Trabajo Práctico N° 3: <u>SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES</u>

<u>Ejercicio 1</u>: Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales empleando cuando sea posible:

i) Método matricial.
ii) Regla de Cramer.

Interprete gráficamente.

a) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -0{,}5\,y + x = -0{,}5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2\,x - y = 0.5 \end{cases}$

<u>Ejercicio 2</u>: Encuentre los valores de k para que el siguiente sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Interprete gráficamente.

$$\begin{cases} 3x + ky = 1 \\ kx + 12y = -2 \end{cases}$$

<u>Ejercicio 3</u>: Determine, en cada caso, si los sistemas de ecuaciones lineales dados son equivalentes:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ (-3)x + y = 6 \end{cases}$ y $\begin{cases} v + u = 6 \\ v - (1/2)u = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ (-3)x + y = 6 \end{cases}$ y $\begin{cases} z + y + x = 2 \\ -y - x + z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)x_2 - x_1 = -3 \end{cases}$ y $\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 2 \\ 2x_2 + 4\,x_1 = 12 \end{cases}$

<u>Ejercicio 4</u>: Dados los siguientes S.E.L.

a) Analice el sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius.
b) Resuelva el sistema por el método de eliminación de Gauss.
c) Resuelva el sistema usando el método de Gauss-Jordan.

i) $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 3y + 6z = 27 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_4 = -3 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} -x + y = 9 \\ x + y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

Ejercicio 5: En cada caso exprese el conjunto solución de los vectores columna X, tal que satisfaga la ecuación matricial A.X=B.

a) $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 5 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 6\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$

Ejercicio 6: Clasificar los sistemas lineales con las siguientes matrices ampliadas según sean compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, en función de los parámetros a y b. Cuando un caso no se pueda dar escriba "nunca". Cuando un caso se de siempre, independientemente del valor de a y b escriba "siempre". Para los casos en los que obtengas varios valores de parámetros, únalos explícitamente utilizando la conjugación pertinente "y" u "o" (las comas no valen).

a) $\left[\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 1\\ -b & 1 & 3\end{array}\right]$

Compatible determinado.......................
Compatible indeterminado....................
Incompatible..

b) $\left[\begin{array}{cc|c}-3 & 1 & 2\\ 0 & b & b+2\end{array}\right]$

Compatible determinado.......................
Compatible indeterminado....................
Incompatible..

c) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & a & 3\\ 0 & b-2 & 0 & b+1\end{array}\right]$

Compatible determinado.......................
Compatible indeterminado....................
Incompatible..

d) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & a-1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & a-2 & 3\end{array}\right]$

Compatible determinado.......................
Compatible indeterminado....................
Incompatible..

e) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 2 & b\end{array}\right]$

Compatible determinado.......................
Compatible indeterminado....................
Incompatible..

f) $\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & a & -1\\ 0 & 0 & 1 & b\end{array}\right]$

Compatible determinado.......................
Compatible indeterminado....................
Incompatible..

g) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & b & a \end{array}\right]$

Compatible determinado.......................
Compatible indeterminado....................
Incompatible..

Ejercicio 7: Proporcione ejemplos:

a) De matriz ampliada en forma escalonada que corresponda a un sistema lineal con solución única y a una matriz de coeficientes de 4x3.
b) De matriz ampliada escalonada reducida correspondiente a un sistema lineal con más ecuaciones que incógnitas pero con un número infinito de soluciones.

Ejercicio 8: Resuelva y analice por Rouché-Frobenius los sistemas homogéneos asociados a los ejercicio 4 y 5.

Ejercicio 9: Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

$$(A - \lambda I)\, X = 0 \qquad \text{Siendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10: Aplicando S.E.L.**,** dada la matriz A = [illegible], encuentre una matriz B de 2x2 tal que:

a) AxB = O
b) AxB = I

Ejercicio 11: Argumente la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

1) Dado un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es posible agregar otra ecuación para que el nuevo sistema homogéneo no tenga solución.
2) Para $A_{4x2} \cdot X = B$ se puede encontrar una matriz B para que el sistema tenga solución única.
3) El sistema $A \cdot X = O$ tiene solución única, luego A es cuadrada.
4) El sistema cuadrado $A \cdot X = B$, tiene solución única si A es equivalente por filas a la matriz identidad.
5) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene como máximo n/2 soluciones.
6) Si A y B son equivalentes entonces los sistemas $A \cdot X = O$ y $B \cdot X = O$ tienen distintos conjuntos solución.
7) En el sistema $A \cdot X = B$; X_1 es solución y X_2 también lo es. Luego $X_1 + X_2$ es solución del sistema.
8) En el sistema $A \cdot X = O$; X_1 es solución y X_2 también lo es. Luego $X_1 + X_2$ es solución del sistema.

9) Si un sistema $A_{3x5} \cdot X = B$ tiene dos grados de libertad se puede hallar una matriz B para que el sistema no tenga solución única.
10) Un sistema homogéneo con matriz de coeficientes cuadrada puede tener solución única.
11) Si en el sistema $A \cdot X = B$, X_1 es solución, entonces $k\,X_1$ (k real) también es solución.
12) Un sistema con igual número de incógnitas y ecuaciones es siempre compatible determinado.

<u>Aplicaciones del Álgebra Lineal, empleando Sistemas de Ecuaciones Lineales</u>.

