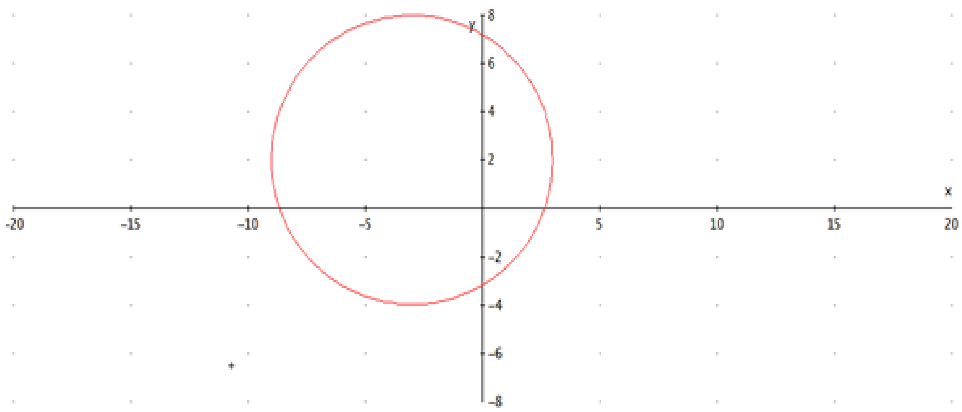
TRABAJO PRÁCTICO N°9 Aplicaciones a la Geometría

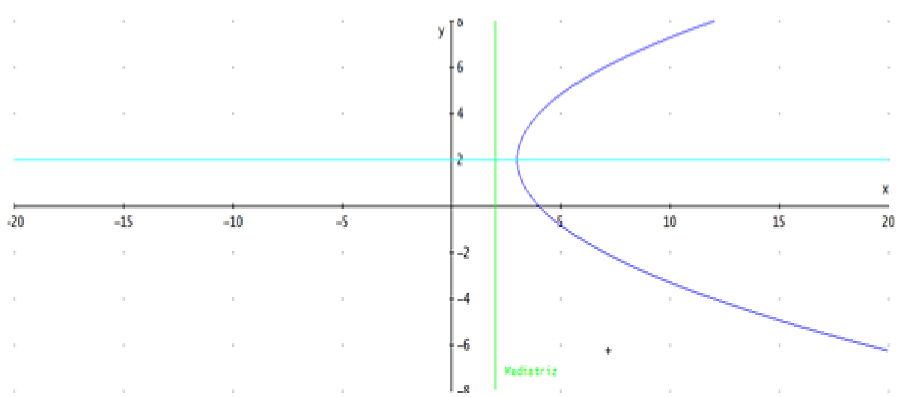
Ejercicio 1: Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro en C (-3, 2) y radio 6. Represente gráficamente. $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ $\frac{(x+3)^2}{6^2}+\frac{(y-2)^2}{6^2}=1$



Ejercicio 2: Determine el vértice V y la ecuación de la parábola que tiene como directriz la recta de ecuación x = 2 y cuyo foco está localizado en el punto F(4, 2).

- Tipo de cónica: Parábola horizontal descentrada $(y - k)^2 = 4.a.(x - h)$
- Foco: F = (4, 2) [F = (h + a, k)]
- Directriz: x = 2 D: x = h - a
- Vértice: V= (3, 2) [V = (h, k)]
- Parámetro a = 1 (distancia vértice al foco) y (distancia vértice a la directriz)

