TRABAJO PRÁCTICO Nº 8

Valores y Vectores Propios. Diagonalización

1) a. Comprobar que el vector $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es vector propio de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Hallar el valor propio correspondiente.

b. ¿Cuál es la acción de la matriz A sobre el vector X, según la magnitud y el signo del valor propio hallado? Realizar la interpretación geométrica correspondiente.

2) Para la siguiente transformación lineal de $R^2 \to R^2$, encontrar valores y vectores propios en forma analítica e interpretar geométricamente: Reflexión con respecto a la recta $x = 0$.

3) Interpretar la siguiente situación: Considerar una membrana elástica en el plano x-y cuya frontera es la circunferencia de radio 1. Dicha membrana sufre un estiramiento de modo tal que un punto $P(x_1,x_2)$ del plano pasa al punto $Q(y_1,y_2)$, del siguiente modo: $Y = A.X$, siendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

a. Encontrar las direcciones principales.
b. Hallar las direcciones que forman los vectores encontrados con la dirección x positiva.
c. Indicar cuáles son los factores de extensión o contracción correspondientes a la deformación elástica $Y = A.X$, donde A es $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

4) Completar los espacios en blanco en el cuadro siguiente:

Matriz A	Valores propios	Vectores propios	Matriz P	¿Es A diagonalizable? Anote la matriz D	Clasificar la matriz A. (*)
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$					

		$v_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$ $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$		$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}8&0&3\\2&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}$	$\lambda_1=9$ $\lambda_2=\lambda_3=2$				
$\begin{bmatrix}3&0&0\\1&-1&0\\0&2&3\end{bmatrix}$					

(*) Clasificar en: definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa o indefinida, según corresponda.

5) Para la siguiente transformación lineal, obtenga los valores propios y una base para cada espacio característico.

T: $IR^3 \to IR^3$ / T((x,y,z)) = (x+y+z; 2y+z; 2y+3z).

6) Demostrar:

a) Si A es diagonalizable entonces lo es A^T.
b) Si λ es valor propio de A entonces λ^3 es valor propio de A^3.
c) Si λ es valor propio de A inversible, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.
d) Si λ es valor propio de A entonces $(k\,\lambda)$ es valor propio de (kA) para $k \in R$.

7) Sea $A_{3x3}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$. Hallar A^{120}.

8) Sean las siguientes matrices: $A=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{bmatrix}$

a. ¿Son A y B matrices ortogonales? Justificar.

b.¿ Cuál de ellas corresponde a una rotación en R^2 y cuál a una reflexión en R^2? Interpretar geométricamente.

c. Probar que si una matriz Q ortogonal de nxn corresponde a una rotación entonces su determinante es 1.

d. Sean A y B matrices ortogonales de nxn, demuestrar que: $A(A^T + B^T)B = A + B$.

9) Encontrar la matriz *P* que diagonalice ortogonalmente las siguientes matrices simétricas.

A= $\begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

10) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; encontrar:

a) los valores propios de la inversa de A y los vectores propios de la inversa de A. Elaborar una conclusión.

b) los valores propios de A^T.

c) la traza de A+2I.

d)La dimensión del espacio característico correspondiente a λ_1=-2.

11) Marcar la respuesta correcta. Justificar.

a) Si A es una matriz de 3x3, det(A) = 5 y dos de sus valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$, entonces el tercer valor propio es:

1/5 • -1/5 • 0 • 5 • NRAC

b) La matriz A de 3x3 es diagonalizable si:

- Tiene un valor propio con multiplicidad algebraica 2 y otro con 1.
- Tiene un valor propio con multiplicidad algebraica 3.
- Tiene tres espacios característicos distintos.
- La multiplicidad geométrica del valor propio λ_1 es 1 y de λ_2 es 1.

c) Si A es ortogonal, entonces:

Det(A) = 0 • A es no singular tiene valores propios no nulos • NRAC

12) Completar con V o F y justificar la respuesta.

A) Si los vectores propios de una matriz A(3x3) son: $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ entonces la matriz A es diagonalizable.

B) Sea A una matriz de orden 3 cuyos autovalores son 3, -1 y 6, entonces:

- A es inversible
- A es equivalente por filas a la matriz I.
- Todo sistema de ecuaciones lineales de matriz de coeficientes A es compatible.
- Las columnas de A son vectores linealmente independientes.
- A es simétrica.
- Det(A) = -18

- Tr(A) = 8
- A es semejante a la matriz identidad.
- A es semidefinida negativa.
-

C) Si $tr(A) = tr(B)$ entonces A y B son semejantes.
D)Si A y B son semejantes entonces sus trazas son iguales.
E) Toda matriz no singular es diagonalizable
F) La matriz P que diagonaliza a una matriz simétrica es simétrica.
G) La matriz P que diagonaliza a una matriz simétrica es ortogonal.

SUGERENCIA: VER EN YOUTUBE:

- ÁLGEBRALINEALGR5 (ejemplo de cálculo de valores y vectores propios)
- VALORES Y VECTORES PROPIOS 07040688 (aplicaciones)