ANÁLISIS DE SEÑALES Y SISTEMAS

PRIMERA PARTE: ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA

FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

Números complejos y función de variable compleja:

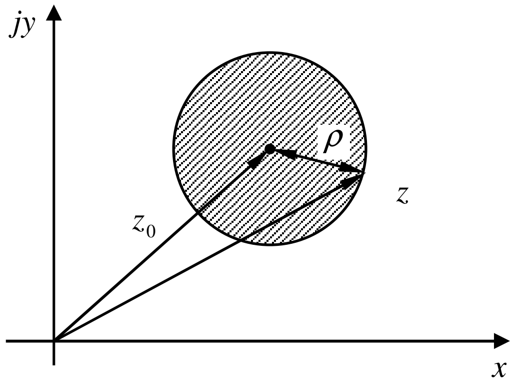
$$\boxed{w = f(z) = u + jv}$$
$$z = x + jy \;\Rightarrow\; w = u(x,y) + jv(x,y)$$

Forma polar:

$$z = \rho\cos\theta + j\rho\sin\theta \Rightarrow z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$
$$\text{Identidad de Euler: } \cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$$
$$\boxed{z = \rho . e^{j\theta}}$$

Curvas y regiones en el plano:

$$|z - z_0| \le \rho$$



Funciones de variable compleja:

Raíz enésima:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}.\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{para } k \in \{0,1,2,\ldots,(n-1)\}}$$

Complementos V.C. Pág. 20

Exponencial:

$$\boxed{e^{z} = e^{x \pm jy} = e^{x}.e^{\pm jy} = e^{x}.(\cos\theta \pm j\sin\theta)}$$

Complementos V.C. Pág. 22

Trigonométricas e Hiperbólicas:

$$\boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{jz} + e^{-jz}\right)$$
$$\cos z = \cos(x).\cosh(y) - j\sin(x).\sinh(y)$$

$$\sin z = \frac{1}{2j}\left(e^{jz} - e^{-jz}\right)$$
$$\sin z = \sin(x).\cosh(y) + j\cos(x).\sinh(y)$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1).\cos(z_2) \mp \sin(z_1).\sin(z_2)$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin(z_1).\cos(z_2) \pm \cos(z_1).\sin(z_2)$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$
$$\cosh z = \cos(jz)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$
$$\sinh z = j\sin(jz)$$

Complementos V.C. Pág. 23

Logarítmicas:

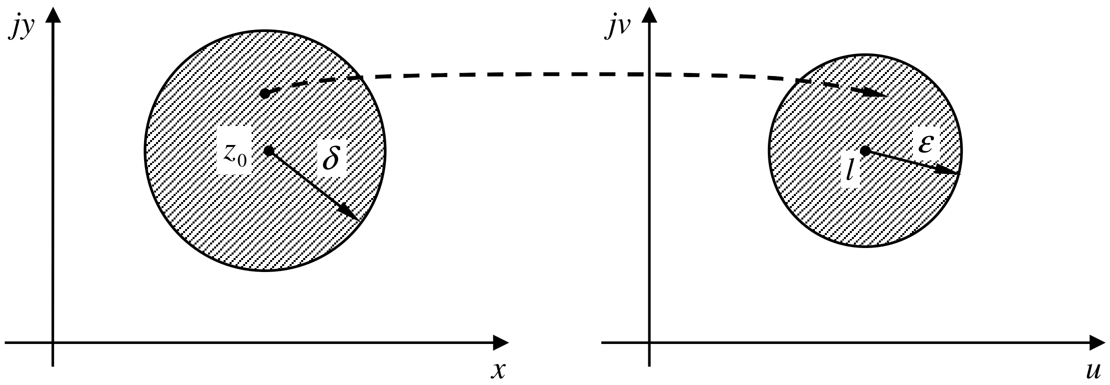
$$\boxed{a^{z} = e^{z.\ln a}}$$

$$\ln z = \ln \rho + j\theta$$

Complementos V.C. Pág. 24

Límite:

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 \Big/ \left\| f(z) - l \right\| < \varepsilon \text{ con tal de hacer que } \left\| z - z_0 \right\| < \delta$$



Complementos V.C. Pág. 11

Continuidad:

$$\text{Si } \exists f(z_0) \wedge \exists \lim_{z\to z_0} f(z) = l \wedge f(z_0) = l \Rightarrow \ f(z) \text{ es contínua en } z_0$$

Complementos V.C. Pág. 12

Derivada:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Si el límite existe, o sea, si la función es derivable

La derivada de una función compleja, cumple las propiedades de la derivada de una función real, por ejemplo la derivada de una suma o de un producto, etc.

Complementos V.C. Pág. 12

Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

Si $f(z)$ es derivable, entonces cumple las siguientes condiciones:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}}$$

```
*/ Estudiar la demostración /*
```

Complementos V.C. Pág. 15

Y en forma polar:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}}$$

```
*/ Estudiar la demostración /*
```

Complementos V.C. Pág. 16

Función analítica:

Una función es analítica en una cierta región si está definida y es derivable en dicha región. Siempre se cumple que:

$$f(z) \text{ es analítica} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

```
*/ Estudiar la demostración /*
```

Complementos V.C. Pág. 15

Ecuación de Laplace:

$$\boxed{\nabla^2 u = 0}$$

$$\text{Si } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u \text{ es armónica}$$

Teorema: "*Las funciones analíticas son armónicas*"

```
*/ Estudiar la demostración /*
```

Complementos V.C. Pág. 18

Teorema de las curvas de nivel:

Si $f(z)$ es una función analítica, siendo $f(z) = u + jv$ y $u(x,y) = \text{ctte}$ y $v(x,y) = \text{ctte}$, entonces:

$$\boxed{\text{curvas de nivel de } u \perp \text{curvas de nivel de } v}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

Integral de línea en el plano complejo:

Sea $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(y) \end{cases} (a \leq t \leq b)$ una curva en el plano complejo, en la cual $x(t)$ e $y(t)$ son funciones derivables, siendo $z(t) = x(t) + j.y(t)$.

