Desarrollos ortogonales

Como ya hemos estudiado la condición para que dos funciones *distintas* g(x) y f(x), sean ortogonales entre si en un intervalo (a,b), con respecto a una función de peso w(x) es que se verifique que su producto interno sea nulo:

$$\boxed{< g(x), f(x) >= \int_a^b g(x).f(x).W(x).dx = 0} \qquad \textbf{(1)}$$

Además, del concepto de producto interno surge la definición de **norma** de una función como:

$$\boxed{\| f(x) \| = \sqrt{< f(x), f(x) >} = \sqrt{\int_a^b f^2(x).W(x).dx}} \qquad \textbf{(2)}$$

Así, podemos afirmar que un conjunto con N (posiblemente infinito) funciones $T = \{f_n(x)\}_{n=0}^{n=N}$, es un conjunto ortogonal en el intervalo **(a,b)** respecto a la función de peso **W(x)** si para cualquiera, dos funciones distintas tomadas de T se verifica **(1)**.
Es sabido también que, puesto que T es un conjunto *ortogonal de funciones* (generador de un *espacio funcional), e*s posible representar una función cualquiera **h(x)** (que pertenezca a este espacio) como una combinación lineal de las funciones de **T**, según:

$$\boxed{h(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n.f_n(x)} \qquad \textbf{(3)}$$

Denominamos a ésta, **"Serie generalizada de Fourier"**

Donde los coeficientes a_n se calculan a través de:

$$\boxed{a_n = \frac{< h(x), f(x) >}{\| f(x) \|^2} = \frac{\int_a^b h(x).f_n(x).W(x).dx}{\int_a^b f^2(x).W(x).dx}} \qquad \textbf{(4)}$$

Como puede apreciarse, todos los conceptos citados anteriormente son de carácter general en lo que respecta al tipo de funciones que pueden utilizarse para formar **T** (solo se requiere que satisfagan **(1)**).
Sin embargo cada tipo de función que se utiliza para conformar **T** determina un *espacio funcional distinto***,** o dicho de otra manera en **(3)**, las $f_n(x)$ elegidas determinan las posibles $h(x)$ que podrán obtenerse, así como el error que se obtendrá en caso de una aproximación. Esto se debe simplemente a que $h(x)$ *debe pertenecer* al espacio generado por la base $T = \{f_n(x)\}_{n=0}^{n=N}$ para poder ser escrita como una combinación lineal de las $f_n(x)$ que la conforman.
Si por ejemplo elegimos un conjunto infinito de exponenciales complejos relacionados armónicamente para formar: $T = \{e^{jnwt}(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ Obtenemos la llamada Serie de Fourier, mediante la cual podemos desarrollar *señales periódicas* de energía finita en un periodo. Si en cambio elegimos como conjunto generador a $T = \{P_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ donde $P_n(x)$ es un Polinomio de Legendre de grado n (Serie de Legendre), podremos utilizarlo en el desarrollo de funciones *seccionalmente continuas solo en el intervalo (-1,1).*

De la misma manera podemos hallar desarrollos basados en funciones de **Bessel**, **Polinomios de Tchebishev**, **Polinomios de Hermite**, **Polinomios de Laguerre**, etc...
El objetivo de este practico es esencialmente que el alumno visualice la amplitud del concepto "Desarrollo Ortogonal", mediante una pequeña introducción a algunas de las variantes citadas anteriormente. En particular:

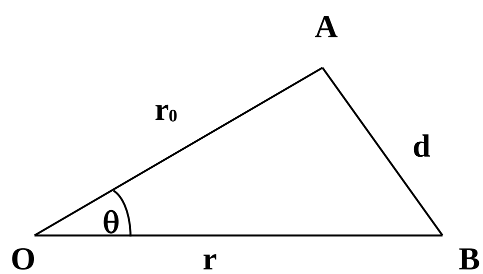
Serie de Legendre
Serie de Chebyshev
Serie de Hermite
Serie de Fourier

De estas la que más trataremos como sé verá es la **Serie de Fourier,** de amplia aplicación en ingeniería, debido a que posibilita el desarrollo de fenómenos periódicos.

POLINOMIOS DE LEGENDRE

En diversos problemas físicos (gravitación, electroestática, etc.) nos encontramos con fuerzas que dependen del inverso de la distancia entre dos cuerpos. Los polinomios de Legendre aparecen naturalmente en el problema geométrico de determinar esta distancia inversa, lo cual los vincula con numerosas situaciones de interés físico.

