Trabajo Práctico N° 5: <u>ESPACIOS VECTORIALES</u>

<u>Ejercicio 1</u>:

Determine si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas en cada caso son o no espacios vectoriales. Para aquellos que no lo sean, indique al menos uno de los axiomas que no se cumple:

a) V = M_{2x2} con las operaciones usuales entre matrices: suma y producto por un escalar real.

b) $V = R^2$ con las operaciones usuales en R^2 : $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$ y $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ con $\alpha \in R$

c) $V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ con las operaciones usuales en R^2.

d) V = M_{3x2} con elementos enteros; con las operaciones usuales entre matrices: suma y producto por un escalar real.

e) $V = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x - y = 0\}$ con las operaciones usuales entre vectores: suma y producto por un escalar real.

f) $V = \{p\}$ un conjunto con único elemento y con las operaciones: $p + p = p \quad y \quad \lambda p = p; \quad \lambda \in R$

g) $V = R_+^2$ con las operaciones: $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 x'_1, x_2 x'_2)$ y $\alpha(x_1, x_2) = (x_1^\alpha, x_2^\alpha)$ con $\alpha \in R$

<u>Ejercicio 2</u>:

Sabiendo que V es un espacio vectorial real con las operaciones usuales, y cada uno de los elementos mostrados son vectores de ese espacio vectorial o números reales, demuestre:

a) $\alpha \vec{0} = \vec{0}$

b) $0 \vec{a} = \vec{0}$

c) $(-\alpha)\vec{a} = -(\overrightarrow{\alpha a})$

d) $(-\alpha)\vec{a} = -(\overrightarrow{\alpha a})$

<u>Ejercicio 3</u>:

Sea V un espacio vectorial real en el cual se han definido la suma y el producto por un escalar real usual y sea S un subconjunto del mismo. Determine utilizando la condición necesaria y suficiente, si S es un subespacio vectorial de V.

a) $V = M_{nxn}$ y S = $\{A \in M_{nxn} \,/\, A$ es matriz diagonal$\}$

b) $V = M_{2x2}$ y S = $\{A \in M_{2x2}$ y A es inversible$\}$

c) $V = R^2$ y S = $\{(x, y) \in R^2,\ x = 1)\}$

d) $V = R^2$ y $S = \{(x, y) \in R^2 ,\ y = 2x\}$
e) $V = R^2$ y $S = \{(x, y) \in R^2 ,\ x < y\}$
f) $V = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x - y - 9z = 1\}$
g) $V = M_{mxn}$ y $S = \{A \in M_{mxn} ,\ a_{1n} = 0\}$
h) $V = M_{2x2}$ y $S = \{A \in M_{2x2} / A$ es matriz simétrica$\}$

Ejercicio 4:

Demuestre mediante argumentos geométricos:
a) Que toda recta S que pase por el origen es subespacio de R^2.
b) Que toda recta o plano que contenga al origen es subespacio de R^3.

Ejercicio 5:

Pruebe que el conjunto solución del sistema homogéneo $AX= 0$, $A\in M_{mxn}$, es un subespacio vectorial de R^n.

Ejercicio 6:

De ser posible, escriba al vector v como combinación lineal de los vectores del conjunto A.
a) $v = (1,2),\ A = \{(0,1);(1,0)\}$
b) $v = (1-,2,6),\ A = \{(1,0,1);(0,0,2);(0,1,-1)\}$
c) $v = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 21 \\ 6 & 35 & 27 \end{bmatrix}$, $A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
d) $v = (4,6,10)$, A: Vectores fila de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
e) v: vector nulo de R^3 y A: Vectores columna de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 7:

Dados los vectores $a = (3, 1)$; $b = (1, 0)$; $c = (-2 , 1)$
a) Represente gráficamente en R^2.
b) Encuentre los escalares μ y λ que verifican que $c = \mu \cdot a + \lambda \cdot b$.
c) Grafique los vectores $\mu \cdot a$ y $\lambda \cdot b$ y súmelos gráficamente.
d) Verifique la dependencia lineal de los vectores a, b, c.

Ejercicio 8:

Sea el espacio vectorial R^2 y H un conjunto de vectores:

i. H={(-1, 2)}
ii. H={(-1, 1); (0, 1)}

Para cada conjunto:

a) Halle el conjunto S de los vectores de todas las combinaciones lineales de los vectores de H.
b) Grafique S en un sistema de ejes cartesianos.
c) Considere un elemento cualquiera de S y grafíquelo expresado como combinación lineal de los vectores de H.
d) Verifique que el conjunto S es un subespacio vectorial de R^2.