Sea $w = f(z)$, acotada y definida dentro de C, entonces:

$$\boxed{\int_C f(z).dz = \int_a^b f[z(t)].z'.dt}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

Complementos V.C. Pág. 26

Teorema de Cauchy para funciones analíticas:

Sea $f(z)$ una ***función analítica*** en una región R, cuyo borde es una curva C cerrada y simple, entonces:

$$\boxed{\oint_C f(z).dz = 0}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

O sea: Si $f(z)$ es analítica $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} \oint_C f(z).dz = 0$

Complementos V.C. Pág. 32

Fórmula de la Integral de Cauchy:

Sea $F(z)$ una función analítica en una región R, cuyo borde es una curva C cerrada y simple, recorrida en sentido positivo, y sea $f(z) = \dfrac{F(z)}{(z - z_0)}$, analítica en R menos en el punto z_0, entonces:

$$\boxed{\oint_C f(z).dz = \oint_C \left[\frac{F(z)}{(z - z_0)}\right].dz = 2.\pi.j.F(z_0)}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

Complementos V.C. Pág. 35

Derivadas de una función analítica:

Para que exista derivada, la función debe ser analítica.

$$\boxed{F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2.\pi.j} \cdot \oint_C \left[\frac{F(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\right].dz}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

Complementos V.C. Pág. 36

SERIES Y SUCESIONES

Series: principios de la convergencia de Cauchy:

Sucesión: Colección de valores ordenados según los enteros y en función de ellos.
$Z_n = \{Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n\}$

Convergencia de una sucesión: La sucesión W_n converge a $c = a + jb$ si $\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Serie: La serie es la suma de los términos de una sucesión. $S = \sum_{i=1}^{\infty} W_i$

Condiciones necesarias para la convergencia de series:

1. $\lim_{i\to\infty} |W_i| = 0$

   / Estudiar la demostración /

2. Todos los W_n tienen que estar acotados.

   / Estudiar la demostración /

Complementos V.C. Pág. 38

Convergencia absoluta y condicional:

Dada $S = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$:Si $\sum_{n=1}^{\infty} |W_n|$ converge $\Rightarrow S$ es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

Dada $S = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$:Si converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |W_n|$ diverge $\Rightarrow S$ es CONDICIONALMENTE CONVERGENTE

Complementos V.C. Pág. 42

Criterios de convergencia de Series:

Prueba de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|W_{n+1}|}{|W_n|} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \text{La Serie CONVERGE} \\ > 1 \Rightarrow \text{La Serie DIVERGE} \\ = 1 \Rightarrow \text{NADA SE PUEDE ASEGURAR} \end{cases}$$

Prueba de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|W_n|} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \text{La Serie CONVERGE} \\ > 1 \Rightarrow \text{La Serie DIVERGE} \\ = 1 \Rightarrow \text{NADA SE PUEDE ASEGURAR} \end{cases}$$

Serie Geométrica:

Una Serie Geométrica es la que tiene la forma:

$$\boxed{S = \sum_{n=a}^{\infty} (q^n) = q^a + q^{a+1} + q^{a+2} + \ldots}$$

$$S = \lim_{m \to \infty} \frac{q^a - q^{m+1}}{(1-q)} \begin{cases} |q| < 1 \Rightarrow \text{Converge} \\ |q| \geq 1 \Rightarrow \text{Diverge} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } |q| < 1 \text{, entonces } S = \frac{q^a}{(1-q)}}$$

/ Estudiar la demostración /

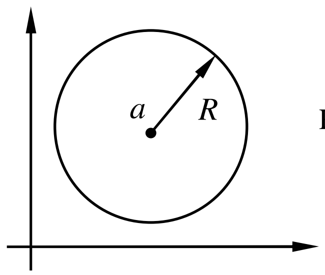
Complementos V.C. Pág. 43

Series de potencias:

Una Serie de Potencias es la que tiene la forma:

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n .(z-a)^n \right]}$$

donde C_n es el coeficiente y a es el centro de la serie.
De aquí en más no hablaremos de convergencia total, sino sólo en una cierta región de convergencia ROC.



Región de Convergencia
ROC

La región es fácil de obtener, lo cual se hace de la siguiente manera:

$$\text{ROC}: \begin{cases} \text{centro} = a \\ \text{radio} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \end{cases} \quad \text{o} \quad \text{ROC}: \begin{cases} \text{centro} = a \\ \text{radio} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{C_{n+1}}{C_n} \right|} \end{cases}$$

/ Estudiar la demostración /

Teorema:

$$\boxed{\text{Si } S \text{ converge para un } z_0 \Rightarrow \underline{\text{converge absolutamente}}\ \forall z / |z-a| < |z_0 - a|}$$

/ Estudiar la demostración /

Criterio de Unicidad:

$$\boxed{\text{Dada una función analítica } f(z) \text{ y centro } a \text{, la serie de potencias es ÚNICA}}$$

/ Estudiar la demostración / (Por el absurdo)

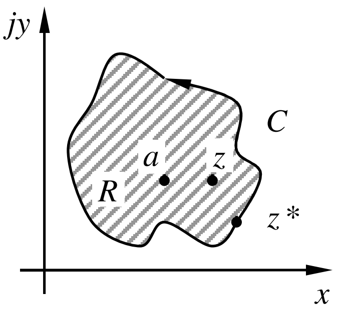
Derivación e integración término a término:

Si $f(z)$ tiene radio de convergencia $R \Rightarrow f^{(n)}(z)$ también tiene radio R.

/ Estudiar la demostración /

Complementos V.C. Pág. 45

Serie de Taylor:



Sea $f(z)$ una función analítica en R (Región simplemente conexa) y en C, entonces:

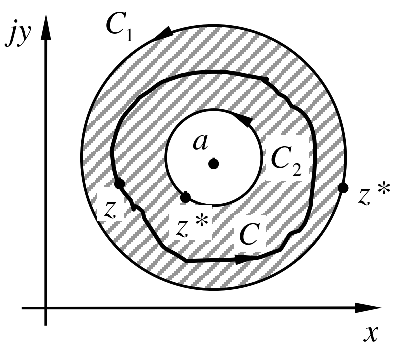
$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n}$$

```
*/ Estudiar la demostración /*
```

Corolario: $C_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Complementos V.C. Pág. 49

Serie de Laurent:



Sea $f(z)$ una función analítica entre C_1 y C_2, y en ellas (Región Múltiplemente Conexa), entonces $f(z)$ admite un desarrollo en series de la siguiente manera:

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n.(z-a)^n \text{ donde } A_n=\frac{1}{2\pi.j}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz}$$

```
*/ Estudiar la demostración /*
```

El teorema de Laurent es **generalización de Taylor**, porque si el integrando es analítico en toda la región, los coeficientes de $n<0$ se anulan.

El coeficiente A_{-1} se llama **residuo** de la serie de Laurent, y es importante porque si conozco el residuo, conozco la integral:

$$\boxed{2\pi.j.A_{-1}=\oint_C f(z).dz}$$

```
*/ Estudiar la demostración /*
```

Complementos V.C. Pág. 54

Analiticidad, ceros y polos:

Ceros:

Cero Simple:

Hay cero simple en $z=a$ si $f(a)=0$

Cero Múltiple:

Hay cero múltiple de multiplicidad m si la función y sus derivadas se anulan en el punto hasta el orden $m-1$: $f(a)=f'(a)=f''(a)=...=f^{(m-1)}(a)=0$

Polos:

Polo simple y múltiple:

Los ceros del denominador de la función son los polos de $f(z)$, por lo tanto la función no es analítica.
Si existe un polo de multiplicidad m, entonces:
$f(z)=A_{-m}.(z-a)^{-m}+\ldots+A_{-1}.(z-a)^{-1}+A_0+A_1.(z-a)+\ldots$

Singularidad Esencial:

Si el desarrollo sigue hasta $m=-\infty$ entonces hay una singularidad esencial en $z=a$

Complementos V.C. Pág. 58

Residuo:

Residuos para polos simples:

Si existe un polo simple en $z=a$:

$$\boxed{A_{-1}=\lim_{z\to a}[(z-a).f(z)]}$$

Si $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}\Rightarrow \boxed{A_{-1}=\dfrac{p(a)}{q'(a)}}$

/ Estudiar la demostración /

Residuos para polos múltiples:

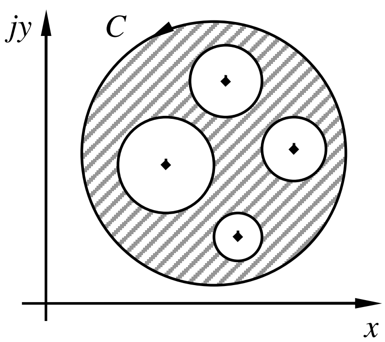
Si existe un polo múltiple de multiplicidad m en $z=a$, entonces:

$$\boxed{A_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{(m-1)}\left[(z-a)^m.f(z)\right]}{dz^{m-1}}\right]}$$

/ Estudiar la demostración /

Complementos V.C. Pág. 61

Teorema de los residuos:



Sea $f(z)$ una función con ciertas singularidades en la región cuyo borde es C, la integral es igual a $2\pi.j$ por la sumatoria de los residuos para cada singularidad:

$$\boxed{\oint_C f(z).dz=2\pi.j.\sum_{i=1}^{n}\text{Res } f(z)_{a_j}}$$

/ Estudiar la demostración /

Complementos V.C. Pág. 64

Evaluación de Integrales reales por el método de los residuos:

1) Integrales del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta).d\theta$

$$z = e^{j\theta} \Rightarrow dz = j.e^{j\theta}.d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{j.z}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{z-z^{-1}}{2j} \end{array}\right\} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2j}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta).d\theta = \oint_C f(z).\frac{dz}{j.z} = 2\pi.j.\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} f(z)_{a_j}}$$

/ Estudiar resolviendo ejemplos /

2) Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx$

Sólo si $f(x)$ es racional con el denominador de grado 2 o más unidades mayor que el grado del numerador

Coloco z en vez de x y resuelvo:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \oint_C f(z).dz = 2\pi.j.\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} f(z)_{\text{solo del semiplano superior}}}$$

/ Estudiar resolviendo ejemplos /

Complementos V.C. Pág. 66

FUNCIONES ESPECIALES Y TEORÍA DE CAMPOS

FUNCIONES ESPECIALES

Ecuación diferencial de Legèndre:

La ecuación diferencial de Legèndre es:

$$\boxed{(1-x^2).y'' - 2.x.y' + n.(n+1).y = 0} \quad n \in IR$$

Propongo una solución por series de potencias:

$$y_p = \sum_{m=0}^{\infty} C_m.x^m$$

debido a que dividiendo por $(1-x^2)$, los coeficientes son funciones analíticas en $x = 0$.
Los coeficientes de dicha serie, serán definidos a través de la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\boxed{C_{s+2} = -\frac{(n-s).(n+s+1)}{(s+2).(s+1)} C_s}$$

y si elegimos C_0 y C_1 como constantes arbitrarias, podemos obtener todos los demás.
La solución de la ecuación será:

$$\boxed{y(x) = C_0.y_1(x) + C_1.y_2(x)}$$

/ Demostrar todo /

Complementos L Pág. 1

Polinomios de Legèndre:

Los polinomios de Legèndre son las diferentes soluciones resultantes a la ecuación de Legèndre. Se definen como:

$$\boxed{P_n(x)=\sum_{m=0}^{M}(C_{n-2.m}).x^{n-2.m}}$$

donde los coeficientes son:

$$\boxed{C_{n-2.m}=(-1)^m.\frac{(2.n-m)!}{2^n.m!.(n-m)!.(n-2.m)!}}$$

con $M=\frac{n}{2}$ para n par y $M=\frac{(n-1)}{2}$ para n impar.

/ Demostrar todo /

Complementos L Pág. 4

Ecuación diferencial de Bessel:

La ecuación diferencial de Bessel de orden p es:

$$\boxed{x^2.y''+x.y'+(x^2-p^2).y=0}$$

Propongo una solución de la forma:

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m.x^{m+r} \qquad C_0\neq 0$$

Reemplazando obtenemos la recurrencia:

$\boxed{C_{2.m}=-\frac{1}{2^2.m.(p+m)}.C_{2.m-2}}$ con C_0 constante arbitraria, y todos los <u>coeficientes de índice impar son nulos</u>.

/ Demostrar todo /

Complementos B Pág. 1

La función Gamma:

Definimos la función gamma como:

$$\boxed{\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-t}.t^{\alpha-1}.dt}$$

y su recurrencia como $\Gamma(\alpha+1)=\alpha.\Gamma(\alpha)$, lo que produce que:

$$\boxed{\Gamma(k+1)=k!}$$

Complementos B Pág. 3

Volviendo a Bessel, utilizando la función gamma podemos escribir los coeficientes como:

$\boxed{C_{2.m}=\frac{(-1)^m}{2^{2.m+p}.m!.\Gamma(p+m+1)}}$ debido a que se toma $C_0=\frac{1}{2^p.\Gamma(p+1)}$

Y sustituyendo éstos coeficientes en la solución propuesta, obtenemos:

$$\boxed{J_p(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!.\Gamma(p+m+1)}.\left(\frac{x}{2}\right)^{2.m+p}}$$

"Función de Bessel de primera clase, de orden p"

/ Demostrar todo /

Complementos B Pág. 4

Funciones de Bessel de primera y segunda clase:

La segunda solución a la ecuación de Bessel, está conformada por una función de la forma:

$$\boxed{Y_p(x)=\frac{J_p(x).\cos(p.\pi)-J_{-p}(x)}{\sin(p.\pi)}}$$

"Función de Bessel de segunda clase, de orden p"

Y nos queda como:

$$\boxed{y(x)=C_1.J_p(x)+C_2.Y_p(x)} \text{ para todo } p$$

También se aplican frecuentemente las soluciones complejas de la ecuación de Bessel, llamadas funciones de Hankel de orden p:

$$\boxed{H_p^{(1)}(x)=J_p(x)+j.Y_p(x) \text{ y } H_p^{(2)}(x)=J_p(x)-j.Y_p(x)}$$

"Funciones de Hankel de orden p"

/ Demostrar todo /

Complementos B Pág. 5

TEORÍA DE LOS CAMPOS

Campos electrostáticos:

$$\boxed{\overline{E}=-\nabla\phi}$$

El campo eléctrico es igual al gradiente del potencial eléctrico cambiado de signo.

$$\boxed{\nabla^2\phi=-4.\pi.\rho}$$

Ecuación de Poisson

Complementos TP Pág. 1

Ecuación de Laplace:

De la ecuación de Poisson podemos decir que si no hay carga encerrada en la superficie, entonces:

$$\boxed{\nabla^2\phi=0}$$

Ecuación de Laplace

Propiedades:

1. Linealidad: La combinación lineal de las soluciones linealmente independientes de la Ecuación de Laplace, también es solución de la misma.
2. Unicidad: Dos soluciones de la Ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones de contorno, difieren a lo sumo en una constante aditiva.