Función generatriz:



Consideremos dos segmentos (**r_0** y **r**) que unen un punto **O** con dos puntos **A** y **B**. Por el teorema del coseno la distancia **d** esta dada por: d = $\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}$

Si definimos:

$$x = \cos\theta \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

si $r > r_0$ y hacemos $s = \frac{r_0}{r} < 1$, se tiene

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2sx}}$$

si por el contrario $r_0 > r$ y hacemos $s = \frac{r}{r_0} < 1$, se tiene

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2sx}}$$

En ambos casos la segunda fracción es la misma y resulta ser precisamente la función generatriz de los polinomios de Legendre. Pues de su desarrollo en s, por serie de Taylor con centro en cero se obtiene:

$$\boxed{\psi(x,s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2-2sx}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)s^n} \qquad \textbf{(5)}$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de Legendre de grado n.

Observemos que si expandimos $\psi(x,s)$ por serie de Taylor ahora en el argumento m = (s^2-2sx) y centro cero, obtenemos:

$$\psi(m)=\frac{1}{\sqrt{1+m}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi(m)^n}{m!}m^n=1-\frac{1}{2}m+\frac{3}{8}m^2-...$$

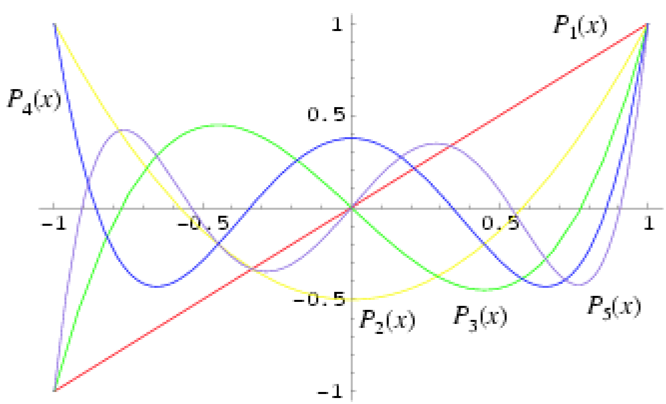
Volviendo a las variables originales.

$$\psi(x,s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2sx}}=1-\frac{1}{2}(s^2-2sx)+\frac{3}{8}(s^2-2sx)^2-...$$

$$=1+xs+\frac{1}{2}(3x^2-1)s^2-...=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)s^n$$

Lo cual nos permite encontrar expresiones explicitas para los polinomios de Legendre

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$
...



Grafica de algunos polinomios de Legendre

Algunas propiedades importantes de los polinomios de Legendre

- Puntos característicos: En **(5),** si hacemos x = 1:

$$\psi(1,s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2s}}=\frac{1}{1-s}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)s^n$$

Pero $\frac{1}{1-s}=\sum_{n=0}^{\infty}s^n$, pues s < 1 (Serie geométrica)

Comparando los coeficientes de s en ambas sumatorias se concluye que:

$$\boxed{P_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathrm{N}} \tag{6}$$

Análogamente:

$$\psi(-1,s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2+2s}} = \frac{1}{1+s} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^n$$

Ósea que:

$$\boxed{P_n(-1) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathrm{N}} \tag{7}$$

- Formula de Rodríguez: Del desarrollo por serie de Taylor de la función generatriz es posible llegar a una muy útil expresión en el tratamiento de Polinomios ortogonales, a saber la **Formula de Rodríguez**. Para el caso de los polinomios de Legendre, la relación es:

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n} \tag{8}$$

- *Ceros:* $\boxed{P_n(x) \text{ posee n ceros simples en el intervalo (-1,1)}}$ **(9)**

Sea $u(x) = (x^2-1)^n$. Entonces $u(x)$ posee ceros de multiplicidad n en x = 1 y x = -1.
Luego:
$u'(x)$ se anula una vez en (-1,1)
$u''(x)$ se anula dos veces en (-1,1)
$u'''(x)$ se anula tres veces en (-1,1)
.
.
.
$u^{(n)}(x)$ se anula n veces en (-1,1)

Y por la formula de Rodríguez se ve que si $u^{(n)}(x)$ se anula, entonces $P_n(x)$ también.

- *Paridad :* $\boxed{P_n(x) \text{ es par si n es par}}$ **(10)**

$\boxed{P_n(x) \text{ es impar si n es impar}}$ **(11)**

- *Cota:* $\boxed{|P_n(x)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathrm{N} \;\; y \;\; \forall x \in (-1,1)}$ **(12)**

- *Relación de recurrencia:* $\boxed{(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)}$ **(13)**

$$\boxed{(2n+1).x.P_n(x) = (n+1)P'_{n+1}(x) + n.P'_{n-1}(x)} \tag{14}$$

- *Resultado de utilidad:*

Puede demostrarse fácilmente utilizando la relación dada en **(13)** que,

$$\boxed{\int_0^1 P_n(x).dx = \begin{cases} 1 \to n=0 \\ 0 \to \text{n es par} \\ \dfrac{P_{n-1}(0)}{n+1} \to \text{n es impar} \end{cases}} \qquad \textbf{(15)}$$

