Trabajo Práctico Nº8: <u>VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS. DIAGONALIZACIÓN</u>.

<u>Ejercicio 1</u>: Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, muestre que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A e indique a qué valor propio está asociado.

<u>Ejercicio 2</u>: Para las siguientes transformaciones lineales de R^2 en R^2, halle los valores y vectores propios e interprete geométricamente.

a) Reflexión de un vector con respecto al eje x.
b) Rotación de ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

<u>Ejercicio 3</u>: Para las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Encuentre:

i. Los valores propios.
ii. Los espacios propios asociados a cada valor propio.
iii. Una base y la dimensión de los espacios propios.
iv. Interprete geométricamente cada caso.

<u>Ejercicio 4</u>: Demuestre que:

a) La ecuación característica de una matriz A de orden 2 se puede expresar como $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$.
b) Sea A una matriz inversible. Si λ es un valor propio de A y v es un vector propio asociado a λ, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1} y v es un vector propio asociado a $\frac{1}{\lambda}$.
c) Si v es un vector propio de A asociado a λ y k es un escalar no nulo, entonces kv es vector propio de A asociado a λ.

<u>Ejercicio 5</u>: Complete, de ser posible, la siguiente tabla, teniendo en cuenta que P es una matriz que diagonaliza a A y que D es la matriz diagonal semejante a A obtenida a partir de P.

Matriz A	Valores propios	Vectores propios L.I.	¿Es A diagonalizable?	Matriz P, si existe	Matriz D, si existe
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$					

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$					
	$\lambda_1=\lambda_2=1$ $\lambda_3=3$	$v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,			
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$					

Ejercicio 6: Proporcione un ejemplo de una matriz A de orden 2 que verifique además la condición requerida en cada caso:

a) A tiene valores propios distintos y es diagonalizable.
b) A tiene valores propios iguales y no es diagonalizable.
c) A tiene valores propios iguales y es diagonalizable.
d) A es inversible y es diagonalizable.
e) A es inversible y no es diagonalizable.
f) A no es inversible y es diagonalizable.
g) A no es inversible y no es diagonalizable.

Ejercicio 7: Encuentre, en cada caso, una matriz P que diagonalice ortogonalmente a la matriz A y determine $P^{-1}AP$.

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,
b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 8: Si A es una matriz de orden n, argumente la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Si A es equivalente por filas a B, entonces A y B tienen los mismos valores propios.
b) A y A^T tienen los mismos valores propios.
c) A y A^T tienen los mismos vectores propios.
d) Si A y B son matrices semejantes, entonces sus trazas son iguales.
e) Si la multiplicidad algebraica de cada valor propio de A es 1, entonces A es diagonalizable.
f) Si A tiene valores propios repetidos, entonces A no es diagonalizable.
g) Si el rango de A es n, entonces A es diagonalizable.
h) Si A es diagonalizable ortogonalmente, entonces A es simétrica.

Ejercicio 9: En cada caso, indique la única respuesta correcta:

a) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces:
   i- $det(A - \lambda I) = det(B - \lambda I)$
   ii- A y B son diagonalizables.
   iii- A y B son inversibles
   iv- Ninguna respuesta anterior es correcta.

b) Si A es una matriz de orden 3 con valores propios 0, 3 y -1, entonces:
   i- A es equivalente por filas a la identidad.
   ii- A es diagonalizable.
   iii- $tr(A) = 0$.
   iv- Ninguna respuesta anterior es correcta.

c) Si A es una matriz de orden n tal que $A = A^T$, entonces:
   i- A es inversible.
   ii- A es diagonalizable ortogonalmente.
   iii- A es ortogonal.
   iv- Ninguna respuesta anterior es correcta.

Ejercicio 10: Sea A una matriz de orden 2 cuyos valores propios son -1 y 2. Complete o responda según corresponda:

a) $det(A - 2I) =$……………..
b) ¿Qué puede asegurar acerca de $det(A - 3I)$?
c) Los valores propios de $B = -3A$ son ……………………….
d) Los valores propios de A^T son ……………………..
e) $det(A^T + I) =$……………….
f) Si M es una matriz semejante a A, entonces sus valores propios son ………………
g) ¿A es inversible? Justifique su respuesta. En caso de serlo, los valores propios de A^{-1} son …………………..
h) $traza(A) =$…………………
i) $det(A) =$……………………
j) ¿A es diagonalizable? Justifique su respuesta.