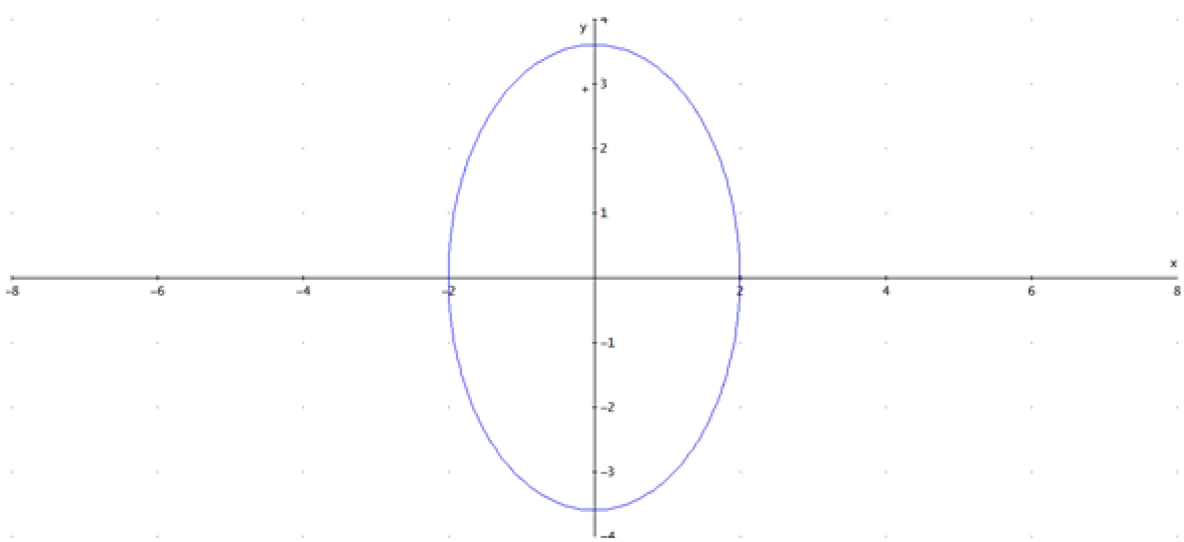
- $(y – 2)^2 = 4.(x – 3)$



Ejercicio 3: Halle la ecuación de la elipse que tiene los focos en (0, ± 3); las intersecciones con el eje x son ± 2.

- Tipo de cónica: Elipse vertical centrada $$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$
- Focos: F1 = (0, -3) y F2 = (0, 3) [F = (h, k± c)]
- Semieje menor: b = 2 (sobre eje x)
- Centro: C = (0, 0) [C = (h, k)]
- Semidistancia focal c = 3 [distancia de C a F]
- Semieje mayor: a= $\sqrt{(3^2 + 2^2)} = \sqrt{13}$ [$a^2 = c^2 + b^2$]
- Vértices: V1= (0, $\sqrt{13}$), V2 = (0, - $\sqrt{13}$) [V= (h , k± a)]

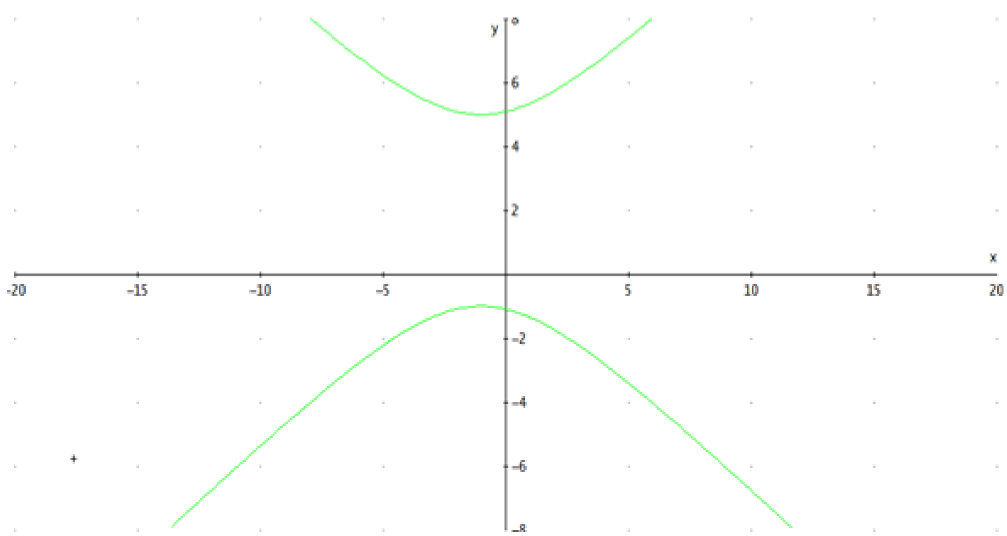
$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{13}\right)^2}=1$$



Ejercicio 4: Determine la ecuación de la hipérbola con centro en (-1, 2); vértice en (-1, 5); foco en F(-1, 7). Trace su gráfica y las asíntotas.