Relación de Ortogonalidad:

Basándonos en las propiedades **(9)**, **(10)**, **(11)** y **(12)**, podemos inferir que el intervalo de la variable independiente donde se cumple la ortogonalidad será (-1,1). Si además tomamos W(x) = 1,vemos que los polinomios de Legendre cumplen con **(1)** según**:**

$$\boxed{< P_n(x), P_m(x) >= \int_{-1}^{1} P_n(x).P_m(x).dx = 0 \quad \text{para } n \neq m} \qquad \textbf{(16)}$$

Análogamente la norma según **(2)** es:

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{< P_n(x), P_n(x) >} = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x).dx} \qquad \textbf{(17)}$$

La cual resulta:

$$\boxed{\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}} \qquad \textbf{(18)}$$

Serie de Legendre:

Siendo los polinomios de Legendre ortogonales en (-1,1), puede formarse una base ortogonal $T = \{P_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ y utilizar dicha base para representar una función arbitraria $f(x)$ en (-1,1). Así es posible rescribir **(3)** para formar la "**Serie de Legendre – Fourier"** como:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.P_n} \qquad \textbf{(19)}$$

Siempre que la suma converja uniformemente y sea igual a $f(x)$. En los puntos donde $f(x)$ no es continua la **(19)** converge a $\dfrac{f(x^-) - f(x^+)}{2}$, el valor promedio de la función en ese punto.

Donde según **(4)** y **(18)** los a_n valen:

$$\boxed{a_n = \frac{< P(x), f(x) >}{\|P(x)\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x).P_n(x).dx}{\dfrac{2}{2n+1}} = (n+\frac{1}{2}).\int_{-1}^{1} f(x).P_n(x).dx} \qquad \textbf{(20)}$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Otra familia de polinomios ortogonales, también de amplia aplicación, es la conocida como los polinomios de Chebyshev. Existen dos clases de polinomios, la primera $T_n(x)$ y la segunda $U_n(x)$, de las cuales la más importante y la que veremos en nuestro caso es la primera clase.

Función generatriz:

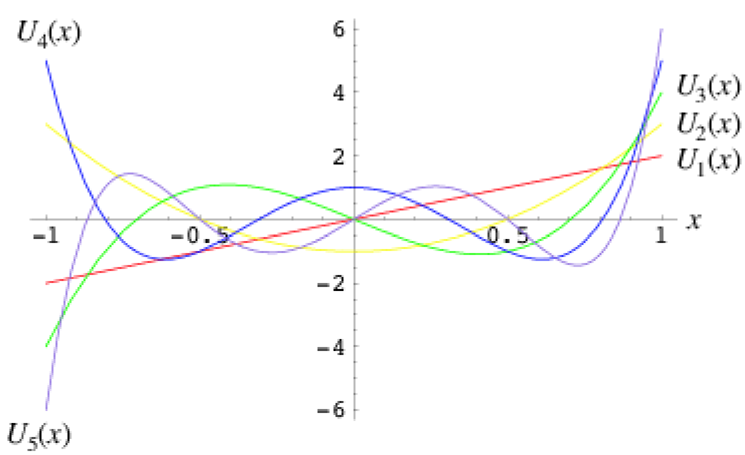
Las funciones generatrices de las dos clases de polinomios son:

$$\boxed{\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n \text{ , para -1<x<1 y } |t|<1} \text{ ; Primera clase} \qquad \textbf{(21)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n} \text{ ; Segunda clase} \qquad \textbf{(22)}$$

Análogamente a lo desarrollado con los polinomios de Legendre, es posible obtener de **(21)** expresiones explicitas de los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clase, siendo los de primera clase:

$$T_0(x)=1$$
$$T_1(x)=x$$
$$T_2(x)=2x^2-1$$
$$T_3(x)=4x^3-3x$$
$$...$$



Grafica de algunos polinomios de Chebyshev

Algunas propiedades importantes de los polinomios de Chebyshev

- Puntos característicos: En **(21),** si hacemos x = 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1-t}{1-2t+t^2} = \frac{1-t}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)}$$

Pero $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, pues t < 1 (Serie geométrica)

De donde se concluye que:

$$\boxed{T_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathrm{N}} \qquad \textbf{(23)}$$

$$\boxed{T_n(0) = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{si n es par} \\ (\text{-}1)^{\text{n/2}} \rightarrow \text{si n es impar} \end{cases}}$$

- <u>Formula de Rodríguez:</u> Para el caso de los polinomios de Chebyshev de primera clase, la relación de Rodríguez es:

$$\boxed{T_n(x) = \frac{\sqrt{\pi(1-x^2)}}{(-2)^n \Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]} \qquad \textbf{(24)}$$

