Trabajo Práctico N° 4: I) VECTORES EN R^2 Y R^3

Ejercicio 1: Las fuerzas que actúan en un cuerpo se localizan en un plano, entonces se pueden representar mediante elementos de R^2.
Determine la fuerza que hay que aplicar sobre un cuerpo para mantenerlo en equilibrio si está sometido a las siguientes fuerzas: $2F_1 - 0{,}5\, F_2 + F_3$.
Siendo los vectores fuerza: $F_1 = (-2,3)$, $F_2 = (2,0)$ y $F_3 = (4,4)$. Resuelva analítica y gráficamente.

Ejercicio 2: Determine las componentes, el módulo y los cosenos directores de:

a) un vector en el plano cuyo origen es el punto (1, 2) y su extremo el punto (-3, 3).
b) un vector en R^3cuyo origen es el punto (0, -1, 2) y su extremo el punto (-3, 1, 3).

Grafique.

Ejercicio 3: Encuentre el valor de x para que los vectores sean perpendiculares. Grafique.

a) a=(2,3) y b=(-1,x)
b) c=(5,3,1) y d=(2,x ,4)

Ejercicio 4: Dados los vectores u = -i+ 2j+3k y v = 3i+ j-2k, encuentre

a) la norma de cada uno
b) el versor correspondiente a cada vector
c) u.v y v.u
d) u×v y v×u
e) la distancia entre ellos
f) el ángulo entre los vectores
g) el versor perpendicular a u y v

Ejercicio 5: Siendo u,v y w vectores de R^3, demuestre las siguientes propiedades:

a) u.(v+w) = u.v + u.w
b) u.(v x w) = w. (u x v) = v.(w x u)
c) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$ siendo α, β y γ ángulos directores de un vector.

Ejercicio 6: Pruebe que los puntos A(1,2,3) B(2,2,3) C(2,2,4) D(1,2,4) son coplanares. Pruebe que forman un cuadrado y calcule su área.

Ejercicio 7: Encuentre un vector de R^3 que forme ángulos iguales con los ejes coordenados y de módulo 4.

Ejercicio 8: Demuestre aplicando álgebra vectorial:

a) el teorema de Pitágoras
b) las diagonales de un rombo son perpendiculares

II) RECTA Y PLANO

Ejercicio 9: Encuentre la ecuación de la recta que pasa por dos puntos en su forma vectorial paramétrica, cartesiana paramétrica y simétrica para

a) M(-2,3) y N(-3,1)
b) S(3,-1,4) y T(-3,2,0).

Grafique.

Ejercicio 10:

a) Halle la ecuación cartesiana paramétrica de la recta m que pasa por el punto S(-1,0,3) y es paralela a la recta OP= (-1,0,3) + λ(2,-1,4)
b) Determine si los puntos Q(2,-1,4) y B(1,-1,7) pertenecen a m.
c) Encuentre una ecuación vectorial paramétrica de la recta n que pasa por A(1,0,2) y es ortogonal a m.

Ejercicio 11: Encuentre la ecuación vectorial paramétrica de la recta t que pasa por Q(1.-4) y es ortogonal a la recta s: x+2y=1. Grafique. Determine dos puntos pertenecientes a la recta t y uno que no pertenezca a ella.

Ejercicio 12: Determine la ecuación simétrica de la recta t que pasa por el origen y es paralela a la recta de ecuación $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 5 - 8\lambda \\ z = 2 + 5\lambda \end{cases}$.

Ejercicio 13: Halle la ecuación general del plano que contiene a los puntos P(0,0,1); Q(1,1,2) y R(0.-1,1). Encuentre un valor de k de modo que el punto S(k,0,0) también pertenezca al plano.

Ejercicio 14: Dados los vectores u=(-2,1,3) y v=(3,-1,4), encuentre la ecuación del plano paralela a dichos vectores y que contiene al punto (3,4,5) en sus formas vectorial paramétrica y general.

Ejercicio 15: Encuentre la ecuación de una recta paralela al eje z y contiene al punto P(0,01). Grafique.

