Trabajo Práctico N°3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio 1: Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales empleando cuando sea posible:

i) método matricial
ii) regla de Cramer

Interprete gráficamente

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -6 \\ -0,5x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ x - 0,5y = 2 \end{cases}$

Ejercicio 2: Encuentre los valores de k para que el siguiente sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Interprete gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + ky = 1 \\ kx + 8y = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 3: Determine, en cada caso, si los sistemas de ecuaciones lineales dados son equivalentes:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x - y = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2u + 3v = -5 \\ u - 2v = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x - y = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -5 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$

Ejercicio 4: Dados los siguientes S.E.L.

a) Analice el sistema aplicando el teorema de Rouche Frobenius.
b) Resuelva el sistema por el método de eliminación de Gauss.
c) Resuelva el sistema usando el método de Gauss Jordan.

i) $\begin{cases} -x + y - 2z = 2 \\ x + 3z = -5 \\ -2x + 3x - 2z = -1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} -x + y = 9 \\ x + y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

Ejercicio 5: En cada caso exprese el conjunto solución de los vectores columna X, tal que satisfaga la ecuación matricial A.X=B.

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 6: Clasifique los sistemas lineales con las matrices ampliadas siguientes como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, en función de los parámetros a y b. Cuando un caso no se pueda dar escriba “nunca". Cuando un caso se de siempre, independientemente del valor de a y b escriba “siempre". Para los casos en los que obtengas varios valores de parámetros, únalos explícitamente utilizando la conjugación pertinente “y" u “o" (las comas no valen).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2b & b-1 \end{array}\right]$$

Compatible determinado.......................

Compatible indeterminado....................

Incompatible..

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 \end{array}\right]$$

Compatible determinado.......................

Compatible indeterminado....................

Incompatible..

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right]$$

Compatible determinado.......................

Compatible indeterminado....................

Incompatible..

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right]$$

Compatible determinado.......................

Compatible indeterminado....................

Incompatible..

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right]$$

Compatible determinado.......................

Compatible indeterminado....................

Incompatible..

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$

Compatible determinado.......................

Compatible indeterminado....................

Incompatible..

Ejercicio 7: Dé ejemplos:

a) De matriz ampliada en forma escalonada que corresponda a un sistema lineal con solución única y a una matriz de coeficientes de 4x3.
b) De matriz ampliada escalonada reducida correspondiente a un sistema lineal con más ecuaciones que incógnitas pero con un número infinito de soluciones.

Ejercicio 8: Resuelva y analice por Rouche Frobenius los sistemas homogéneos asociados a los ejercicio 4 y 5.

Ejercicio 9: Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

$$(A-\lambda I)\, X = 0 \qquad \text{Siendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10: Aplicando S.E.L., dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, encuentre una matriz B de 2x2 tal que:

a) AxB = O
b) AxB = I

Ejercicio 11: Argumente la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

1) Dado un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo que tiene solución única, es posible agregar otra ecuación para que el nuevo sistema no tenga solución.
2) Para $A_{2x4}\cdot X=B$ se puede encontrar una matriz B para que el sistema tenga solución única.
3) El sistema $A\cdot X=O$ tiene solución única, luego A es cuadrada.
4) El sistema cuadrado $A\cdot X=B$, tiene solución única si A es equivalente por filas a la matriz identidad.
5) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene como máximo n soluciones.
6) Si A y B son equivalentes entonces los sistemas $A\cdot X=O$ y $B\cdot X=O$ tienen el mismo conjunto solución.
7) En el sistema $A\cdot X=B$; X_1 es solución y X_2 también lo es. Luego X_1+X_2 es solución del sistema.
8) En el sistema $A\cdot X=O$; X_1 es solución y X_2 también lo es. Luego X_1+X_2 es solución del sistema.
9) Si un sistema $A_{3x5}\cdot X=B$ tiene dos grados de libertad se puede hallar una matriz B para que el sistema no tenga solución.
10) Un sistema homogéneo con matriz de coeficientes cuadrada puede tener infinitas soluciones.
11) Si en el sistema $A\cdot X=O$, X_1 es solución, entonces $k\,X_1$ (k real) también es solución.
12) Un sistema con más incógnitas que ecuaciones es indeterminado.

Ejemplo 1: Cifrado matricial de un mensaje de texto

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	,	¿	?	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Mensaje: " ATAQUE AHORA"

A	T	A	Q	U	E		A	H	O	R	A
0	20	0	17	21	4	31	0	7	15	18	0

Matriz clave K= $\begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Proceso de cifrado $\begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 100 \end{bmatrix}$

340 100 289 85 110 83 62 93 269 96 36 54

Para poder descifrar el mensaje necesitamos que la matriz clave sea inversible.

Ejemplo 2: Una empresa tiene tres minas con menas de composiciones:

	Níquel (%)	Cobre (%)	Hierro (%)
Mina A	1	2	3
Mina B	2	5	7
Mina C	1	3	1

¿Cuántas toneladas de cada mina deben utilizarse para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro?

$$\begin{cases} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{cases}$$

x = nº de toneladas de la mina A. x=200 t
y = nº de toneladas de la mina B. y=100 t
z = nº de toneladas de la mina C. z=300 t

Ejemplo 3: Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1 la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

Sea x_i el número de unidades que se deben producir del producto i que se fabrican durante las 8 horas con $i = 1, 2, 3$ y 4.

$1x_1$: Es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 1.
$2x_2$: Es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 2.
$1x_3$: Es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 3.
$2x_4$: Es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 4.

Como la máquina 1 debe ser usada 8 horas diarias, entonces tenemos que

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8$$

procediendo de forma similar para las máquinas 2 y 3 obtenemos el sistemas de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Aplicando eliminación de Gauss-Jordan llegamos al sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 4 \\ x_2 + x_4 &- 2 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - x_4 \\ x_2 &= 2 - x_4 \\ x_3 &= x_4 \end{aligned}$$

Cada x_i es no negativa por representar la cantidad de unidades fabricadas del producto i cada día, por lo tanto $x_i < 0$ no tiene sentido.
Si asumimos que se produce un número completo de unidades, entonces x_i debe ser además un número entero para que todos los x_i, sean no negativos x_4 debe ser un entero menor o igual que 2, y por lo tanto las posibles soluciones son

	x1	x2	x3	x4
Solución 1	4	2	0	0
Solución 2	3	1	1	1
Solución 3	2	0	2	2