- *<u>Paridad :</u>* $\boxed{T_n(x) \textit{ es par si n es par}}$ **(25)**

  $\boxed{T_n(x) \textit{ es impar si n es impar}}$ **(26)**

- *<u>Cota:</u>* $\boxed{|T_n(x)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathrm{N} \;\; y \;\; \forall x \in (-1{,}1)}$ **(27)**

<u>Relación de Ortogonalidad:</u>

Nuevamente, vemos que por **(23)** y **(27)**, el intervalo donde se cumple la ortogonalidad es (-1,1). Si además tomamos W(x) = $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, vemos que los polinomios de Chebyshev cumplen con **(1)** y **(2)** según**:**

$$\boxed{< T_n(x), T_m(x) >= \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}} dx = \left[\begin{array}{l} 0, \; m \neq n \\ \frac{1}{2}\pi, \; m = n \; (n \neq 0) \\ \pi, \; m = n = 0 \end{array}\right.} \qquad \textbf{(28)}$$

<u>Serie de Chebyshev:</u>

Puesto que los polinomios de Chebyshev son ortogonales en (-1,1), mediante la base $M = \{T_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ es posible representar una función arbitraria seccionalemente continua $f(x)$ en (-1,1) según **(3)** como:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . T_n} \qquad \textbf{(29)}$$

Siempre que la suma converja uniformemente y sea igual a $f(x)$.

La que llamaremos “Serie de Chebyshev-Fourier”. En los puntos donde $f(x)$ no es continua la **(29)** converge a $\dfrac{f(x^-)-f(x^+)}{2}$, el valor promedio de la función en ese punto.

Donde según **(4)** y **(28)** los a_n valen:

$$\boxed{a_n = \frac{<T(x), f(x)>}{\left\|T(x)\right\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{f(x).T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx}{\left\|T(x)\right\|^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x).T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx \rightarrow n \neq 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x).T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx \rightarrow n = 0 \end{cases}} \quad \textbf{(30)}$$

<u>POLINOMIOS DE HERMITE</u>

De una manera análoga a los casos anteriores, surge un tercer conjunto de polinomios que podrá ser utilizado para el desarrollo ortogonal de funciones en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Estos son los denominados polinomios de Hermite y encuentran amplio uso en distintas ramas de la ciencia como Física cuántica, Química, Criptografía, Probabilidad, etc.

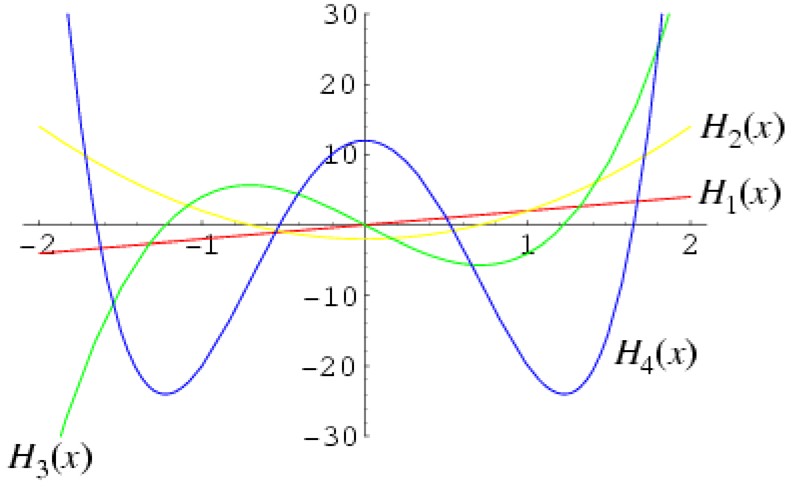
<u>Función generatriz</u>:

La función generatriz de esta clase de polinomios es:

$$\boxed{e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n!}(x)t^n} \quad \textbf{(31)}$$

Desarrollando **(31)** encontramos.

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$
$$...$$



Grafica de algunos polinomios de Hermite.

Algunas propiedades importantes de los polinomios de Hermite

- *Relación de recurrencia:* $\boxed{H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1}$ **(32)**
- Formula de Rodríguez: Para el caso de los polinomios de Hermite queda:

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]} \quad \textbf{(33)}$$

- *Paridad :* $\boxed{H_n(x) \text{ es par si n es par}}$ **(34)**

$\boxed{H_n(x) \text{ es impar si n es impar}}$ **(35)**

- *Cota:* $\boxed{|H_n(x)| < \sqrt{2^n e^{x^2} n!} \quad ; \quad \forall x \in (-1,1)}$ **(38)**

Relación de Ortogonalidad:

Para esta clase de polinomios la ortogonalidad se cumple en $(-\infty, \infty)$ y respecto a la función de peso W(x) = e^{-x^2} , luego **(1)** y **(2)** quedan :

$$\boxed{< H_n(x), H_m(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}} \quad \textbf{(37)}$$

Serie de Hermite:

Así el conjunto ortogonal $E = \{H_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ puede ser utilizado para desarrollar una función seccionalmente continua $f(x)$ en $(-\infty, \infty)$ según **(3)** como:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . H_n} \quad \textbf{(38)}$$

La que se llama **"Serie de Hermite-Fourier",**

En los puntos donde $f(x)$ no es continua **(40)** converge a $\dfrac{f(x^-)-f(x^+)}{2}$, el valor promedio de la función.