Ejercicio 16: Encuentre

a) la ecuación de a recta que contiene al punto P(2,-1,2) y es perpendicular al plano π: 3x-2y+z-2=0.
b) un plano paralelo a π que pase por el punto P.
c) la intersección entre el plano π y la recta.

Ejercicio 17: Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto (1,-3,4) y es perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x+2}{7} = y - 1 = \frac{z+3}{-4}$

Ejercicio 18: Encuentre el ángulo entre los planos π_1: x-3y-2z=0 y π_2: 3x-2y+z=0
Encuentre además la intersección entre ellos.

Ejercicio 19: Determine si la recta $\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ es paralela al plano 2x-y+z=0

Opcionales:

Ejercicio 20: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique.

a) El punto A(7,1,3) y la recta $\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ determinan un plano.
b) La recta $-x=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{-2}$ corta a los tres planos coordenados.
c) Los planos π_1: 3x+6y-3z-6=0, π_2: x+y-3z=0 y π_3: x+2y-z-1=0, no tienen ningún punto en común.
d) Los puntos P(0,0,1); Q(1,1,2) y R(0.-1,1) son colineales.

.

Ejercicio 21: Completar:

a) Un vector unitario en la dirección de la recta de ecuación OP= (3,-2,5) + λ(1,5,2) es ....
b) Un vector paralelo al plano determinado por los vectores s=(3,4,5) y t=(-2,1,3) es………………………………………………………………………………
c) El ángulo entre el eje y y la recta de ecuación OP= (3,2,1)+ λ(2,0,-1) es………………………………………………………………………………
d) La ecuación del plano paralela al plano z=-5 que pasa por el origen es………………………………………………………………………………

Ejercicio 22: Marque la respuesta correcta:

a) Una recta de R^3 que pase por el origen:
   i) $\{(x,y,z) \in R^3/(x,y,z)=(0,1,0)+t(-1,0,1); t \epsilon R\}$
   ii) $\{(x,y,z) \in R^3/2x-y+3z=0\}$ 0
   iii) $\{(x,y,z) \in R^3/(x,y,z)=(2,0,-2)+t(-1,0,1); t \epsilon R\}$
   iv) $\{(0,0,0)\}$
   v) n.r.a.c.

b) Un plano paralelo al plano xy:
   i) $\{(x,y,z) \in R^3/(x,y,z)=(1,-2,3)+t(-1,1,0); t \epsilon R\}$
   ii) $\{(x,y,z) \in R^3/(x,y,z)=(1,-2,3)+t(-1,1,0)+s(1,1,0); t \wedge s \epsilon R\}$
   iii) $\{(x,y,z) \in R^3/2x-y=0\}$
   iv) $\{(x,y,z) \in R^3/2x-y=2\}$
   v) n.r.a.c.

c) El vector proyección del vector (-2,3) sobre la recta y=2 x:

i) $\left(-2\sqrt{5}/5\,,6\sqrt{5}/5\right)$ ii) $\left(\sqrt{5}/5\,,2\sqrt{5}/5\right)$

iii) (4 , 4) v) $\left(4\sqrt{5}/5\,,8\sqrt{5}/5\right)$

v) n.r.a.c.

A continuación citamos ejemplos de aplicación de vectores extraidos del libro "Álgebra Lineal" de Fraleigh Beauregard, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana

Aplicación a vectores velocidad y a navegación

Los dos ejemplos siguientes tratan de otro modelo físico para la aritmética vectorial. Un vector es el **vector velocidad** de un objeto en movimiento en un instante si apunta en la dirección del movimiento y si su magnitud es la rapidez del objeto en ese instante. Usando vectores velocidad se pueden resolver fácilmente problemas comunes de navegación.

