Álgebra y Geometría Analítica   Año 2012
FRM UTN

TRABAJO PRÁCTICO N° 6

ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERIOR

Ejercicio 1: Pruebe que el producto escalar de vectores en IR^3 es un producto interior.

Ejercicio 2: Demuestre que el espacio vectorial V = $\mathscr{P}_2$ es un espacio con producto interior para el producto definido del siguiente modo: $<p(x),q(x)> = \int_0^1 p(x).\,q(x)$.

Ejercicio 3: a) Completar la siguiente tabla siendo:

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

	Producto escalar en IR^2	$\langle u,v \rangle = u_1 v_1 + 4.u_2 v_2$
$\|u\|$		
$\|v\|$		
$d(u,v)$		
Ang(u,v)		

b) Verificar los resultados de la tabla gráficamente.
Nota: Para el producto interior ponderado usar una escala adecuada.

Ejercicio 4: Demuestre las siguientes propiedades de un E.V. con producto interior:

a) Para todo vector v de V y 0 el vector nulo $\langle v,0 \rangle = \langle 0,v \rangle = 0$ (0 escalar)

b) Para todo vector v y u de V $d(u,v) = d(v,u)$

c) Para todo vector v de V, k de R , $\|kv\| = |k| \cdot \|v\|$.

Ejercicio 5: En V = M_{2x2}, y considerando producto interior euclideano en base canónica encuentre.

a) Una matriz B ortogonal a la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b) Una matriz C de norma 1 y Ang(A,C) nulo.

c) El valor de k tal que $\|kA\| = 2$

d) Las respuestas para los incisos anteriores, son únicas?

Ejercicio 6: Encuentre el subespacio de IR^3 que describa a todos los vectores ortogonales al plano x-3y+2z = 0, considerando el producto interior euclideano. Verifique que estos son los puntos de una recta que pasa por el origen.

Ejercicio 7: Determine los ángulos interiores de un triángulo cuyos lados miden respectivamente a=1, b=1 y c=$\sqrt{3}$.

Ejercicio 8: Suponga que u, v y w son son vectores de un espacio con producto interno tales que $\langle u,v\rangle = 1$; $\|u\| = 1$; $\|v\| = \sqrt{3}$.

a) Calcule $d(u,v)$

b) Dé un ejemplo de IR^4 que verifique esta situación.

Ejercicio 9: Verifiquela desigualdad de Schwarz y la propiedad triangular entre los vectores (-2,2) y (2,1)

a)con el producto interior euclideano definido en IR^2

b) con el producto interior definido por $\langle u,v\rangle = 4.u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

Ejercicio 10: Pruebe que los siguientes conjuntos son ortonormales en los espacios indicados y con el producto interior definidos en cada uno de ellos.

a)$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$ en IR^3.

b) $\left\{\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3},-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3},\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right\}$ en $\mathscr{P}_2$.

Ejercicio 11: Dados los vectores $u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, complete con un tercer vector para obtener una base ortonormal de IR^3.

Ejercicio 12: Determine si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y justifique la respuesta.

a) Sea $A=\{(-1,1,0),(0,0,-1)\}$es un conjunto ortogonal de IR^3.
b) Sea $A=\{(1,1,0),(0,0,-1)\}$es una base ortonormal de IR^3.
c) Sea IR^3 con producto interior euclideano, para $k=\frac{1}{2}$,los vectores u = (2, 1, 3) y v = (1, 7,k) son ortogonales.
d) El vector $v=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$es un versor o vector unitario.
e) La función $\langle u,v\rangle = u_1 \cdot v_1 - u_2 \cdot v_2$, define un producto interior en IR^2.