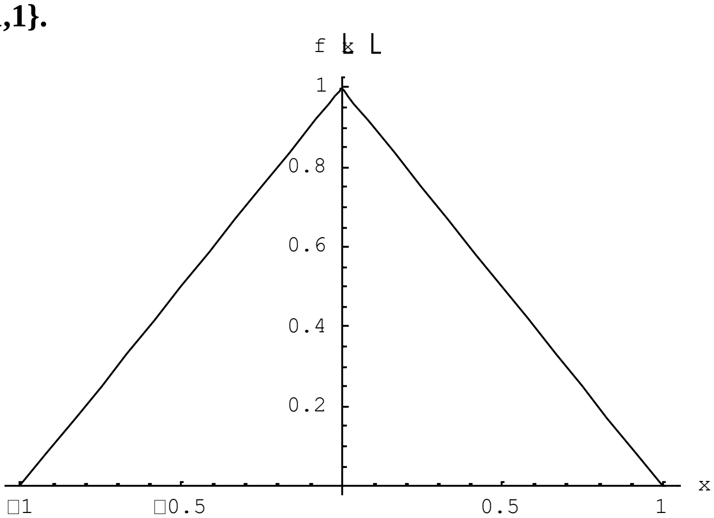
Según lo establecido en **(4)** los a_n pueden calcularse mediante:

$$\boxed{a_n = \frac{< H(x), f(x) >}{\left\|H(x)\right\|^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}dx}{2^n n!\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}dx} \qquad \textbf{(39)}$$

Ejercicios

Ejercicio Nº 1:

Hallar el desarrollo por serie de Legendre - Fourier de la función $f(x) = -|x| + 1$ **(Fig.) en el intervalo {-1,1}.**



Rescribimos la expresión general de la serie de Legendre según **(19)**: $f(x) = -|x| + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.P_n$

Donde los a_n según **(20)** valen:

$$a_n = (n + \frac{1}{2}).\int_{-1}^{1}(-|x|+1).P_n(x).dx$$

Para **n** = 0 :

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-|x|+1).P_0(x).dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-|x|+1).dx = \frac{1}{2}$$

Para **n** impar: Puesto que $f(x)$ es par y $P_n(x)$ es impar **(11)**, su producto es impar y por tanto la integral nula.

$$a_n = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1}(-|x|+1).P_n(x).dx = 0$$

<u>Para **n** par:</u> $a_n = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1}(-|x|+1).P_n(x).dx = -(n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1}|x|P_n(x).dx + (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1}P_n(x).dx = -(n+\frac{1}{2}).2.\int_{0}^{1}xP_n(x).dx$

Pues $\int_{-1}^{1}P_n(x).dx = 0$ sí $n \neq 0$, puede verse en **(16)** teniendo en cuenta que $P_0(x) = 1$.

Luego utilizando la relación dada en **(14)**, $(2n+1).x.P_n(x) = (n+1)P'_{n+1}(x) + n.P'_{n-1}(x)$ podemos escribir.

$$a_n = -(2n+1)\int_{0}^{1}xP_n(x).dx = -\left[(n+1)\int_{0}^{1}P_{n+1}(x).dx + n\int_{0}^{1}P_{n-1}(x).dx\right]$$

Utilizando el resultado dado en **(15)** se llega a:

$$a_n = -\frac{(n+1)}{(n+2)}P_n(0) - \frac{nP_{n-2}(0)}{n} = -P_{n-2}(0) - \frac{(n+1)}{(n+2)}P_n(0)$$

Así concluimos en que el desarrollo por serie de Legendre de $f(x) = -|x|+1$ es:

$$f(x) = -|x|+1 = \sum_{n=0}^{\infty}a_n.P_n$$

Donde los a_n valen:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \to n = 0 \\ -P_{n-2}(0) - \frac{(n+1)}{(n+2)}P_n(0) \to n\_par \\ 0 \to n\_impar \end{cases}$$

Los primeros 5 términos son:

$$f(x) \approx SL = \sum_{n=0}^{5}a_n.P_n = \frac{1}{2} - \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x^2\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4}x^2 + \frac{35}{8}x^4\right)$$

<u>**Ejercicio Nº 2:**</u>

Desarrollar la función del ejercicio anterior, utilizando la serie de Chebyshev –Fourier.