<u>Ejercicio 1</u>: "Cifrado matricial de un mensaje de texto"

Dada la siguiente tabla de asignación de caracteres

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	,	¿	?	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

encriptar el mensaje "RETIRADA" [18 04 20 08 18 00 03 00 31 31]. Considerar para ello la matriz de cifrado (A) dada a continuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 19 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 17 \\ 0 & 89 & 105 & 0 & 15 \\ 0 & 91 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 100 & 23 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Desarrollo:

Vamos a pensar en un sistema de ecuaciones, implementado a partir de su matriz asociada, de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 19 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 17 \\ 0 & 89 & 105 & 0 & 15 \\ 0 & 91 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 100 & 23 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}$$

Donde cada vector columna corresponde a cinco caracteres del mensaje a cifrar, y su correspondiente codificación. En particular para nuestro ejemplo aplicado a los primeros cinco caracteres, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 19 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 17 \\ 0 & 89 & 105 & 0 & 15 \\ 0 & 91 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 100 & 23 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 20 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 506 \\ 464 \\ 2726 \\ 420 \\ 968 \end{pmatrix}$$

Donde el texto cifrado completamente queda como:

[0506 0464 2726 0420 0968 0316 0765 0732 0335 0641]

<u>Ejemplo 2</u>: “Aplicaciones a la genética”

En la población, la distribución de genotipos es de 50 por ciento de AA, 30 por ciento de Aa y 20 por ciento de aa. ¿Qué proporciones de los genes en esta población son A y a?
<u>Observación</u>: Naturalmente se ha podido establecer las probabilidades correspondientes a los genotipos donde participa el gen dominante A.

En virtud de cumplir con propiedades probabilísticas, podemos establecer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_{AA} + v_{Aa} + w_{aa} = 1 \\ u_{AA} + \frac{1}{2} v_{Aa} = p_A \\ w_{AA} + \frac{1}{2} v_{Aa} = p_a \end{cases}$$

Que expresado en términos de los valores de probabilidad dados para los genotipos resulta en

$$\begin{cases} 0{,}50 + 0{,}30 + 0{,}20 = 1 \\ 0{,}50 + \frac{1}{2} 0{,}30 = p_A \\ 0{,}20 + \frac{1}{2} 0{,}30 = p_a \end{cases}$$

De la solución de este sistema resulta que la probabilidad del gen A es del 65 por ciento, mientras que el gen a es del 35 por ciento.

<u>Ejemplo 3</u>: “Optimización de un sistema productivo”

Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	**Producto 2**	**Producto 3**	**Producto 4**
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del Producto 1, la Máquina 1 se usa 1 hora, la Máquina 2 se usa 2 horas y la Máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

Sea x_i el número de unidades que se deben producir del producto i que se fabrican durante las 8 horas con i = 1, 2, 3 y 4.

$a_{1,1}$ = 1: Cantidad de horas diarias que es usada la Máquina 1 en la fabricación del Producto 1.
$a_{1,2}$ = 2: Cantidad de horas diarias que es usada la Máquina 1 en la fabricación del Producto 2.
$a_{1,3}$ = 3: Cantidad de horas diarias que es usada la Máquina 1 en la fabricación del Producto 3.
$a_{1,4}$ = 4: Cantidad de horas diarias que es usada la Máquina 1 en la fabricación del Producto 4.

Como la Máquina 1 debe ser usada 8 horas diarias, entonces tenemos que

$$1\,X_1 + 2\,X_2 + 1\,X_3 + 2\,X_4 = 8$$

procediendo de forma similar para las máquinas 2 y 3 obtenemos el sistemas de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{cases} 1\,X_1 + 2\,X_2 + 1\,X_3 + 2\,X_4 = 8 \\ 2\,X_1 + 0\,X_2 + 1\,X_3 + 1\,X_4 = 8 \\ 1\,X_1 + 2\,X_2 + 3\,X_3 + 0\,X_4 = 8 \end{cases}$$

Aplicando eliminación de Gauss-Jordan llegamos al sistema equivalente

$$\begin{cases} 1\,X_1 + 1\,X_4 = 4 \\ 1\,X_2 + 1\,X_4 = 2 \\ X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

De donde,

$$\begin{cases} 1\,X_1 + 0\,X_2 + 0\,X_3 + 1\,X_4 = 4 \\ 0\,X_1 + 1\,X_2 + 0\,X_3 + 1\,X_4 = 2 \\ 0\,X_1 + 0\,X_2 + 1\,X_3 + -1\,X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_4 = 4 \\ X_2 + X_4 = 2 \\ X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Cada x_i es no negativa por representar la cantidad de unidades fabricadas del producto i cada día, por lo tanto $x_i < 0$ no tiene sentido.
Si asumimos que se produce un número completo de unidades, entonces x_i debe ser además un número entero para que todos los x_i. También x_4 debe ser un entero menor o igual que 2, y por lo tanto las posibles soluciones son

	X_1	X_2	X_3	X_4
Solución 1	4	2	0	0
Solución 2	3	1	1	1
Solución 3	2	0	2	2

Ejercitación opcional

En cada sistema de ecuaciones lineales representado a continuación por su matriz ampliada, se aplicó el método de eliminación de Gauss-Jordan para obtener la forma escalonada reducida. Resultando en cada caso:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 6 & 15 \end{bmatrix}$ equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Para cada caso:

i. Relacione : número de incógnitas, rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, y tipo de solución en cada caso.

ii. Escriba el conjunto solución.

iii. Observe la matriz aumentada antes de la aplicación del método, la relación que mantienen sus filas, el vector de términos independientes y las soluciones obtenidas. Reflexione acerca de lo observado y los resultados obtenidos.