TRABAJO PRÁCTICO N° 2
DETERMINANTES

Ejercicio Nº 1: Dada la matriz *M*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

a) Escriba tres productos elementales, indicando el número de inversiones y signos para cada uno de ellos.
b) Determine el número total de productos elementales.
c) Halle los productos elementales determinados en el ítem **a)**, si $a_{ij} = (-1)^i (j-i)$.

Ejercicio Nº 2: Evalúe los siguientes determinantes utilizando propiedades. Justifique.

a) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & -10 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Ejercicio Nº 3: Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$ calcule, usando propiedades, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} + 2a_{11} & a_{32} + 2a_{12} & 3a_{33} + 2a_{13} \end{vmatrix}$

Justifique sus respuestas.

Ejercicio Nº 4: Dada la matriz *A*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre los menores M_{21} y M_{33} de la matriz *A*.
b) Determine los cofactores C_{21} y C_{33} de la matriz *A*.

Ejercicio Nº 5: Calcule los determinantes de las siguientes matrices mediante el desarrollo de cofactores y aplicando la regla de Chío.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio Nº 6: Aplique propiedades de determinantes para demostrar las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Ejercicio Nº 7 : Determine si las siguientes matrices son invertibles. En caso afirmativo calcule la inversa.

a) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio Nº 8: Considera la matriz *M*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine para que valores de *k* la matriz *M* no es inversible.
b) Calcule de ser posible la matriz inversa de la matriz *M*, para *k*= 2.

Ejercicio Nº 9: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Demuestre las verdaderas y proporcione contraejemplos para las falsas.

a) Si A es una matriz antisimétrica de orden nxn entonces, $\det(A) = (-1)^n \det(A)$.
b) Si A es una matriz de orden nxn entonces, $\det(-A) = -\det(A)$.
c) Si A y B son matrices de orden nxn, entonces $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.
d) Si A es una matriz ortogonal de orden nxn, entonces $\det(A) = \pm 1$.
e) Si A y B son matrices de orden nxn, entonces $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$.
f) Si A es una matriz de orden nxn, entonces $\det(A^2) = \det(A.A^t)$.
g) Si A y B son matrices de orden nxn y $B= P^{-1}AP$, entonces $\det(B) = \det(A)$.
h) Si A es una matriz de orden nxn y k un número, entonces $\det(kA) = k^n\det(A)$.
i) Si A y B son matrices de orden nxn y $B= kA^{-1}$, entonces $\det(B) = 1/(k^n\det(A))$.
j) Si A es una matriz de orden nxn, entonces $\det(Adj(A)) = \det(A)^{n-1}$.

Ejercicio Nº 10: Sean A y B matrices de orden 2x2 tal que $\det(A) = -3$ y el $\det(B)= 3$, complete usando propiedades y justifique en cada caso.

$a)\ \det(5A - 8A) =$

$b)\ \det\left(\frac{1}{2}A^3\ B\right) =$

$c)\ \det(-B) - \det(B) =$

$d)\ \det\left(\left(\frac{1}{3}A\right)^{-2}\right) =$

$e)\ \det\left((AB)^t\right) =$

$f)\ \det\left((4BA)^{-1}(2AB)^2\right) =$