Rescribimos la expresión general de la serie de Chebyshev según **(31)**: $f(x) = -|x|+1 = \sum_{n=0}^{\infty}a_n.T_n$

Donde los a_n según **(32)** valen:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x).T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx$$

<u>Para **n** = 0</u> :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x).T_0(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(-|x|+1)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{-|x|}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-2\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx\right] = \frac{2}{\pi}(-2+\pi) =$$

$$= 2 - \frac{4}{\pi}$$

<u>Para **n** impar:</u> Puesto que $f(x)$ es par, $T_n(x)$ es impar **(26)** y W(x) es par, el integrando resultante es una función impar, y por tanto la integral es nula.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(-|x|+1).T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx = 0$$

<u>Para **n** par:</u>

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(-|x|+1).T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{-|x|T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx + \int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{-|x|T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx\right] = \frac{-4}{\pi}\left[\int_{0}^{1}\frac{xT_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx\right]$$

Pues $\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx = 0$ sí $n \neq 0$, puede verse en **(30)** teniendo en cuenta que $T_0(x) = 1$.

$$a_n = \frac{-4}{\pi}\left[\int_{0}^{1}\frac{xT_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}.dx\right] = \text{(queda resolver)}$$

Los primeros 5 términos son:

$$f(x) \approx SCh = \sum_{n=0}^{5} a_n.T_n = \frac{\square 2\ \square\square}{\square}\ \square\ \frac{4\ \ \square 1\ \square\ 2\ x^2}{3\ \square}\ \square\ \frac{4\ \ 1\ \square\ 8\ x^2\ \square\ 8\ x^4}{15\ \square}$$

<u>**Ejercicio Nº 3:**</u>

Desarrollar la función del ejercicio 1, utilizando la serie de Hermite –Fourier.

Rescribimos la expresión general de la serie de Hermite-Fourier según **(38)**: $f(x) = -|x|+1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.H_n$

Donde como vimos los a_n valen **(39)**: $a_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-[x]+1)H_n(x)e^{-x^2}dx$

Para **n** = 0 :

$$a_0 = \frac{1}{2^0 0!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-[x]+1)e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} -[x]e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-2\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} + \sqrt{\pi}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-2(-\frac{1}{2}) + \sqrt{\pi}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 1$$

Para **n** impar: Puesto que $f(x)$ es par, $H_n(x)$ es impar **(35)** y W(x) es par, él integrando resultante es una función impar, y por tanto la integral es nula.

$$a_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-[x]+1)H_n(x)e^{-x^2}dx = 0$$

Para **n** par:

$$a_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-[x]+1).H_n(x).e^{-x^2}dx = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} -[x]H_n(x)e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)e^{-x^2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\left[-2\int_{0}^{\infty} xH_n(x)e^{-x^2} + 0\right] = \frac{-2}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} xH_n(x)e^{-x^2}$$

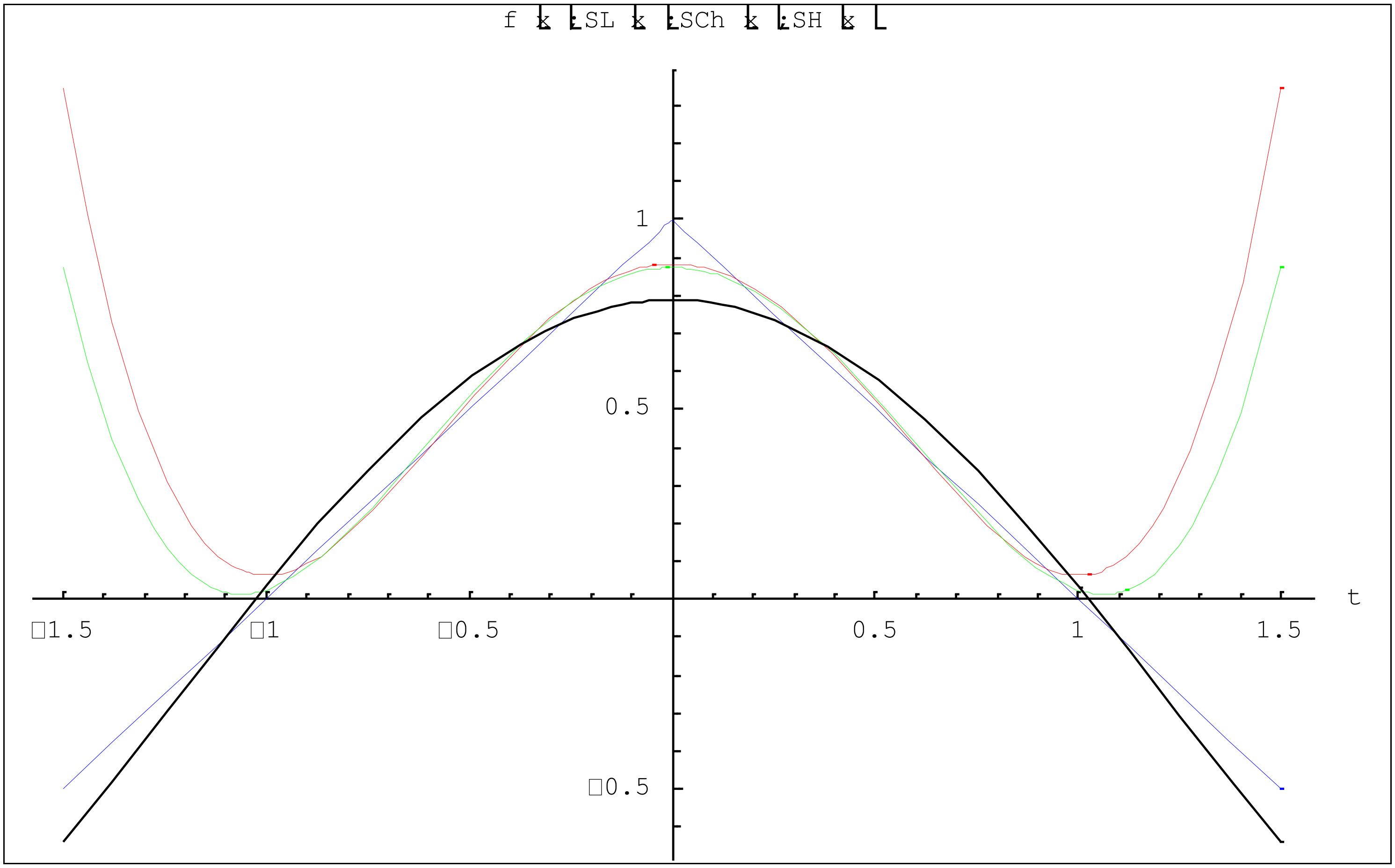
Pues $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)e^{-x^2}dx = 0$ sí $n \neq 0$, puede verse en **(37)** teniendo en cuenta que $H_0(x) = 1$.

