Trabajo Práctico N°7: TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejercicio 1:
En cada uno de los siguientes casos, determine si la función dada es o no transformación lineal.

a) $T: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (x^2, y)$

b) $T: R^3 \to R^2 / T(x, y, z) = (x+z, 2y)$

c) $T: R^{2x2} \to R / T(A) = \det(A)$

d) $T: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (x+3, y)$

e) $T: R^3 \to R^2 / T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

f) $T: R^3 \to R^3 / T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Ejercicio 2:
Para las funciones del ejercicio 1 que sean transformaciones lineales,

a) Determine el núcleo y la imagen.
b) Encuentre una base y la dimensión del núcleo, en caso de ser posible interprete geométricamente.
c) Una base y la dimensión de la imagen. En caso de ser posible, interprete geométricamente. Además, verifique el teorema de la dimensión en cada caso.
d) Clasifique las transformaciones. Según sean monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

Ejercicio 3:
Encuentre la matriz A asociada a la siguiente transformación lineal con respecto a las bases canónicas del dominio y codominio. Describa geométricamente la transformación.

$$T: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (3x, 2y)$$

Ejercicio 4:
Encuentre la matriz M asociada a la siguiente transformación lineal con respecto a las bases $B = \{(2,0),(1,5)\}$ y $B' = \{(2,0),(1,5)\}$ del dominio y codominio respectivamente.

$$T: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (3x, 2y)$$

<u>Ejercicio 5</u>:
Encuentre la matriz P asociada a la siguiente transformación lineal con respecto a las bases $B=\{(2,0),(1,5)\}$ y $B'=\{(1,0),(0,1)\}$ del dominio y codominio respectivamente.

$$Id: R^2 \to R^2 \,/\, Id(x,y)=(x,y)$$

<u>Ejercicio 6</u>:
Encuentre la matriz P' asociada a la siguiente transformación lineal con respecto a las bases $B=\{(1,0),(0,1)\}$ y $B'=\{(2,0),(1,5)\}$ del dominio y codominio respectivamente.

$$Id: R^2 \to R^2 \,/\, Id(x,y)=(x,y)$$

<u>Ejercicio 7</u>:
Utilizando los datos obtenidos en los ejercicios 3, 4, 5 y 6, responda:
a) Calcule $P'\,P$. ¿Qué relación existe entre ellas?
b) Calcule $P'\,A\,P$. ¿Qué relación existe entre A y M?

<u>Ejercicio 8</u>:
Utilizando la matriz A del ejercicio 3, halle $T(4,10)$. Realice lo mismo pero utilizando la matriz M del ejercicio 4.

<u>Ejercicio 9</u>:
Encuentre la matriz asociada a la siguiente transformación lineal con respecto a las bases $B=\{(1,2,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$ y $B'=\{(1,3),(0,2)\}$ del dominio y codominio respectivamente.

$$T: R^3 \to R^2 \,/\, T(x,y,z)=(x+y,\, x-z)$$

<u>Ejercicio 10</u>:
Encuentre la ley de la transformación lineal $T: R^3 \to R^2$ que verifica que $T(2,1,0)=(1,1)$, $T(0,-1,0)=(-1,0)$ y $T(0,0,2)=(0,2)$. Es decir, encuentre la expresión de $T(x,y,z)$.

<u>Ejercicio 11</u>:
a) Dé un ejemplo de una transformación lineal de R^2 en R.
b) Dé un ejemplo de una transformación lineal de R^2 en R^2 cuyo núcleo sea el eje x.
c) Dé un ejemplo de una transformación lineal de R^2 en R^2 cuya imagen sea un subespacio de dimensión 1.

<u>Ejercicio 12</u>:
Para $T: R^{nxn} \to R^{nxn}$ dada por $T(A)=A-A^t$:

a) Verificar que es una transformación lineal,
b) Determine el Núcleo (para n=3). ¿Qué nombre reciben las matrices que pertenecen al núcleo de la transformación lineal?

c) Determine la Imagen (para n=3). ¿Qué nombre reciben las matrices que pertenecen a la imagen de la transformación lineal?

d) Determine la dimensión de Núcleo e Imagen y verifique teorema de la dimensión (para n=3).

Ejercicio 13:

Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Si $T: R^8 \to R^5$ es una transformación lineal, entonces su matriz asociada (con respecto a cualquier par de bases) es de orden 8x5.

b) Si $T: R^3 \to R^8$ una transformación lineal, entonces puede ocurrir que $\dim N(T) = 4$.

c) La función $T: R^{nxn} \to R^{nxn}$ dada por $T(A) = A + A^t$ es una transformación lineal.

d) Si A y B son matrices semejantes entonces $\det(A) = \det(B)$.

e) Si $T: R^4 \to R^7$ es una transformación lineal, entonces la dimensión de la imagen de T es como máximo 4.

f) Si $T: R^5 \to R^4$ es una transformación lineal, entonces la nulidad de T puede ser 0.

g) La matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ representa geométricamente una rotación de 180°.

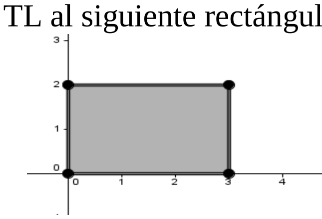
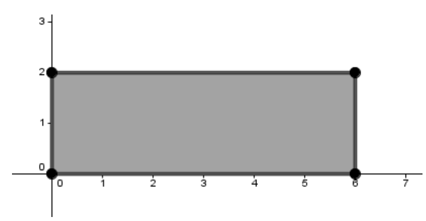
h) El operador derivación es un operador lineal.

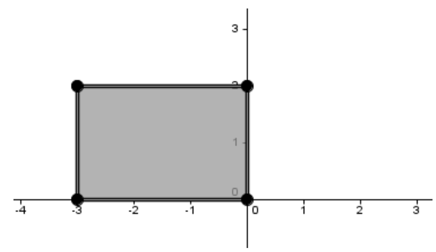
i) El operador integración es un operador lineal.

j) Sea $T: R^n \to R^m$ talque $T(X) = A_{mxn} X$ es transformación lineal.

Ejercicio 14:

Complete el siguiente cuadro:

Transformación lineal	Matriz asociada	Región que se obtiene al aplicar la TL al siguiente rectángulo: 
$T(x, y) = (2x, y)$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	

	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
		
$T(x,y)=(x+2y,y)$		
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	
$T(x,y)=(y,x)$		

Transformación lineal	Matriz asociada	Representar el transformado del cubo de vértices: $P_1(0, 0, 0)$ $P_5(0, 0, 1)$ $P_2(1, 0, 0)$ $P_6(1, 0, 1)$ $P_3(0, 1, 0)$ $P_7(0, 1, 1)$ $P_4(1, 1, 0)$ $P_8(1, 1, 1)$
$T: R^3 \to R^3$ dada por: T (x, y, z) = (-x, y, z)		