Complementos TP Pág. 3

SEGUNDA PARTE: SEÑALES Y SISTEMAS

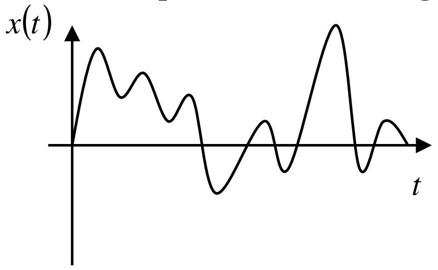
Señales

Definiciones:

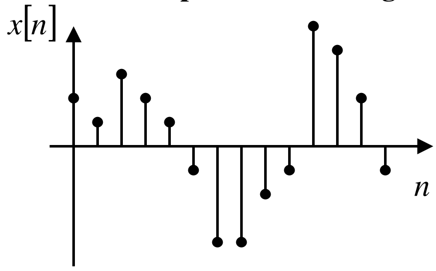
Una **señal** es toda sucesión de valores que transporte información.

Las señales pueden ser de dos tipos:

Señales de Tiempo Continuo o Analógicas



Señales de Tiempo Discreto o Digitales



Apuntes Pág. 1

Potencia y energía de las Señales:

Potencia promedio:

En un intervalo (t_1, t_2), la potencia promedio de una señal de tiempo continuo es:

$$\boxed{P = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 . dt}$$

En un intervalo $N_1 \leq n \leq N_2$, la potencia promedio de una señal de tiempo discreto es:

$$\boxed{P = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \cdot \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2}$$

Energía:

Para señales de tiempo continuo y discreto se calculan respectivamente así:

$$\boxed{E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 . dt} \text{ y } \boxed{E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2}$$

Potencia y energía para intervalos infinitos:

Tiempo continuo:

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 . dt \text{ y } E_\infty = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 . dt$$

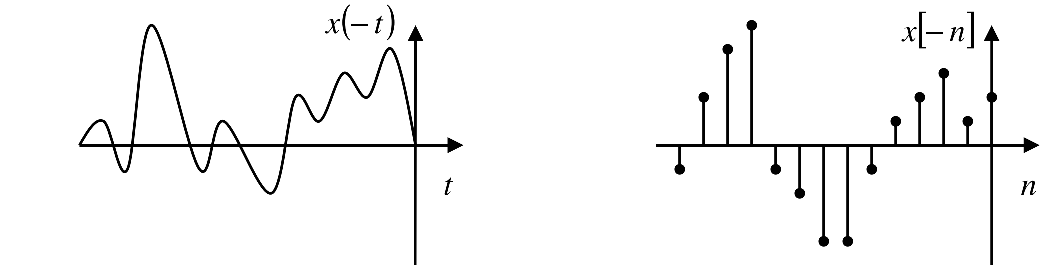
Tiempo discreto:

$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \text{ y } E_\infty = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

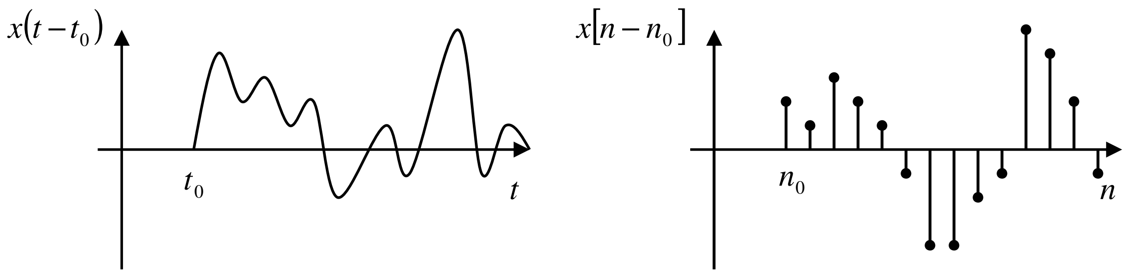
Apuntes Pág. 3

Transformaciones en la variable independiente:

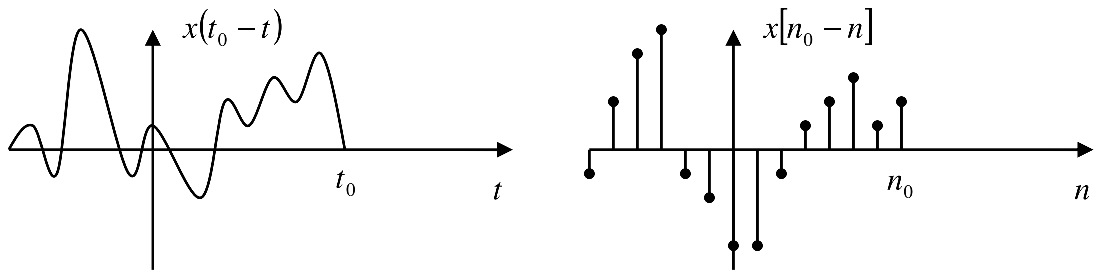
Reflexión o rebatimiento:



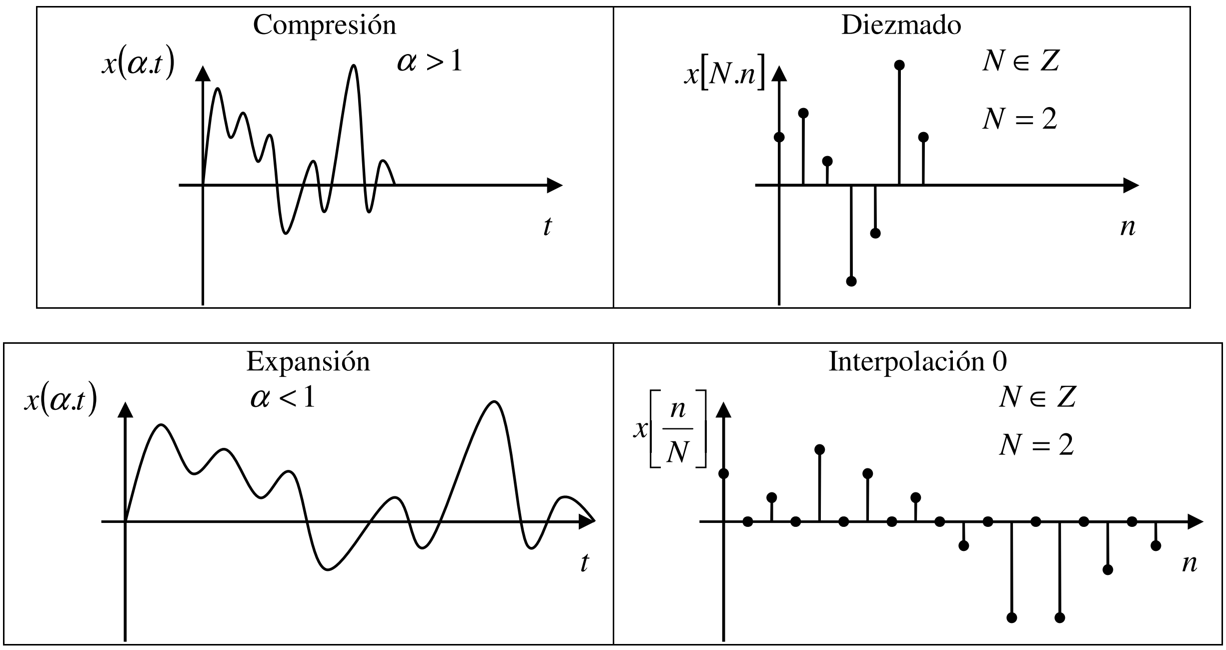
Traslación:

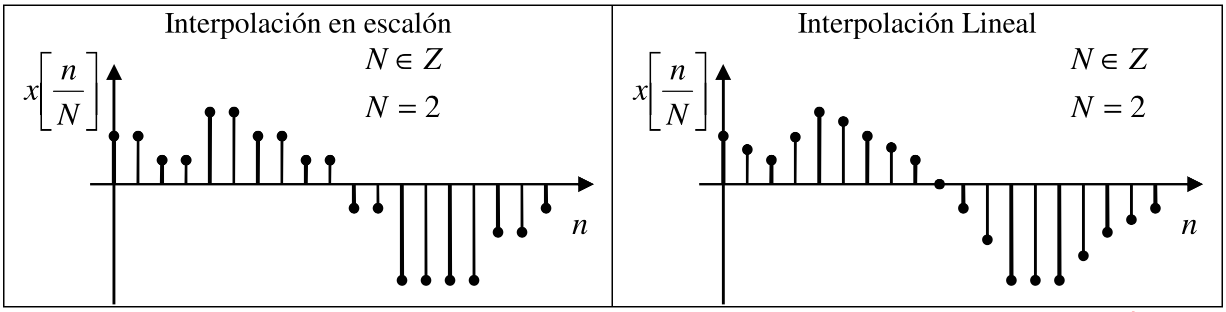


Reflexión y traslación:



Escalado:





Apuntes Pág. 5

Simetrías:

Una señal contiene simetría par cuando $x(t)=x(-t)$
Una señal contiene simetría impar cuando $x(t)=-x(-t)$

Teorema:

Toda señal arbitraria tiene una parte par y una parte impar definidas como:

$$\boxed{x_{\text{par}}(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t)) \quad \text{y} \quad x_{\text{impar}}(t)=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))}$$

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 8

Señales Periódicas:

Señal exponencial Compleja:

$$\boxed{x(t)=C.e^{j.\omega.t}=C.(\cos(\omega.t)+j.\sin(\omega.t)) \quad C\in R}$$

Apuntes Pág. 10

Señal exponencial Compleja general:

$$\boxed{x(t)=C.e^{a.t}}$$

donde ahora C y a son complejos:

$$\boxed{C=|C|.e^{j\phi}} \text{ y } \boxed{a=\sigma+j\omega}$$

$$x(t)=C.e^{a.t}=|C|.e^{j\phi}.e^{(\sigma+j\omega).t} \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t)=|C|.e^{\sigma.t}.e^{j(\omega t+\phi)}}$$

> ¡OJO!
> La señal exponencial Compleja General NO ES PERIÓDICA debido al factor $e^{\sigma.t}$, que para $\sigma<0$ la hace decrecer en amplitud y para $\sigma>0$ la hace crecer

Apuntes Pág. 14

Señal exponencial $e^{j.\omega.t}$:

$$\boxed{x(t)=e^{j.\omega_0.t}}$$

Para que sea periódica, debe cumplirse que:

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}.k \quad k\in N}$$

/ Estudiar la demostración /

Señal exponencial Compleja Discreta:

$$\boxed{x[n] = e^{j.\Omega.n}}$$

donde $\Omega = \omega.\Delta t$, y también es la frecuencia angular de la señal.

Propiedades:

1. **Periodicidad en n:**
   $x[n] = x[n+N]$ donde N es un número entero de muestras

   Para cumplir la periodicidad es necesario que la frecuencia angular sea un múltiplo racional de 2π:

   $$\boxed{\Omega = \frac{k}{N}.2\pi}$$

   `*/ Estudiar la demostración /*`

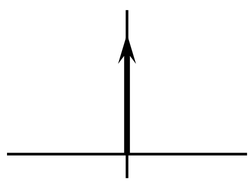
2. **Periodicidad en Ω:**

   $$\boxed{e^{j.\Omega.n} = e^{j.(\Omega+2.k.\pi).n}}$$

Apuntes Pág. 15

Funciones especiales:
Tiempo Continuo:
Impulso unitario o Delta de Dirac:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$



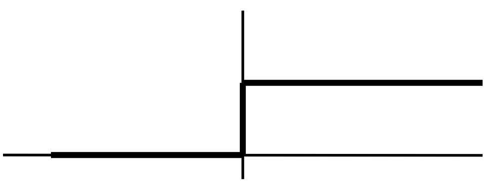
Propiedades:

1. $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).dt = 1}$
2. **Propiedad de selección:** $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0).\varphi(t).dt = \varphi(t_0)}$

Apuntes Pág. 21

Función escalón:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



Propiedades:

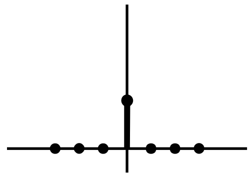
1. $\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau).d\tau}$
2. $\boxed{\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)}$

Apuntes Pág. 21

Tiempo Discreto:

Impulso unitario o Delta de Dirac:

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & \text{si } n=0\\ 0 & \text{si } n\neq 0\end{cases}$$



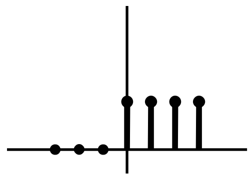
Propiedades:

1. **Propiedad de selección**: $\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k].x[k]=x[n]}$

Apuntes Pág. 20

Función escalón:

$$u[n]=\begin{cases}1 & \text{si } n\geq 0\\ 0 & \text{si } n<0\end{cases}$$



Propiedades:

1. $\boxed{u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]}$
2. $\boxed{\delta[n]=u[n]-u[n-1]}$ $\Rightarrow$ **Primera Diferencia** (Análogo de la Derivada)

Apuntes Pág. 20

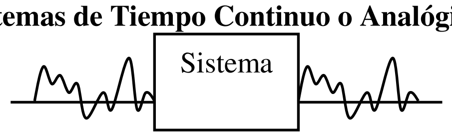
Sistemas

Definiciones:

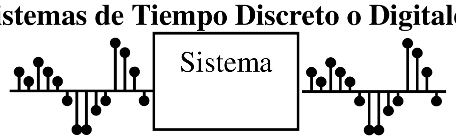
Un **sistema** es un conjunto de elementos capaces de procesar una señal.

Análogamente con las señales, existen dos tipos de sistemas:

Sistemas de Tiempo Continuo o Analógicos



Sistemas de Tiempo Discreto o Digitales



Apuntes Pág. 25

Clasificación:

Respecto de la memoria:

1. **Sistemas con memoria**: El sistema construye sus salidas con valores almacenados de entradas y salidas anteriores.
2. **Sistemas sin memoria**: La salida del sistema depende sólo de la entrada actual.