$a_n = \frac{-2}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} xH_n(x)e^{-x^2} =$ (queda resolver)

Los primeros 5 términos son:

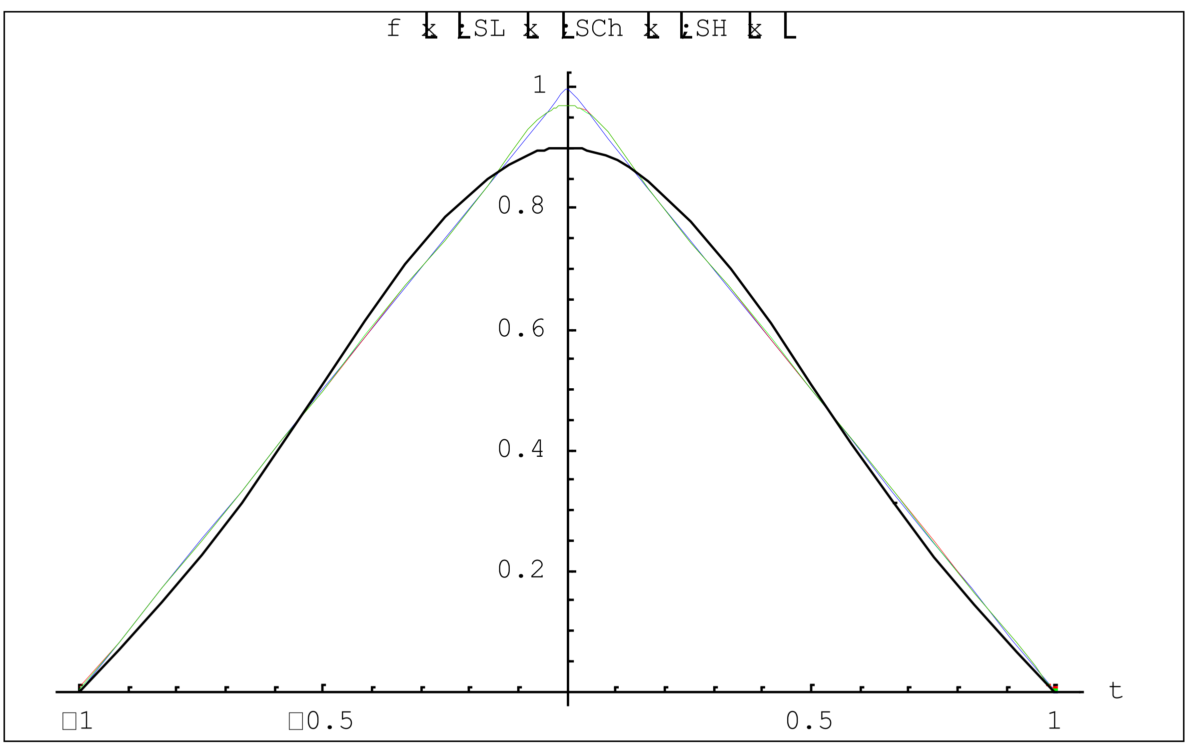
$$f(x) \approx SH = \sum_{n=0}^{5} a_n.H_n = \frac{\square 1 \square \quad \square}{\square} \square \frac{\square 2 \square 4\,x^2}{4 \quad \square} \square \frac{12 \square 48\,x^2 \square 16\,x^4}{96 \quad \square}$$

