Trabajo Práctico Nº 8

Valores y Vectores Propios. Diagonalización

Ejercicio 1:

Para las siguientes transformaciones lineales de $R^2 \to R^2$, encontrar valores y vectores propios en forma analítica e interpretar geométricamente.

a) Reflexión con respecto a la recta $y = 0$

b) Rotación para un $\theta = +\dfrac{\pi}{4}$

Ejercicio 2:

Comprobar que el vector: $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es vector propio de $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar el valor propio correspondiente.

Ejercicio 3:

Para cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determinar ecuaciones características
b) Encontrar valores propios.
c) Determinar las bases de los espacios característicos.
d) Indicar multiplicidades algebraicas y geométricas.

Ejercicio 4:

Para las matrices del ejercicio 3, determinar cuales son diagonalizables. Luego hallar la matriz diagonal *D*, encontrando previamente la matriz *P* que diagonaliza.

Ejercicio 5:

Clasificar las matrices del ejercicio 3 como: definidas positivas, semidefinidas positivas, definidas negativas, semidefinidas negativas o indefinidas según corresponda.

Ejercicio 6:

Demostrar:

a) Si λ es valor propio de *A* inversible, entonces $\lambda \neq 0$.
b) Si λ es valor propio de *A* entonces λ^2 es valor propio de A^2.
c) Si λ es valor propio de *A* inversible, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.
d) Si λ es valor propio de *A* entonces $(k\,\lambda)$ es valor propio de (kA) para $k \in R$.
e) Las matrices *A* y A^T tienen los mismos valores propios.
f) Si *A* es triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 7:

Diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ para hallar la matriz $\left[A^5\right]$.

Ejercicio 8:

Probar que la matriz $\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ es ortogonal.

Ejercicio 9:

Demostrar que si *A* es ortogonal, su determinante vale ± 1.

Ejercicio 10:

Encontrar la matriz *P* que diagonalice ortogonalmente las siguientes matrices simétricas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 11:

Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justificar la respuesta.

a) Sea A_{3x3} con autovalores: -1, 1 y 2, entonces:
   - *A* es inversible
   - *Det (A)* = 2
   - *A* es semidefinida positiva
   - *A* es diagonalizable
   - *A* es simétrica
   - La traza de *A* vale 2
b) La matriz *P* que diagonaliza a una matriz simétrica es simétrica.
c) La matriz *P* que diagonaliza a una matriz simétrica es ortogonal.
d) Toda matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente.

e) Si P_{nxn} es ortogonal, sus columnas forman una base ortonormal de R^n.
f) Si A_{3x3} es diagonalizable, debe tener 3 valores propios reales y distintos.
g) Si $tr(A) = tr(B)$ entonces *A* y *B* son semejantes.
h) Si *A* y *B* son semejantes entonces sus trazas son iguales.
i) Toda matriz no singular es diagonalizable.
j) Si *A* es triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal.
k) Toda matriz diagonalizable, es simétrica.
l) Toda matriz simétrica es diagonalizable.
m) Si *A* es semejante a *B*, entonces *det (A) = det (B).*