Ejercicio 9:

Determine si los siguientes conjuntos de vectores generan el espacio vectorial V, en caso contrario, encuentre el subespacio generado por ellos.

a) $V = R^2$
   i. {(2, -1), (-2, 1)}
   ii. {(1, 0); (1, 1); (0, 1)}

b) $V = R^3$
   i. {(3, 0, 0); (0, 0, 2)}
   ii. {(1, 2, 3); (2, 1, 3); (1, 0, 1)}

c) $V = M_{2x2}$
   i. $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$
   ii. $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

Ejercicio 10:

Halle el conjunto generador de los siguientes espacios vectoriales con las operaciones usuales en cada caso, siendo V:

a) V el plano de ecuación $-x + y + 2z = 0$ en R^3.
b) V el conjunto de matrices triangulares inferior de orden tres.
c) $V = \{(x, y) = t(1,1); t \in R\}$
d) $V = \{(x, y, z) \in R^3 / y = 0\}$
e) $V = R^3$
f) $V = \{M \in R^{2x2} / M = M^T\}$

Ejercicio 11:

a) Dada la recta en R^3 de ecuación $(x, y, z) = t(-1,0,5); t \in R$, indique dos conjuntos generadores distintos de la misma y que tengan distinta cantidad de elementos.
b) Dada la recta en R^3 de ecuación $(x, y, z) = t(1,1,-10); t \in R$, indique dos conjuntos generadores distintos de la misma pero que tengan la misma cantidad de elementos.

Ejercicio 12: Complete, si es posible, el conjunto de vectores $H = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;........ \right\}$ tal que el espacio S generado por los vectores del conjunto H responda, en cada caso, a las características dadas:

a) S es la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \; ; t \in R \\ z = t \end{cases}$
b) S es el plano de ecuación -2 x + 2y + z = 0
c) S = R^3
d) S = {0}
e) S es un plano con vector normal n = (0, 1, 0) y que contiene al origen.
f) S es el conjunto generado por las columnas de una matriz A de orden 3, tal que el sistema AX = 0 tiene solución única y H es el conjunto de las columnas de A.

Ejercicio 13:

Determine si los conjuntos de vectores dados en cada espacio vectorial indicado son linealmente independientes o linealmente dependientes. En este último caso exprese uno de ellos como combinación lineal de los demás.
a) {(-1, 2, 0); (-3, 0, 2); (0, 1, 1)} en R^3
b) {(1,-2, 1); (2, 1, -1); (7, -4, 1)} en R^3
c) {(1, 0); (1, 1)} en R^2
d) {(2, -4); (0, -2); (3, 1)} en R^2
e) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ en M_{2x2}
f) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ en M_{2x2}
g) { 1–x; 3- x^2} en P_2

Ejercicio 14:

Proponga, de ser posible, un conjunto de vectores en R^3 que satisfaga la condición especificada.

a) Un conjunto de dos vectores linealmente dependientes.
b) Un conjunto de dos vectores linealmente independientes.
c) Un conjunto de tres vectores linealmente independientes.
d) Un conjunto de cinco vectores linealmente independientes.
e) Un conjunto de cinco vectores linealmente dependientes.

Ejercicio 15:

Dados los vectores (1, 1, k) ; (k, 0, 0) y (0, k, 4) en R^3, determine para qué valores de k los vectores son linealmente independientes y para cuáles son linealmente dependientes.
¿Qué interpretación geométrica puede hacer de los vectores si son linealmente independientes? ¿Y en el caso de ser linealmente dependientes?

Ejercicio 16:

Por simple inspección determine si los siguientes conjuntos son base para el espacio Vectorial enunciado en cada caso.