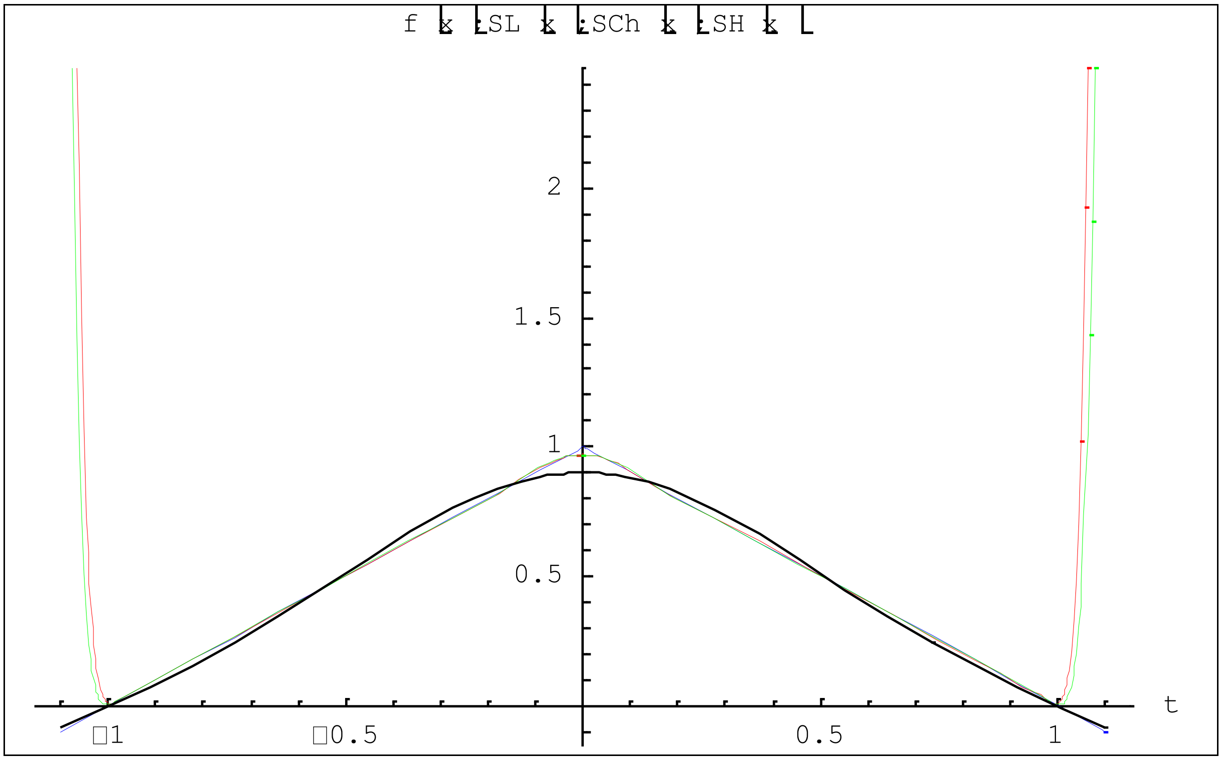
En la grafica siguiente puede verse $f(x)$ y las distintas aproximaciones logradas mediante las series desarrolladas en los ejercicios anteriores. Nótese la bondad de la aproximación con la evaluación de tan solo 5 términos de cada serie, así como la diferencia en los errores de cada una. (Error = f(x)-Serie truncada)
Nótese además que, como se estableció en su definición, la serie de Hermite permite aproximar la función en el intervalo $(-\infty, \infty)$, por otro lado las series de Legendre y Chebyshev solo aproximan a la función en el intervalo (-1,1).
Esto ejemplifica como cada base ortogonal elegida posee un intervalo de aplicación y función de peso característicos que determinan el/los tipos de funciones que podrán desarrollarse, así como el máximo error que se cometerá en caso de una aproximación.



*Función en **Azul**; Serie de Legendre en **Roj**o; Serie de Chebyshev en **Verde**; Serie de Hermite en **Negro***

Si ahora tomamos los primeros 20 términos, algo que puede realizarse fácilmente con un programa computacional, vemos la considerable mejora en la aproximación.





Las series de Legendre y Chebyshev están superpuestas debido a la pequeñez de su diferencia