TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

Matrices

Ejercicio 1: Determine para todo, $i = 1,2,3$ y para todo $j = 1,2,3$:

a) La matriz A= $[a_{ij}]$, donde $a_{ij} = 0$,

b) La matriz A= $[a_{ij}]$, donde $\begin{cases} i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \\ i = j \Rightarrow a_{ij} = i + 3j \end{cases}$

c) La matriz C= $[c_{ij}]$, donde $\begin{cases} i \neq j \Rightarrow c_{ij} = 0 \\ i = j \Rightarrow c_{ij} = 1 \end{cases}$

d) La matriz D= $[d_{ij}]$, donde $\begin{cases} i \geq j \Rightarrow d_{ij} = 2i + j \\ i < j \Rightarrow d_{ij} = 0 \end{cases}$

e) Para la matriz anterior calcular $\sum a_{ij}$, si $i = j$

Ejercicio 2: Dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I) Encuentre las matrices que se obtienen efectuando las siguientes operaciones o dar las razones por las que no están definidas.

a) $B + 2A^T$

b) $2B + D$

c) $M = (-A^T)$

d) $N = -(A^T)$

e) $C.E$

f) $(G.B)^T$

g) $D^2 + A$

h) $3H$

i) $-3H$

II) Grafique en los ejes de coordenadas x-y a la matriz H considerada como vector geométrico y luego grafique los incisos h e i. Describa lo observado.

III) Compare las matrices M y N obtenidas en los incisos c y d. Concluya.

Ejercicio 3: Determine, si es posible expresar a la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, en función de las matrices $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, de modo que $A = k_1 B + k_2 C$, donde k_1 y k_2 son números reales. Justifique su respuesta.

Ejercicio 4: Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 5 & 9 \end{bmatrix}$ e I_3 la matriz identidad de orden 3. Si λ es un número real, calcule $\lambda . I_3 - A$.

Ejercicio 5: Sean A y X las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine un escalar λ tal que $A.X = \lambda. \mathrm{X}$.

Ejercicio 6: Definida una matriz A diferente en cada caso, proporcione una descripción geométrica del efecto que produce la multiplicación de la matriz A por el vector $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Para ello, luego de premultiplicar A por X, represente gráficamente los vectores obtenidos.

a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. c. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 7: Interprete geométricamente en R^2(plano cartesiano), los siguientes conjuntos de puntos, dados en notación matricial:

a. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $donde\ k \in Z$

b. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $donde\ k \in R$

c. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $donde\ k \in R$

d. $[2 \quad 5]. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0$

e. $X^T. A. X = 9,\ siendo\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

f. $x. \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8: Indique cuáles de las siguientes matrices son elementales. Justifique la respuesta en cada caso.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9: ¿Qué le sucede a una matriz A de 3 x 3 si?:

a) Se pre multiplica por $E_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Se pos multiplica por E_1

c) Se pre multiplica por $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10: Determine cuáles de las siguientes matrices están en la forma escalonada por filas; escalonada por filas reducida; o ninguna de ellas. Justifique.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 11: Determine el rango de las siguientes matrices e indique cuáles de ellas son inversibles.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 12: Calcule las inversas de las siguientes matrices (si existen).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix};$$

Ejercicio 13:

a) Exprese el siguiente enunciado en símbolos:

Si A y B son matrices invertibles de orden n, entonces la inversa del producto de A por B es el producto de la inversa de B por la inversa de A.

b) Demuestre lo enunciado en el item a.

Ejercicio 14: Considere la matriz A del ejercicio 12 y calcule:

- **I.** $(3A)^{-1}$
- **II.** $(A^2)^{-1}$
- **III.** $(A^t)^{-1}$

Ejercicio 15: Complete justificando la respuesta.

a) Sea la ecuación matricial $AX\text{-}3C=5C$. Donde A y C son matrices del mismo orden e inversibles, entonces $X=$

b) Sea la ecuación matricial $C^{-1}(A+X)B^{-1}=I$, donde A, B y C son matrices inversibles del mismo orden, entonces X=

Ejercicio 16: Dadas las siguientes afirmaciones, asigne su valor de verdad. Justifique su elección, con un contraejemplo en caso de falsedad o demuestre para las afirmaciones verdaderas:

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2.A.B + B^2 \ .A, B\ y\ C\ de\ orden\ 2x2.$
b) Sean las matrices A_{nxn} y B_{nxn}, si $A \cdot B = B \cdot A$ entonces $A = B$.
c) Sean las matrices A_{nxn} y B_{nxn} y p un entero no negativo, si $A \cdot B = B \cdot A$, entonces $(A.B)^P = A^P.B^P$
d) Si A es una matriz simétrica entonces A^t es simétrica.
e) Si A es una matriz simétrica no singular entonces A^{-1} es simétrica.
f) Cualquiera sea la matriz A de orden 2x3, la matriz $A.A^t$es simétrica.
g) Toda matriz antisimétrica admite inversa.
h) Si A es una matriz de 3x3 de rango 2, la forma escalonada reducida de A es la matriz I.
i) $(k.A.B^T)^{-1} = k^{-1}(B^T)^{-1}A^{-1}$
j) La traza de la matriz *(2I+0)=6*, siendo I de orden 4x4.
k) Si $A.B = 0$ entonces A o B es una matriz nula.

Ejercicio Resuelto

Ejercicio 17: Resuelva:

Se analizará el gasto mensual que producen tres familias en base a los siguientes datos:

Consumo promedio mensual de alimentos por familia: Familia A: pan 1 kg, carne 2 kg, leche 1 kg. Familia B: pan 2 kg, carne 3 kg, leche 1 kg. Familia C: pan 2 kg, carne 3 kg, leche 2 kg.
Costo por kg de alimento del mes 1: Pan \$5, Carne \$30, Leche \$20.

a) Plantee la operación matricial que nos permitirá obtener el gasto mensual total que produce cada familia en el mes 1. Considere en la operación matricial a las familias como filas y a Pan, Carne y leche como Columnas.

b) Si tenemos una cuarta familia D que consume: Pan 1 kg, carne 1 kg, leche 1 kg y el costo por kg del mes 2 es: Pan \$7, Carne \$40, Leche \$30, amplíe el sistema matricial planteado para obtener el gasto total mensual que produce cada familia en el mes 1 y 2.

a)
$$\begin{array}{cc} \text{Familia} & \begin{matrix} P & C & L \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&1\\2&3&2\end{bmatrix}\end{array} \cdot \begin{array}{c}\text{CostoxKg}\\ \begin{bmatrix}5\\30\\20\end{bmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Mes1}\\ \begin{bmatrix}85\\120\\140\end{bmatrix}\end{array}$$

El gasto mensual total que produce cada familia en el mes 1 es: \$85 para la familia 1, \$120 para la familia 2 y \$140 para la familia 3.

b)
$$\begin{array}{cc} \text{Familia} & \begin{matrix} P & C & L \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&1\\2&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}\end{array} \cdot \begin{array}{c}\text{CostoxKg}\\ \begin{bmatrix}5&7\\30&40\\20&30\end{bmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Mes1 Mes2}\\ \begin{bmatrix}85&117\\120&164\\140&90\\55&77\end{bmatrix}\end{array}$$

El gasto mensual total que produce cada familia 4 en el mes 1 es: \$55.
El gasto mensual total que produce cada familia en el mes 2 es: \$117 para la familia 1, \$164 para la familia 2,\$90 para la familia 3 y \$77 para la familia 4.