- Tipo de cónica: Hipérbola vertical descentrada $-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
- Centro: C = (-1, 2) [C = (h, k)]
- Vértices: V1= (-1, 5), V2= (-1, -1) [V= (h, k $\pm$ b)]]
- Focos: F1 = (-1, 7) y F2 = (-1, - 3) [F = (h, k $\pm$ c)]
- Semieje real: a = 3 [distancia deC a V]
- Semidistancia focal c = 5 [$c^2 = b^2 + a^2$]
- Semieje imaginario: b =$\sqrt{}$(5^2 - 3^2)= 4
- Asíntotas: y-2 = $\pm$ 4/3 (x +1) y – k = $\pm$a/b (x-h)

$$-\frac{(x+1)^2}{4^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1$$

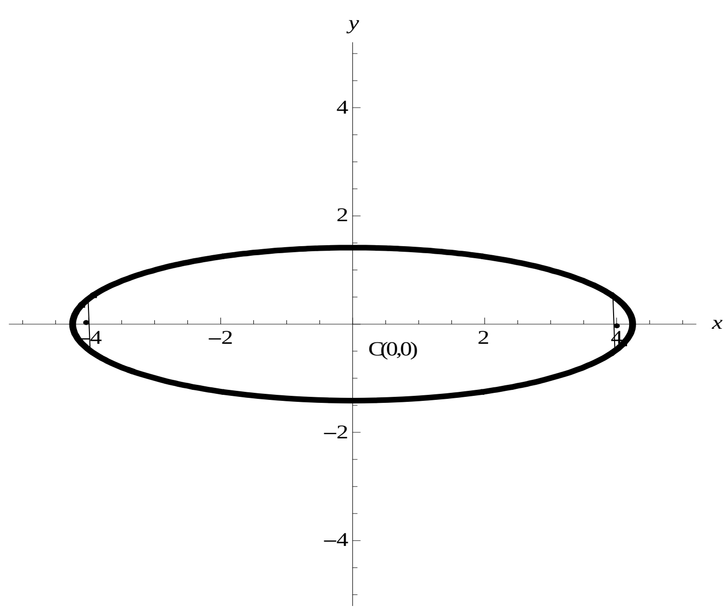


Ejercicio 5: Clasifique y encuentre los elementos de las siguientes cónicas:

a) $x^2 + 9y^2 = 18 \rightarrow$ $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$ $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{18}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$

- Tipo de cónica: Elipse horizontal centrada $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$
- Centro: C = (0, 0) [C = (h, k)]
- Vértices: V1= ($-\sqrt{18}$, 0), V2 = ($\sqrt{18}$, 0) [V= (h $\pm$ a, k)]]
- Semiejes mayor: a = $\sqrt{18}$ y semieje menor b = $\sqrt{2}$
- Semidistancia focal c = 4 [$c^2 = - b^2 + a^2$]
- Focos: F1 = (0 + 4, 0) y F2 = (- 4, 0) [F = (h $\pm$ c, k)]
- Lado recto: LR = $4/\sqrt{18}$ [LR = 2 b^2/a]
- Excentricidad: e = $4/\sqrt{18}$ [e = c/a]

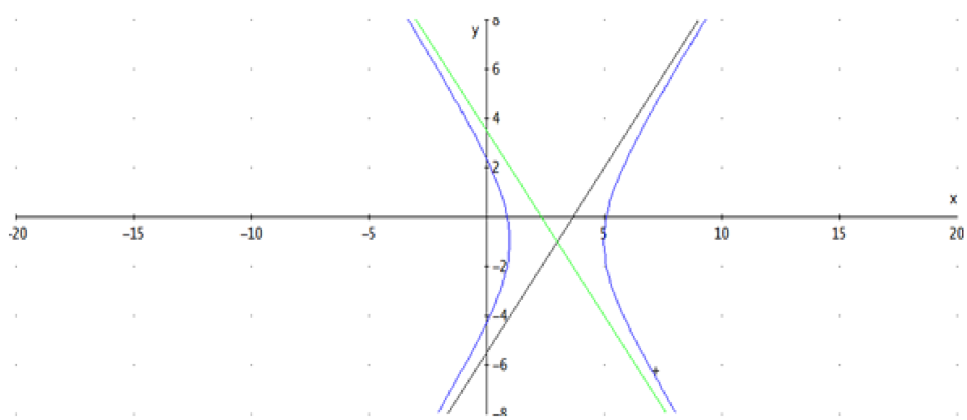
$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{18}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$$



b) $$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1 \qquad \frac{(x-3)^2}{(2)^2}-\frac{(y+1)^2}{3^2}=1$$

