Algebra y Geometría Analítica Año 2012 FRM – UTN

TRABAJO PRÁCTICO N° 7
TRANSFORMACIONES LINEALES

1) En cada uno de los siguientes casos determine si la función dada es o no una transformación lineal y en caso de serlo, determine su núcleo e imagen y verifique el teorema de las dimensiones.

a) T: $R^2 \to R^2$ / T(x, y) = (x^2, y)

b) S_x: $R^2 \to R^2$ / S_x (x, y) = (x, –y) que define la simetría respecto del eje X

c) R_α : $R^2 \to R^2$ / R_α (x, y) = (x cosα - y senα, x senα + y cosα)

(Esta función define la rotación de ángulo α en el sentido positivo alrededor del origen de coordenadas.)

d) T: $R^3 \to R^2$ / T(x, y, z) = (x + y, 2y)

e) T: $R^{2x2} \to R$ / T(A) = det(A), siendo det(A) el determinante de la matriz A

f) T: $P_2 \to P_1$ / T(ax^2 + bx + c) = x – a con P_n esp vect de polinomios de grado menor o igual a n

g) T: $C_{[o,1]} \to C_{[o,1]}$ / T(f(x)) = *df(x)/dx* $C_{[o,1]}$ func reales cont y dif en intervalo [0,1]

h) T: $R^3 \to R^{2x1}$ / T(x, y, z) = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

i) T: $R^3 \to R^2$ / T(x, y, z) = (0,0)

j)T: $R^{2x2} \to R$/ T ($\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$) = a+b – c – d + 1

2. Sea la transformación lineal T: $P^2 \to P^3$ / T (p(x)) = x.p(x).

a) ¿Cuáles de los siguientes polinomios pertenecen al núcleo de T?

i) x^2 ii) 0 iii) 1 + x

b) ¿Cuáles de los siguientes polinomios pertenecen a la imagen de T?

i) x + x^2 ii) 1 + x iii) 2 – x^3

3. Sea T : $R^2 \to R^2$ la transformación lineal definida como T(a,b) = (a,0).

a) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenece al núcleo de T?

i) (0,2) ii)(2,2) iii)(0,-1)

b) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenece a la imagen de T?

i) (3,0) ii) (3,2) iii) (0,1)

4. Para las siguientes funciones de R^3 en R^3, halle su expresión analítica, pruebe que son transformaciones lineales y encuentre en cada caso la imagen del segmento determinado por los puntos P = (0,0,0) y Q = (2,1,3).

a) Proyección sobre el plano xy

b) Simetría respecto del origen.

c) Simetría respecto del plano xz.

d) Simetría respecto del eje z.

5. Defina la transformación lineal T en cada uno de los siguientes casos

i) T: $R^3 \to R^2$ / T(1,0,0) = (1,0), T(0,1,0) = (0,1) y T(0,0,1) = (1,-1)
ii) T: $P_2 \to P_2$ / T(1) = 1 + x , T(x) = 3 – x^2, T(x^2) = 4 + 2x – $3x^2$
iii) : $P_1 \to P_1$ / T(t+1) = t - 1 , T(t - 1) = 2t +1
6. Sea la transformación lineal T: $R^3 \to R^2$ definida por:
T(x, y, z) = (x + y , x – z)
a) Encuentre la matriz asociada a T respecto de las bases
B = { (1,2,0),(-1,0,1),(1,1,1) } B' = { (1,3),(0,2)}
b) Determine la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas de ambos espacios.
c) determine la matriz asociada a dicha transformación para las bases B y C la canónica del codominio
d) determine la matriz asociada a dicha transformación para la canónica del dominio y B´
7. En cada uno de los siguientes casos determine la matriz asociada a la transformación lineal respecto de las bases dadas.
a) T: $R^2 \to R^2$ / T(u) = $Proy_v u$ siendo v = (2,-4) , B la base canónica de R^2
b) T: $P^3 \to P^2$ / T($p(x)$) = $d\, p(x)\_/dx$, B ={ 1, x, x^2, x^3 } y B'= { 1, 1 + x, 1 + x + x^2 }

8. La transformación lineal f: $R^3 \to R^2$ está caracterizada por la matriz A_f respecto de la base canónica.

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Determine el núcleo de f, la imagen y sus dimensiones.
b) Determine si f es inyectiva y/o sobreyectiva
9. La transformación lineal f: $R_3 \to R_3$ está caracterizada por la matriz A_f respecto de la base canónica.

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine el núcleo de f, la imagen y sus dimensiones.
b) Determine si f es inyectiva y/o sobreyectiva.
c) Determine T(1,2,3) y T(0,1,1).
10. En caso de compatibilidad, obtenga el conjunto solución del sistema en términos de una solución particular y del espacio solución del sistema homogéneo asociado.

a) x + y + 2z = -1
x + 2y - 3z + 2w = 2
2x - y + 2z = -4

b) 2x + 5y - 8z + 6w = 5
4x + y + 6z = -6
3x + 4y - 5z + 2w = 4

c) x + y + z = 1
y + 2z = 0
2x + 3y + z = 1

11. Halle un sistema AX = B que admita a los vectores (1, 2, 0) y (0, -1, 1) como base del espacio solución de AX = 0 y al vector (1, 3, 1) como solución particular.

12. Sea $A \in R^{5x4}$ con rango 3

a) ¿Cuál es la dimensión del espacio solución del sistema AX = 0?

b) ¿AX = B es compatible para todo $B \bullet R^{5x1}$? Justifique.

13. Sea $A \in R^{4x6}$ tal que el conjunto solución del sistema AX = 0 tiene dimensión 2.

a) ¿Cuál es el rango de A?

b) ¿AX = B es compatible $\forall\ B \in R^{4x1}$? Justifique

14. Sea $A \in R^{4x4}$ con rango 4

¿El sistema AX =B es compatible determinado para todo $B \in R^{4x1}$? Fundamente su respuesta.

15. En cada uno de los siguientes casos determine la imagen del triángulo con vértices en los puntos (0,0) ; (1,1) y (1,0) describa el comportamiento de la transformación y concluya.

a) $T: R^2 \to R^2 \,/\, T(x, y) = (2x,2y)$

b) $S_x: R^2 \to R^2 \,/\, S_x(x, y) = (x, -y)$

c) $R_{30°}: R^2 \to R^2 \,/\, R_{30°}(x, y) = (x \cos 30° - y \operatorname{sen} 30°, x \operatorname{sen} 30° + y \cos 30°)$

d) $T: R^2 \to R^2 \,/\, T(x, y) = (y, x)$

e) $T: R^2 \to R^2 \,/\, T(x, y) = (|x|, 0)$

f) $T: R^2 \to R^2 \,/\, T(x, y) = (0,y)$

En la siguiente página hay definiciones y ejemplos claros con aplicaciones interesantes de tranformaciones lineales.

http://www-old.dim.uchile.cl/~docencia/algebra_lineal/material/presentacion_semana/presenta_sem08_algin.pdf

http://algebra-lineal.blogspot.com/2007/07/transformaciones-lineales-valores-y.html

http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma95-843/lecturas/l843-52.pdf

http://www.fing.edu.uy/~jana/clases/gal1_19.pdf

http://www.frsn.utn.edu.ar/tl/mov.html

http://matematicas.uis.edu.co/libros/l_lineal.pdf