TRABAJO PRÁCTICO Nº 8

Valores y Vectores Propios. Diagonalización

Ejercicio 1: Comprobar que el vector: $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es vector propio de $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar el valor propio correspondiente.

Ejercicio 2: Para las siguientes transformaciones lineales de $R^2 \to R^2$, encontrar valores y vectores propios en forma analítica e interpretar geométricamente:

a) Reflexión con respecto a la recta $y = 0$

b) Proyección sobre el eje y.

Ejercicio 3: Completar los espacios en blanco en el cuadro siguiente:

Matriz A	Valores propios	Vectores propios	Matriz P	Es A diagonalizable? Matriz D	Clasificar la matriz A. (*)
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$					
	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = 3$	$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$			
$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$					
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$				D= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	
			$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	

(*) Clasificar en: definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa o indefinida, según corresponda.

Ejercicio 4: Sea A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

a) A es diagonalizable?

b) Qué vectores permanecen constantes luego de la Transformación lineal?

T: $R^2 \to R^2$ tal que

T $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Ejercicio 5: Para la siguiente transformación lineal, obtenga los valores propios y una base para cada espacio característico.

T: $IR^3 \to IR^3$ / T((x,y,z)) = (x+y+z; 2y+z; 2y+3z)

Ejercicio 6: Demostrar:

a) Si A es diagonalizable entonces lo es A^T.
b) Si λ es valor propio de *A* entonces λ^4 es valor propio de A^4.
c) Si λ es valor propio de *A* inversible, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.
d) Si λ es valor propio de *A* entonces $(k\,\lambda)$ es valor propio de (kA) para $k \in R$.
e) Si *A* es triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 7: Sea A_{2X2}, para la cual $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vector propio de $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector propio de $\lambda_2 = 2$. Hallar A^{10}.

Ejercicio 8: Probar que la matriz $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ es ortogonal.

Ejercicio 9: Encontrar la matriz *P* que diagonalice ortogonalmente las siguientes matrices simétricas.

A= $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ C= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ diagonal ;

a) Encontrar una matriz semejante a A que no sea diagonal.

b) Esta solución es única?

c) Pruebe que el determinante, la traza y el polinomio característico de A y su semejante son iguales.

Ejercicio 11: Demuestre que si A es semejante a B, entonces det (A) = det (B).

Ejercicio 12: Marque la respuesta correcta. Justificar.

a) Si A es una matriz de 3x3, det(A) = 8 y dos de sus valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 8$, entonces el tercer valor propio es:

- ½ • -1/2 • 0 • 2 • NRAC

b) La matriz A de 3x3 es diagonalizable si:

- Tiene un valor propio con multiplicidad algebraica 2 y otro con 1.
- Tiene un valor propio con multiplicidad algebraica 3.
- Tiene tres espacios característicos distintos.
- La multiplicidad geométrica del valor propio λ_1 es 1 y de λ_2 es 1.

c) Si A es ortogonal, entonces:

- Det(A) = 0 • A es singular • tiene valores propios no nulos • NRAC

Ejercicio 13: Completar con V o F y justificar la respuesta.

A) Sea A una matriz de orden 3 cuyos autovalores son -1, 0 y 2, entonces:

- A es inversible
- A es equivalente por filas a la matriz I.
- Todo sistema de ecuaciones lineales de matriz de coeficientes A es compatible.
- Las columnas de A son vectores linealmente independientes.
- A es simétrica.
- Det(A) = -2
- Tr(A) = 0
- A es semejante a la matriz identidad.
- A es la matriz asociada a algún operador lineal de IR^3.
- A es semidefinida negativa.
- Los valores propios de la inversa de A son 1, -1 y ½.

B) Sea $A \in IR^{nxn}$, diagonalizable, es decir $\exists P \in IR^{nxn}$ en forma tal que $P^{-1}AP = D \Rightarrow A^4 = PD^4P^{-1}$.

C) Si $tr(A) = tr(B)$ entonces A y B son semejantes.

D)Si A y B son semejantes entonces sus trazas son iguales.

E) Toda matriz no singular es diagonalizable

F) La matriz P que diagonaliza a una matriz simétrica es simétrica.

G) La matriz P que diagonaliza a una matriz simétrica es ortogonal.