- Tipo de cónica: Hipérbola horizontal descentrada $\qquad \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
- Centro: C = (3, -1) $\qquad$ [C = (h, k)]
- Vértices: V1= (3 +2, -1), V2 = (-1 -2, -1) $\qquad$ [V= (h $\pm$ a, k)]]
- Semieje real: a = 2 y semieje imaginario b = 3
- Semidistancia focal c = $\sqrt{13}$ $\qquad$ [$c^2 = b^2 + a^2$]
- Focos: F1 = (3+$\sqrt{13}$, -1), F2 = (3 -$\sqrt{13}$, -1) $\qquad$ [F = (h $\pm$ c , k)]
- Lado recto: LR = 18/2 = 9 $\qquad$ [LR = 2 b^2/a]
- Asíntotas: y +1 = 3/2(x -3) ; y +1 = - 3/ 2(x - 3) $\qquad$ [y - k = $\pm$ b/a (x-h)]
- Excentricidad: e = $\sqrt{13}$/2 $\qquad$ [e = c/a]

$$\frac{(x-3)^2}{(2)^2}-\frac{(y+1)^2}{3^2}=1$$



c) $3x^2 - 3x - 2\,4y - 1 = 0$

$3(x - 1/2)^2 = 24y + 1 + 3/4$

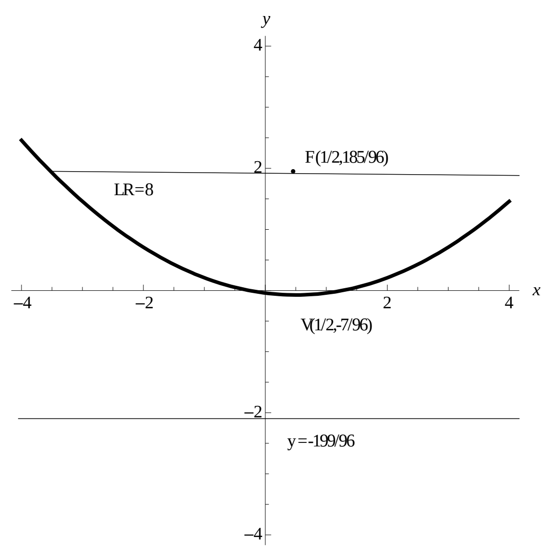
$(x - 1/2)^2 = 1/3. (24 y + 7/4)$

$(x - 1/2)^2 = 8y + 7/12$

$(x - 1/2)^2 = 8 (y + 7/96)$

$(x - 1/2)^2 = 4. 2 (y + 7/96)$

- Tipo de cónica: Parábola vertical descentrada $(x - h)^2 = 4.a.(y - k)$
- Vértice: V= (1/2, -7/96) [V = (h, k)]
- Parámetro a = 2 (distancia vértice al foco) y (distancia vértice a la directriz)
- Focos: F = (1/2, 185/96) [F = (h, k + a)]
- Directriz: y = -199/96 [D: y= k– a]
- Lado recto: LR = 8 [LR = 4a]



Ejercicio 6: Dé las ecuaciones de las siguientes cónicas graficadas

a) $(x - 3)^2 = 4. 2 (y -2)$

b) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

Ejercicio 7: Dada las ecuaciones**:**

i) $\mathbf{4x^2 + 4y^2 + 4xy - 3 = 0}$

1) Matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2) Valores y vectores propios

Para λ= 2 $\quad v1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ Para λ= 6 $\quad v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

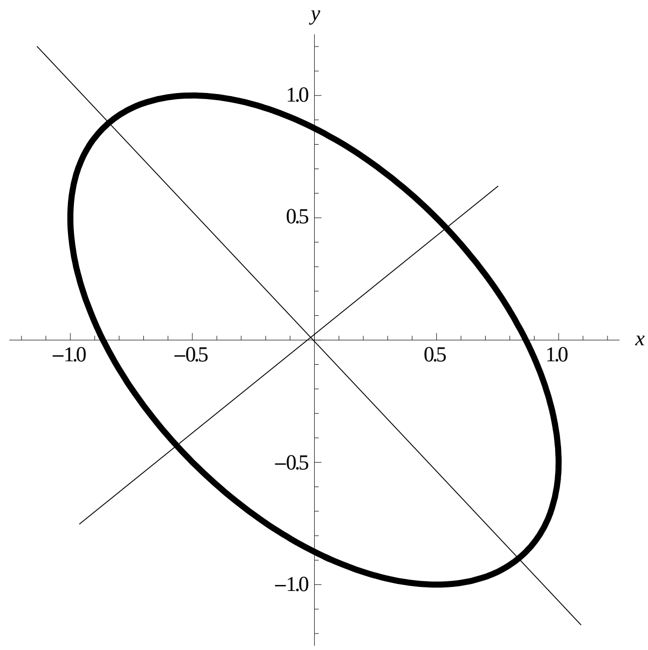
3) La matriz P para la diagonalización ortogonal es: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