Apuntes Pág. 27

Respecto de la causalidad:

1. **Sistemas causales**: La salida no puede anticiparse a la entrada.

2. **Sistemas no causales**: La salida puede anticiparse a la entrada. Son sistemas “adivinos”.

Apuntes Pág. 28

Respecto de la variabilidad con el tiempo:

1. **Sistemas invariantes en el tiempo**: Sus propiedades no varían con el tiempo.

$$x(t) \to y(t)$$
$$x(t-t_0) \to y(t-t_0)$$

2. **Sistemas variantes en el tiempo**: Sus propiedades cambian con el paso de tiempo.

Apuntes Pág. 29

Respecto de la Linealidad:

1. **Sistemas Lineales**: A una superposición de distintas entradas, el sistema entrega una salida compuesta por la superposición de las salidas individuales de cada entrada:

Principio de Superposición

$$\begin{array}{c} x_1 \to y_1 \\ \vdots \\ x_n \to y_n \end{array} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i . x_i \to \sum_{i=1}^{n} a_i . y_i}$$

2. **Sistemas no Lineales**: No tienen comportamiento lineal

Apuntes Pág. 30

Sistemas Lineales (L.T.I.) y Convolución:

Tiempo Discreto:

Si tenemos un sistema Lineal e Invariante con el tiempo (Sistema L.T.I.), puede ser caracterizado por una función $h[n]$ llamada **Respuesta Impulsiva**, y que corresponde a la salida del sistema cuando en la entrada se coloca un impulso o Delta de Dirac. Ahora, la salida de dicho sistema, puede calcularse conociendo la entrada que vamos a aplicar y la respuesta impulsiva, aplicando una operación llamada **Convolución**, y que consiste en:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k]}$$

/ Estudiar la demostración /

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Apuntes Pág. 30

Tiempo Contínuo:

En Tiempo Continuo, la **Respuesta Impulsiva** $h(t)$ del sistema es exactamente el mismo concepto: la salida del sistema cuando en la entrada se coloca un impulso o Delta de Dirac. Ahora, la salida es la **Convolución** de la entrada y la respuesta impulsiva:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau}$$

/ Estudiar la demostración /

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Apuntes Pág. 35

Propiedades de la Convolución:

1. **Conmutativa**: $x * h = h * x$
2. **Asociativa**: $h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3$
3. **Distributiva respecto de la suma**: $x * (h_1 + h_2) = (x * h_1) + (x * h_2)$

Apuntes Pág. 38

Representación Matemática de Sistemas y Señales:

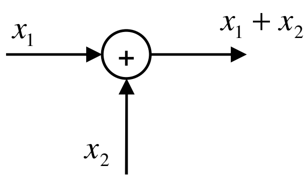
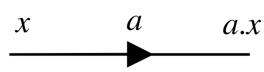
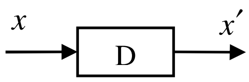
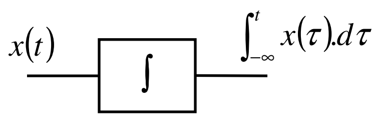
Sistemas L.T.I. en Tiempo Contínuo:

Un sistema L.T.I. en Tiempo Continuo puede representarse con **Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes** de la siguiente manera:

$$a_n.y^{(n)}(t) + a_{n-1}.y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1.y'(t) + a_0.y(t) = b_m.x^{(m)}(t) + \cdots + b_1.x'(t) + b_0.x(t)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k.y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k.x^{(k)}(t)}$$

Elementos de un S.L.T.I. en T.C.:

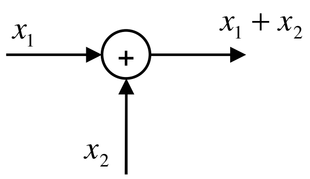
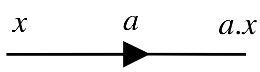
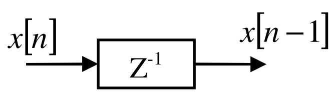
Punto de Suma:	**Multiplicador**:
	
Derivador:	**Integrador**:
	

Sistemas L.T.I. en Tiempo Discreto:

Los Sistemas L.T.I. en Tiempo Discreto se representan con **Ecuaciones en Diferencias Lineales con Coeficientes Constantes**:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k.y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k.x[n-k]}$$ → Ecuación General de los Filtros Digitales

Elementos de un S.L.T.I. en T.D.:

Punto de Suma:	**Multiplicador**:	**Retardo unitario**:
		

Señales en Tiempo Contínuo:

Representaremos ahora a las señales como funciones exponenciales complejas, debido a que ellas tienen una importante propiedad: si las ponemos a la entrada de un sistema L.T.I., la salida será la misma señal, afectada por un coeficiente de amplitud.

Si $x(t) = e^{j.\omega.t}$, entonces:

$$\boxed{y(t) = e^{j.\omega.t}.H(j.\omega)}$$

donde

$$\boxed{H(j.\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-j.\omega.\tau}.d\tau}$$

/ Estudiar la demostración /

Señales en Tiempo Discreto:

Haremos lo mismo que con el tiempo continuo, pero en tiempo discreto.

Si $x[n] = z^n$, siendo $z = \rho.e^{j\omega}$, entonces:

$$\boxed{y[n] = z^n.H[z]}$$

donde

$$\boxed{H[z] = \sum_k h[k].z^{-k}}$$

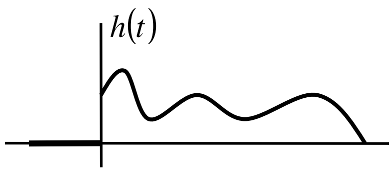
/ Estudiar la demostración /

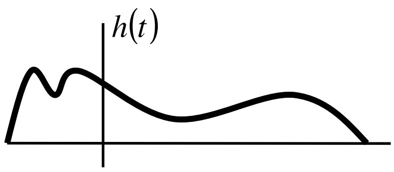
Apuntes Pág. 41

Causalidad:

Un sistema es **Causal** si $h(t) = 0$ para todo $t < 0$

Sistema Causal	Sistema No Causal





Apuntes Pág. 39

Estabilidad:

Todo sistema **Estable** o **BIBO** (Bounded Input - Bounded Output | Entrada acotada - Salida Acotada) tiene como condición que:

$$\sum_k |h[n-k]| < \infty \quad \text{[Tiempo Discreto]}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|.d\tau < \infty \quad \text{[Tiempo Continuo]}$$

/ Estudiar la demostración /

Esto quiere decir que la sumatoria o integral de la respuesta impulsiva debe converger a algún valor finito, porque sino, por más que yo ponga una señal acotada en la entrada, la salida no será acotada.

