2$

$$T_4(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6:

Sea $T : IR^2 \rightarrow IR^3$ la transformación lineal definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+4y \end{bmatrix}$

y sean $B = \{(0,1),(1,0)\}$ y $B' = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$, las bases de IR^2 y IR^3. Halle la matriz A de T con respecto a las bases B y B'.

Ejercicio 7:

a) En la siguiente tabla, complete el cuadro vacío según corresponda.

Transformación lineal	Matriz asociada	Gráfico
$T : IR^2 \rightarrow IR^2$ $T(x,y) = (y,x)$		*.Considere el triángulo con vértices en (2,1), (1,0) y (2,0).*
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	*Considere el cuadrado unitario como figura base.*

Expansión a lo largo del eje y, con k = 2		*Considere el cuadrado unitario como figura base.*

Ejercicio 8:

Sea $T : IR^3 \to IR^2$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ y - 3z \end{bmatrix}$$

y sean B y B' las bases : $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(a) Determine la matriz A de T con respecto a las bases canónicas que correspondan.

(b) Calcule la matriz A' de T con respecto a las bases B y B'.

(c) Halle $T(2,7,-1)$.

Ejercicio 9:

Considere la transformación lineal

$$T\ : IR^3 \to IR^2 definido T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2z \end{pmatrix}$$

a) Determine la matriz A asociada a la transformación lineal respecto a la base canónica.

b) Encuentre la imagen del vector u = (2, 3, 5).

c) Encuentre la matriz A' de la transformación, con respecto a las bases:

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ de IR^3 y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ de IR^2

d) Utilice la matriz A' para encontrar la imagen del vector u = (2, 3, 5).

e) i. Determine la matriz de cambio de base P, de B' a la canónica de IR^2.

ii. Utilice esta matriz para obtener las coordenadas del vector $[T(u)]_{B'}$, en la canónica de IR^2. Verifique el resultado obtenido, comparando con el obtenido en el inciso b.

iii. Obtenga la matriz P^{-1} . Dé un ejemplo donde haga uso de dicha matriz.

Ejercicio 10:

Responde verdadero o falso y justifica tu respuesta.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz estándar de una TL cuyo núcleo es $\{0\}$.

b) La matriz de cambio de base de $B = \{(1,0),(0,2)\}$ a la canónica es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

c) La matriz de cambio de base de la base canónica a $B = \{(1,0),(0,2)\}$ es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

d) Si T es una TL entonces $T(0_V) = 0_W$.

e) Si $T : IR^3 \to IR^8$ es una TL su rango (dim imagen) es como máximo 3.

f) Si $T : IR^7 \to IR^8$ es una TL, la nulidad de la transformación es como mínimo 0.

g) La matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ representa geométricamente una rotación de 180º.

EJERCICIO PROPUESTO

1. Sea $T : IR^2 \to IR^2$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x+6y \\ -3x+4y \end{bmatrix}$$

y sean B y B' las bases $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

(a) Determine la matriz A de T con respecto a la base B. (La matriz estándar)

(b) Obtenga la matriz de transición P de B' a B.

(c) Calcule la matriz A' de T con respecto a B' usando el teorema que relaciona a las matrices A, A', P y a su inversa .¿ Qué tipo de matriz es A' ?

(d) Calcule la misma matriz A' de T con respecto a la base B' ,directamente a partir de B' .

e) Observe A y A' .¿ Se puede concluir que las matrices de una transformación lineal con respecto a dos bases diferentes, son semejantes? ¿ Por qué ?