EJEMPLO 5 Se supone que una embarcación navega a 8 nudos siguiendo un rumbo de 010°, esto es, 10° al este del Norte, en una bahía que tiene una corriente de 2 nudos en la dirección 070°, es decir, 70° al este del Norte. Hallar el rumbo y la rapidez corregidos. (La expresión *corregidos* es el término estándar en navegación para referirse al rumbo y rapidez reales de una embarcación con respecto al fondo.)

SOLUCION Los vectores velocidad $\mathbf{s}$ para la embarcación y $\mathbf{c}$ para la corriente se muestran en la figura 3.10, donde el eje vertical apunta hacia el Norte. Hallamos $\mathbf{s}$ y $\mathbf{c}$ usando una calculadora y calculando

$$\mathbf{s} = (8 \cos 80°, 8 \operatorname{sen} 80°) \approx (1.88, 0.684)$$

y

$$\mathbf{c} = (2 \cos 20°, 2 \operatorname{sen} 20°) \approx (1.88, 0.684).$$

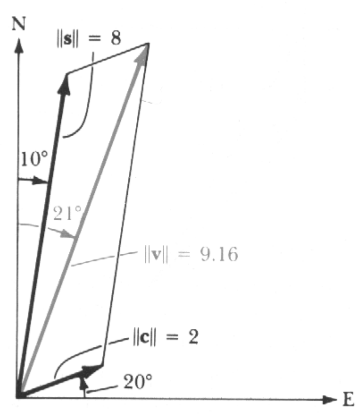

Fig. 3.10 El vector $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{c}$.

Al sumar $\mathbf{s}$ y $\mathbf{c}$ hallamos el vector $\mathbf{v}$ que representa el rumbo y rapidez de la embarcación con respecto al fondo, esto es, el rumbo y rapidez corregidos. Así, $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{c} = (3.27, 8.56)$. Por tanto, la rapidez corregida de la embarcación es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(3.27)^2 + (8.56)^2} = 9.16$$

y el rumbo corregido está dado por

$$90^\circ - \arctan(8.56/3.27) \approx 90^\circ - 69^\circ = 21^\circ.$$

Es decir, el rumbo es 021°. ◁

EJEMPLO 6 Se supone que el capitán de nuestra nave comprende la importancia de tener en cuenta la corriente. El desea navegar en 5 horas a un puerto situado a 120° y a una distancia de 35 millas náuticas, esto es, desea seguir el rumbo de 120° y la rapidez de 7 nudos. Sabe, por tablas de corrientes y mareas, que la corriente se dirige hacia el Sur con una velocidad de 2 nudos. ¿Cuáles deben ser su rumbo y su rapidez con respecto al agua?

SOLUCION De nuevo representamos, en un diagrama vectorial (véase Fig. 3.11), el rumbo y la rapidez a corregir, con un vector **v** y la velocidad de la corriente con **c**. El rumbo y la rapidez correctos a seguir se representan con el vector **s** y se obtienen calculando

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{v} - \mathbf{c} \\ &= (7\cos 30^\circ, -7\,\text{sen}\, 30^\circ) - (0, -2) \\ &= (6.06, -3.5) - (0, -2) = (6.06, -1.5). \end{aligned}$$

Así, el capitán deberá mantener el rumbo $90^\circ - \arctan(-1.5/6.06) \approx 90^\circ + 13.9^\circ = 103.9^\circ$ y debe avanzar a

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{(6.06)^2 + (-1.5)^2} \approx 6.24 \text{ nudos.} \quad ◁$$

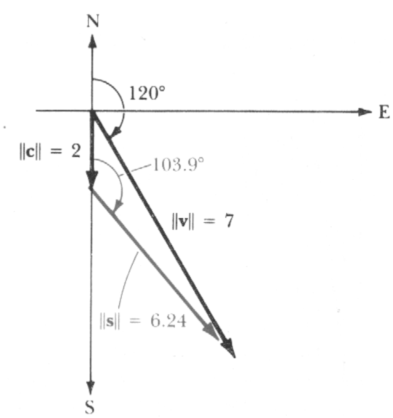

Fig. 3.11 El vector $\mathbf{s} = \mathbf{v} - \mathbf{c}$.