Apuntes Pág. 39

Series de Fourier
TIEMPO CONTÍNUO

Desarrollos Ortogonales:

Para poder desarrollar con mayor facilidad las Series de Fourier, necesitamos conjuntos de funciones ortogonales.
Un conjunto de funciones $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es **ortogonal** en un intervalo (a,b) si se cumple que:

$$\boxed{\int_a^b f_i(t).f_j(t).w(t).dt = 0} \text{ siendo } i \neq j$$

donde $w(t)$ es la llamada función de peso, que para el caso de la mayoría de las funciones utilizadas comúnmente, es igual a 1.

Apuntes Pág. 45

Norma:

Se define a la norma de $f_n(t)$ como:

$$\boxed{\|f_n(t)\| = \sqrt{\int_a^b f_n^{\,2}(t).w(t).dt}}$$

Si para todo n se cumple que $\|f_n(t)\| = 1$, el sistema será **ortonormal**.

Apuntes Pág. 45

Condiciones de Dirichlet:

Para que una función cualquiera pueda ser desarrollada por Series de Fourier, debe cumplir con las siguientes condiciones, llamadas **Condiciones de Dirichlet**:

1. $f(t)$ debe ser absolutamente integrable sobre cualquier período, o sea que en él no debe tener discontinuidades infinitas:
$$\boxed{\int_{<T>} |f(t)|.dt < \infty} \Rightarrow C_n < \infty$$
2. $f(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos en un período cualquiera
3. $f(t)$ puede tener un número finito de saltos finitos en un periodo cualquiera

Apuntes Pág. 46

Serie Generalizada de Fourier:

Para poder representar matemáticamente cualquier fenómeno físico que recibimos como señal, constamos de una herramienta llamada **Serie de Fourier**, que nos permite *sintetizar* la señal recibida a partir de un conjunto de señales más simples, dosificando con coeficientes la *cantidad* de cada señal simple que se va a aplicar.
La **fórmula más general** de la Serie de Fourier es:

$$\boxed{F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n . f_n(t)}$$

SÍNTESIS

Donde C_n son los Coeficientes de la Serie de Fourier y $f_n(t)$ son las funciones pertenecientes a un conjunto de funciones más sencillas.

La fórmula para calcular los **Coeficientes de la Serie de Fourier** es:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{\left\| f_n(t) \right\|^2} \cdot \int_a^b F(t).f_n(t).w(t).dt}$$

ANÁLISIS

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 45

Convergencia de las series de Fourier:

Las Series de Fourier que son de utilidad son las que convergen.

$$S.F.(t) \to F(t)$$

$$\boxed{S.F.(t) = \frac{F(t^-) + F(t^+)}{2}}$$

Apuntes Pág. 47

Serie Trigonométrica de Fourier:

Un conjunto de funciones ortogonales son las funciones trigonométricas seno y coseno.

Trabajaremos entonces con el conjunto $\begin{Bmatrix} \cos(n.\omega_0.t) \\ \sin(n.\omega_0.t) \end{Bmatrix}_{n=0}^{\infty}$.

Luego de introducir las funciones en la Serie Generalizada de Fourier y de extraer el primer término del seno, que da cero, obtenemos la expresión de síntesis de la **Serie Trigonométrica de Fourier**:

$$\boxed{F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n.\cos(n.\omega_0.t) + b_n.\sin(n.\omega_0.t) \right]}$$

SÍNTESIS

NOTAR que la sumatoria comienza en $n = 1$.

Ahora necesitamos la fórmula de análisis. Si calculamos la norma al cuadrado de las funciones trigonométricas, veremos que para todo $n \geq 1$, su valor es $T/2$, entonces reemplazamos en la fórmula general para los coeficientes y vemos que:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_{<T>} F(t).\cos(n.\omega_0.t).dt}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_{<T>} F(t).\sin(n.\omega_0.t).dt}$$

ANÁLISIS

Apuntes Pág. 48

Simetrías:

Si la señal tiene **simetría par**, entonces:

$$b_n = 0 \quad \forall n$$

/ Estudiar la demostración /

Si la señal tiene **simetría impar**, entonces:

$$a_n = 0 \quad \forall n$$

/ Estudiar la demostración /

La señal también puede tener **simetría escondida** (par o impar). Cuando tenemos éste caso, debemos utilizar las propiedades anteriores, cuidando de afectar la fórmula con las operaciones necesarias para corregir la simetría escondida.

RECORDAR PARA DEMOSTRAR que la integral en un periodo de una señal impar toma el valor 0. Además recordar las reglas multiplicativas de par e impar.

Apuntes Pág. 49

Forma Polar de la Serie de Fourier:

Partimos de la serie trigonométrica de Fourier, para llegar a:

$$\boxed{F(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n.\cos(n.\omega_0.t - \varphi_n)}$$

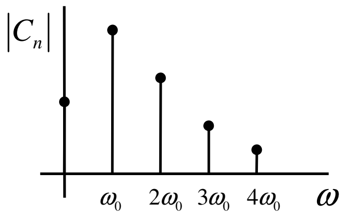
SÍNTESIS

/ Estudiar la demostración /

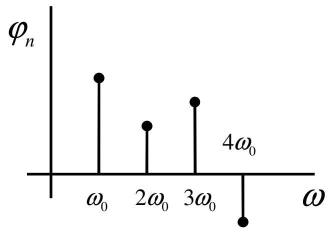
$$\boxed{C_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}} \text{ y } \boxed{\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}}$$

De donde a_n y b_n se calculan con la fórmula de análisis de la serie trigonométrica de Fourier.

Espectros de Líneas:



Espectro de Amplitudes



Espectro de Fases

Serie Exponencial de Fourier:

Vamos a resumir la expresión trigonométrica de la Serie de Fourier, en una expresión exponencial compleja.

$$\boxed{F(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n.e^{j.n.\omega_0.t}}$$

SÍNTESIS

/ Estudiar la demostración /

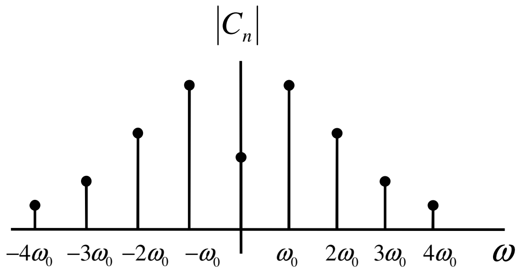
$$C_n = |C_n|.e^{j.\varphi_n} \qquad |C_n| = \frac{1}{2}.\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} \qquad \varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

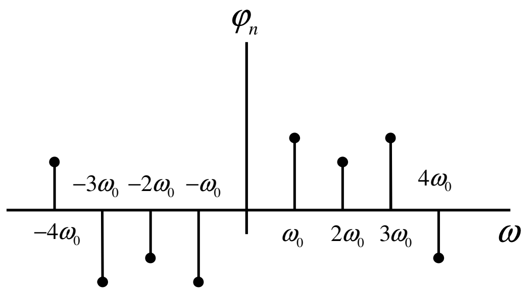
$$C_n = \frac{a_n - j.b_n}{2} \qquad C_{-n} = \frac{a_n + j.b_n}{2}$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T}.\int_{<T>} F(t).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt} \quad C_{-n} = \frac{1}{T}.\int_{<T>} F(t).e^{j.n.\omega_0.t}.dt$$

ANÁLISIS

En éste caso los coeficientes son valores complejos, que darán espectros de amplitud y de fase con propiedades singulares:





Espectro de Amplitudes

Simetría Par

Espectro de Fases

Simetría Impar

Las simetrías en los espectros son necesarias para que las partes imaginarias de los coeficientes se cancelen, y se obtenga una señal real.