4) Considerando que X = PX´, la nueva ecuación resulta: $\qquad 6x'^2 + 2y'^2 = 3$

5) Ecuación normal es: $\dfrac{(x')^2}{\left(\sqrt{1/2}\right)^2} + \dfrac{(y')^2}{\left(\sqrt{3/2}\right)^2} = 1$

- ❖ Tipo de cónica: Elipse
- ❖ Centro: C = (0, 0) $\qquad$ [C = (h, k)]
- ❖ Vértices: V1 = ($\sqrt{1/2}$, 0) , V2 == (- $\sqrt{1/2}$, 0) $\qquad$ [V= (h $\pm$ a, k)]]
- ❖ Semiejes: b = $\sqrt{1/2}$ (distancia del centro al vértice) y a = $\sqrt{3/2}$
- ❖ c = 1 (distancia del centro a un foco). $\qquad$ [$c^2 = - b^2 + a^2$]
- ❖ Focos: F1 = (1 , 0) y F2 = (-1, 0) $\qquad$ [F = (h $\pm$ c, k)]

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{1/2}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(\sqrt{3/2}\right)^2} = 1$$



ii) 4xy - 3√2 x +√2 y - 1/2 = 0

1) Forma matricial $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \end{bmatrix} = 0$

2) Valores y vectores propios para A

Para λ= 2 $v1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Para λ= -2 $v2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) La matriz P para la diagonalización ortogonal es: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

4) Considerando que X = PX´, la nueva ecuación matricial es

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \end{bmatrix} = 0$$

$2\, x'^2 - 2\, y'^2 - 2x' + 4\, y' = 1/2$

$2\,(x'^2 - x') - 2\,(y'^2 - 2\,y') = 1/2$

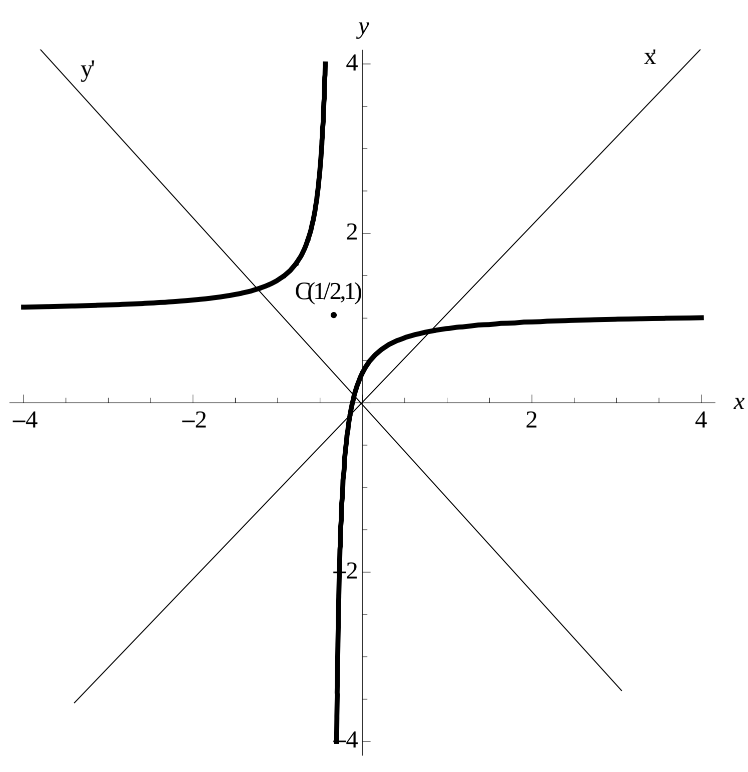
$2\,(x'^2 - x' + 1/4 - 1/4) - 2\,(y'^2 - 2\,y' + 1 - 1) = 1/2$