Conjunto	Es/no es base de V
A={(3,0); (0,5); (1,1)} para $V= R^2$	
B={(1,1); (1,-1)} para $V= R^2$	
C={(2,0,0); (0,3,0); (4,0,0)} para V el plano xy de R^3	
D={(1,0,0); (0,1,0)} para $V= R^3$	
E= $\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$ para $V= M_{2x2}$ E= $\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$ para $V= M_{2x2}$	

Ejercicio 17:

Determine una base y la dimensión del subespacio S del espacio vectorial V dado en cada caso.

a) $V = R^5$; S = {(0, s, t, -s, -t) $\in R^5$}
b) $V = R^4$; S = {(x, y, z, t) $\in R^4$ / x = y + t ; y = t - z }
c) $V = R^3$; S es el plano de ecuación x - y + z = 0
d) $V = R^3$; S es la recta con ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z$

e) $V = M_{2x2}$; W = {$A \in M_{2x2}$ / A es matriz antisimétrica}
f) $V = R^3$; S es el subespacio generado por: $\{(1,1,1);(0,1,1);(0,0,1)\}$
g) $V = P_2$; W es el subespacio de P_2 generado por {x +1 ; x^2+1}

Ejercicio 18: Proponga ejemplos teniendo en cuenta las condiciones pedidas.

i. Para $V = R^3$
a) Un subconjunto de vectores L.I. pero no base de V.
b) Una base no canónica de V.
c) Un subconjunto de vectores que genere pero no sea base de V.
d) Una base no canónica de V.
e) Un subespacio de V de dimensión 1.
f) Un subespacio de V de dimensión 2.
g) Un subespacio de V de dimensión 3.
h) Un subconjunto de V que no sea subespacio.

ii. Para $V = M_{2x2}$
a) Un subconjunto de vectores L.I. pero no base de V.
b) Una base no canónica de V.
c) Un subconjunto de vectores que genere pero no sea base de V.
d) Una base no canónica de V.
e) Un subespacio de V de dimensión 1.
f) Un subespacio de V de dimensión 2.

Ejercicio 19:

Sea el vector $v = (5,6)$:
a) Represente al vector v en R^2, teniendo en cuenta la base canónica: B = {(1,0); (0,1)}
b) Represente al vector v en el mismo plano y determine sus coordenadas, teniendo en cuenta la nueva base B = {(2, 1); (1, 4)}.

Ejercicio 20:

Halle las coordenadas del vector **v** en la base B del espacio vectorial indicado.
a) **v** = (1, 2); B = {(1, 1); (1, -1)} de R^2.
b) **v** = (1, 2, -1); B = {(1, 0, 1); (0, -1, 1); (2, 3, -5)} de R^3.

Ejercicio 21:

a) Halle las coordenadas del vector u = (1,4) de R^2, dado en base canónica, en la base ordenada B = {(2, 1); (-1, -2)}
b) Las coordenadas de un vector v de R^3 respecto a la base B = {(1,2,0) ; (0,2,4) ; (1,0,4)} son (2,2,3). Halle las coordenadas de v en la base B´ = {(2, 2, 0); (1, 0, 1); (3, 2, 0)}.

c) Sean B = {(0, 0, 1); (1, 2, 0); (0, 1, 1)} una base ordenada de R^3 y sea u = (1, 4, 2) un vector de R^3 expresado en la base B. Encuentre las coordenadas del vector u en la base canónica.

Ejercicio 22:

Argumente o refute cada una de las siguientes afirmaciones indicando si son verdaderas o falsas:

a) El conjunto {(0, 0, 0)} en R^3 es un conjunto linealmente dependiente.
b) Los vectores (2, 0, 1); (2, 0, 3); (0, 4, 0) forman una base de R^3.
c) El conjunto M = {A$\in$ M_{2x2}/ det(A) = 0} es un subespacio vectorial de M_{2x2}.
d) Si **u** y **v** son vectores linealmente independiente de R^3, el conjunto {**u, v, u x v**} es una base de R^3.
e) El conjunto M_{3x3} y S = {A $\in M_{3x3}$ / A es matriz antisimétrica} es un subespacio vectorial de M_{3x3}.
f) El conjunto M_{2x2} de las matrices 2x2 con elementos reales tiene dimensión 4 y una base de M_{2x2} es $\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$
g) $S=\{(x,y,z,t)\in R^4 : 2x+3y=2z\}$ es un subespacio de R^4 de dimensión 3.
h) El conjunto solución del sistema homogéneo AX= B, $A\in$ M_{mxn}, es un subespacio vectorial de R^n.
i) El conjunto $V=R^2$ es un espacio vectorial con las operaciones: (x, y) + (x', y') = (y + y′, x + x') y k.(x, y) = (ky; kx) con k$\in R$.
j) V = R^3 y S el conjunto de los de los vectores del plano: $\{(\alpha,\beta,\alpha-\beta):\alpha,\beta\in R\}$ S es subespacio de V.