TRABAJO PRÁCTICO Nº 5

ESPACIOS VECTORIALES

EJERCICIO Nº 1 - Sea el conjunto IR^2, en el cual se han definido las siguientes leyes:

Adición	$(x ; y) + (x' ; y') = (x + x' + k ; y + y' + k)$
Multiplicación por un escalar	$k . (x ; y) = (kx ; ky)$, $k \in IR$

a) Sabiendo que el conjunto IR^2 respecto de la adición así definida tiene estructura de grupo conmutativo, es decir verifica los axiomas 1 al 5, determine: el elemento neutro y el elemento opuesto respecto de esta primer ley

b) Muestre que respecto de la segunda ley, no se verifican los axiomas referidos a las propiedades distributivas de la multiplicación por un escalar respecto de la adición en IR^2 y respecto de la adición en IR, es decir los axiomas 7 y 8.

EJERCICIO Nº 2 - Sea el conjunto V, en el cual se ha definido la adición usual y la multiplicación externa indicada. Determine si V con las leyes definidas tiene estructura de espacio vectorial real, teniendo en cuenta que el conjunto V verifica todos los axiomas respecto de la primera ley, es decir los axiomas 1 al 5

a) $V = IR^3$ Multiplicación por un escalar $k . (x ; y ; z) = (kx ; ky ; k)$

PROPIEDADES

EJERCICIO Nº 3 - Demuestre las siguientes propiedades de los espacios vectoriales:

a) En todo espacio vectorial real, el vector nulo, (elemento neutro respecto de la primera ley) es único.

b) Sean u, v y w vectores de V, si $u + v = u + w$, entonces $v = w$.

SUBESPACIOS

EJERCICIO Nº 4 - Sea V un espacio vectorial real, respecto de la adición y la multiplicación por un escalar usual. Determine si los siguientes subconjuntos de V son subespacios vectoriales de V

a) $V = IR^2$ $S = \{(x ; y) / x = 1\}$

b) $V = P_2$ $S = \{o / o \; es \; el \; polinomio \; nulo\}$

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE

EJERCICIO Nº 5 - Dados los siguientes espacios vectoriales reales V respecto de la adición y la multiplicación por un escalar usuales. Determine si los siguientes subconjuntos de V son o no subespacios vectoriales de V

a) $V = IR^{2x2}$ $S = \{ A \in IR^{2x2}$ y A es inversible $\}$

b) $V = IR^4$ $S = \{ (x, y, z, t) \in IR^4 / x - y = 0 \wedge z - 2t = 0 \}$

c) $V = M_2$ $s = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in IR^{2x2} / a = b \wedge c = d \right\}$

d) $V = IR^4$ S : es el conjunto solución del SEL $\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases}$

EJERCICIO Nº 6 - Sabemos que R^3, con la suma y la multiplicación por un escalar es un espacio vectorial real, demuestre que todo plano que pasa por el origen, toda recta que pasa por el origen y el conjunto formado por el mismo origen, son subespacios vectoriales del espacio R^3.

COMBINACIÓN LINEAL

EJERCICIO Nº 7 – Encuentre una combinación lineal de los vectores u y v que exprese a w:

a) u = (1; 2; –3) v = (–1; –3; 2) y w = (3; 7; –8)

EJERCICIO Nº 8 - Represente gráficamente los vectores u = (2, -3) ; v = (1, 0) ; w = (-3 , -1) en IR^2, encuentre los escalares a y b que verifican que w = a u + b v. Grafica los vectores a u y b v y súmalos. Determine la dependencia lineal de dichos vectores.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

EJERCICIO Nº 9 - Determine cuales de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes, en caso de no serlo, exprese uno de ellos como combinación lineal de los otros.

a) $V = IR^3$ S = {(0, 0, 4) ; (0, 2, 0) ; (0, 1, -2)}

b) $V = P_2$ $S = \{ 1-x^2 ; 1+x ; x^2-x ; x^2+x \}$

EJERCICIO Nº 10 - Dados los siguientes planos y + (k+1) z = 0 ; k x + z = 0 ; (k-1) y = 0 . Determina el valor de k para que los planos sean linealmente dependientes.

CONJUNTO GENERADOR, BASE Y DIMENSIÓN

EJERCICIO Nº 11 . Determine el subespacio de V generado por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores

a) V = IR^3 S = { (2, 2, 3) ; (- 1, - 2, 1) ; (0, 1, 0) }

b) V = P_2 S = { x +1 ; x^2+1 }

c) $V = M_2$ S = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

EJERCICIO Nº 12 - Considere el conjunto solución de los siguientes sistemas homogéneos

$$a)\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+2z=0 \\ 3x+3y+z=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 3x+3z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$$

Determine para cada uno de ellos:

a) un sistema generador

b) una base

c) indique la naturaleza del lugar geométrico que representa el conjunto solución

EJERCICIO Nº 13 - Determine una base para el subconjunto W del espacio vectorial V dado en cada caso e indique su dimensión.

a) V = IR^4 W = { (2 a, b, a+3b , c) $\in$ IR^4 }

b) V = IR^{2x2} W = { A $\in$ IR^{2x2} / A es matriz diagonal }

EJERCICIO Nº 14 - Para V = M_{2x3} y V = IR^3. De un ejemplo de:

a) Un subconjunto de vectores de V, que lo genere pero que no sea base

b) un subconjunto de vectores de V linealmente independientes pero que no sea base.

c) Una base no canónica de V

d) Un subespacio de V de dimensión 1

e) Un subespacio de V de dimensión 2

f) Un subespacio de V de dimensión 3.

COORDENADAS DE UN VECTOR

EJERCICIO Nº 15 - Sea el vector u = (- 1; 1), represéntalo en IR^2, teniendo en cuenta la base canónica, dibuja en el mismo plano la base B = {(2, 1) ; (1, 2)} y determina las coordenadas del vector u en esta nueva base de IR^2.

EJERCICIO Nº 16 - Sean B = {(1, 0, -1) ; (-1, 1, 0) ; (1, 1, 1)} una base ordenada de IR³ y sea $u_B = (6,-3,2)$ un vector de IR³. Encuentre el vector u en la base canónica

EJERCICIO Nº 17 - Halle las coordenadas de los vectores (2, - 5) , (- 3, 2, 5) en la base indicada.

a) En V = IR² : B = { (- 1, 0) ; (3, 2) }

b) En V = IR³ : B = { (1, 2, 3) ; (1, 1, 0) ; (0, 1, 2) }

EJERCICIO Nº 18 - Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) S = {(1, 0, -1) (1, 1, 1)} genera a IR².

b) El conjunto {(0,0)} es un conjunto linealmente dependiente.

c) El conjunto M = {A ∈ M_2 / $\det(A) = 0$} es un subespacio vectorial de M_2.

d) El conjunto solución del SEL A.X = 0, con A de orden 2x4 es un subespacio de IR^4.

e) El conjunto generado por las filas de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ es un subespacio de dim 2.

f) El conjunto generado por las columnas de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ es un subespacio de dim 3.

g) Si u y v son vectores linealmente independiente de IR³, el conjunto { u, v, u x v } es una base de IR³.