$2\,(x' - 1/2)^2 - 1/2 - 2\,(y' - 1)^2 + 2 = 1/2$

$2\,(x' - 1/2)^2 - 2\,(y' - 1)^2 = -1$

5) Ecuación normal es: $$-\frac{(x'-1/2)^2}{\sqrt{1/2}} + \frac{(y'-1)^2}{\sqrt{1/2}} = 1$$

- Tipo de cónica: Hipérbola equilátera
- Centro: C = (1/2, 1) [C = (h, k)]
- Vértices: V2= (1/2, 1+ √(1/2)) V2= (1/2, 1- √(1/2)) V= (h, k ± b)]]
- Semiejes: b = 1 (distancia del centro al vértice) y a = 1
- c = 1 (distancia del centro a un foco). [$c^2 = b^2 + a^2$]
- Focos: F1 = (1/2, 2) y F2 = (1/2,0) [F = (h, k ± c)]
- Lado recto: LR = (2.1/2)/√(1/2) [LR = 2 b^2/a]



Ejercicio 8: Dada la ecuación: **$2x^2 + 2y^2 + 2xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}\,y - 3 = 0$**

1) Forma matricial $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} = 0$

2) Valores y vectores propios para A

Para λ= 3 $v1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Para λ= 1 $v2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) La matriz A es definida positiva

4) La matriz P para la diagonalización ortogonal es: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Considerando que X = PX´, la nueva ecuación matricial es

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} = 0$$

$3x'^2 + 1y'^2 + 1x' - 1\,y' = 3$

$3\,(x'^2 + 1/3x') + (y'^2 - y') = 3$

$3\,(x'^2 + 1/3x' + 1/36 - 1/36) + (y'^2 - y' + 1/4 - 1/4) = 3$

$3\,(x' + 1/6)^2 + (y' - 1/2)^2 = 10/3$

5) Ecuación normal es: $\dfrac{(x' + 1/6)^2}{9/10} + \dfrac{(y' - 1/2)^2}{3/10} = 1$

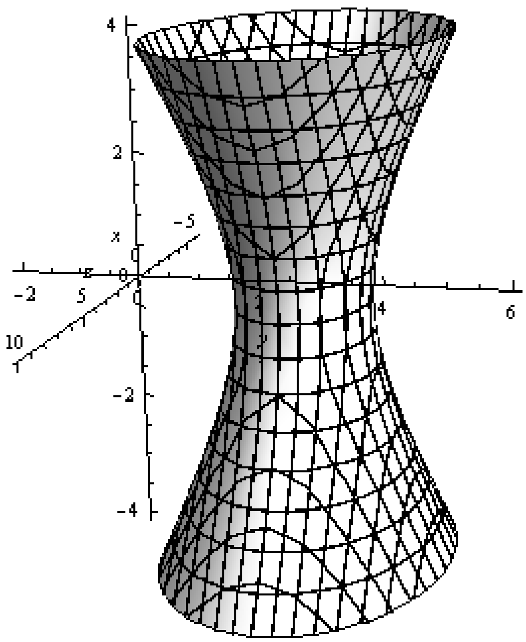
6) Ángulo entre el vector sobre el eje x (1,0) y un vector propio (1,1) es de 45º

Ejercicio 9: Halle los elementos de las siguiente cuádrica, e indique el nombre:

$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{1^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1$$

- Tipo de cuádrica: Hiperboloide de una hoja (alrededor del eje z)
- Centro: C = (2,3,0) [C = (h, k,l)]
- Vértices: V1= (4,3,0) y V2= (0,3,0); V3=(2,4,0) y V4=(2,2,0)
- Semiejes : a = 3, b=1, c=2



Ejercicio 10: Complete la siguiente tabla:

Ecuación	Nombre	Centrada	Trasladada	Rotada
$3x^2 + 2y^2 - 5z^2 - 6 = 0$	Hiperboloide de una hoja	x		
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$	Superficie esférica		x	
$5x^2+5y^2+2z^2+8xy+4xz+4yz=100$	Elipsoide		x	x
$z= -2xy$	Paraboloide hiperbólico			x
$2x^2 +3y^2 +23z^2 +7xz+150 =0$	Hiperboloide de dos hojas	x		x

Ejercicio 11: Identifique las siguientes cuádricas graficadas y dé sus ecuaciones en forma genérica.

a) Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

b) Hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

c) Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4z$

d) Paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=4z$

e) Hiperboloide de dos hoja $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$