Apuntes Pág. 54

Propiedades de la Serie de Fourier en T.C.:

1. **Linealidad**:

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$
$$y(t) \leftrightarrow b_k$$
$$z(t) = A.x(t) + B.y(t) \leftrightarrow A.a_k + B.b_k$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

2. **Desplazamiento**:

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$
$$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k.e^{-j.k.\omega_0.t_0}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

3. **Inversión**:

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$
$$x(-t) \leftrightarrow a_{-k}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

4. **Escalado**:

$$x(t) \leftrightarrow a_k \qquad \text{pero } T \to T/\alpha \text{ y } \omega_0 \to \alpha.\omega_0$$
$$x(\alpha.t) \leftrightarrow a_k$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

5. **Multiplicación y Convolución**:

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$
$$y(t) \leftrightarrow b_k$$
$$x(t).y(t) \leftrightarrow a_k * b_k$$
$$x(t) * y(t) \leftrightarrow a_k.b_k$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

6. **Conjugación y Simetría Conjugada**:

$$x(t) \leftrightarrow a_k \qquad \text{y si } x(t) \text{ es Real, } \quad a_k = a^*_{-k}$$
$$x^*(t) \leftrightarrow a^*_{-k} \qquad\qquad\qquad\qquad a^*_k = a_{-k}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

7. **Relación de Parseval**:

$$\frac{1}{T}.\int_{<T>}|x(t)|^2.dt=\sum_m |a_m|^2$$

/ Estudiar la demostración /

"La Potencia promedio en una señal periódica es igual a la suma de las potencias promedio en todas sus componentes armónicas"

Apuntes Pág. 58

TIEMPO DISCRETO

Serie de Fourier para señales periódicas discretas:

Dada una señal periódica discreta $x[n]=x[n+N]$ donde N es el periodo, la serie de Fourier que sintetiza la señal en base a exponenciales complejas es:

$$\boxed{x[n]=\sum_{k=<N>} a_k.e^{j.k.\frac{2\pi}{N}.n}} \quad \text{SÍNTESIS}$$

donde $k=0,1,...,N-1$ o bien $k=1,2,...,N$, etc. Entonces, ésta sumatoria tiene N términos, debido a que sólo habrán N exponenciales complejas diferentes.

$$\boxed{a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n].e^{-j.k.\frac{2\pi}{N}.n}} \quad \text{ANÁLISIS}$$

La fórmula de Síntesis es una suma finita de N términos y describe una secuencia periódica (y por tanto infinita) de muestras en el tiempo. La representación espectral en la frecuencia también es un espectro de líneas, pero para el caso discreto es periódico.
Al ser una suma finita de N términos, la serie no necesitará ser truncada, y no aparecerá el fenómeno de Gibbs (Problema en las discontinuidades de la Serie Continua de Fourier).

Apuntes Pág. 61

Propiedades de la Serie Discreta de Fourier:

1. **Multiplicación**:

$$x[n]\leftrightarrow a_k$$
$$y[n]\leftrightarrow b_k$$
$$x[n].y[n]\leftrightarrow c_k=\sum_{l=<N>} a_l.b_{k-l}$$

/ Estudiar la demostración /

2. **Primera diferencia**:

$$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow a_k.\left(1-e^{-j.k.\frac{2\pi}{N}}\right)$$

/ Estudiar la demostración /

3. **Relación de Parseval**:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2=\sum_{k=<N>}|a_k|^2$$

/ Estudiar la demostración /

"La Potencia promedio en una señal periódica es igual a la suma de las potencias promedio en todas sus componentes armónicas (tomando N componentes armónicas consecutivas)"

Apuntes Pág. 63

SISTEMAS L.T.I.

Series de Fourier y Sistemas L.T.I.:

Como ya vimos, si a un sistema L.T.I. le damos como perturbación una señal exponencial compleja, nos devuelve como salida la misma señal afectada por un coeficiente, que es la respuesta en frecuencias del sistema.
La explicación de esto es que, al ser lineal, el sistema L.T.I. perturbado con una señal periódica (que es una combinación lineal de exponenciales complejas) responderá con una combinación lineal de exponenciales complejas idénticas en frecuencia pero afectadas de la función del sistema correspondiente a cada una de esas frecuencias. Entonces las entradas serán:

$$x(t)=\sum_{k} a_k.e^{j.k.\omega_0.t} \quad \text{y} \quad x[n]=\sum_{k=<N>} a_k.e^{j.k.\frac{2.\pi}{N}.n}$$

para tiempo continuo y tiempo discreto respectivamente. Consecuentemente, las respectivas salidas son:

$$y(t)=\sum_{k} a_k.H(j.k.\omega_0).e^{j.k.\omega_0.t} \quad \text{y} \quad y[n]=\sum_{k=<N>} a_k.H\left(e^{j.k.\frac{2.\pi}{N}}\right).e^{j.k.\frac{2.\pi}{N}.n}$$

Cabe señalar que los coeficientes de la función del sistema afectan a cada componente en amplitud y en fase, pues son complejos.

Apuntes Pág. 65

Transformada de Fourier

TIEMPO CONTÍNUO

Transformada de Fourier en Tiempo Continuo:

Sea $x(t)$ una señal **aperiódica** continua de **Energía Finita**, entonces la **Transformada de Fourier** de la señal es:

$$\boxed{X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-j.\omega.t}.dt}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

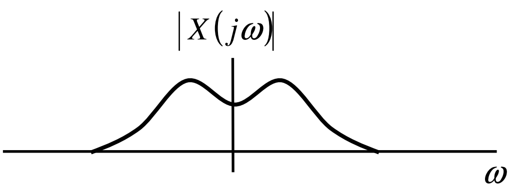
Y la **Antitransformada**:

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}.\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega).e^{j.\omega.t}.d\omega}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

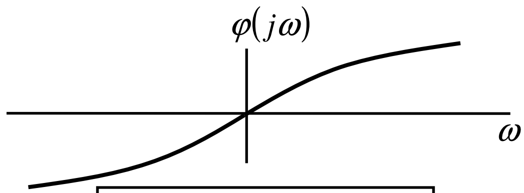
$$X(j\omega)=\left|X(j\omega)\right|.e^{j.\varphi(j\omega)}$$

De la expresión anterior obtenemos los espectros, que seguirán teniendo las anteriores simetrías par e impar, pero como ahora las distancias $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, las líneas espectrales se juntan, produciendo espectros continuos.



Espectro de Amplitudes

Simetría Par



Espectro de Fases

Simetría Impar

Apuntes Pág. 68

Condiciones de Convergencia de la Transformada de Fourier:

Para que exista la transformada de Fourier de una cierta señal $x(t)$, se debe cumplir que:

1. $x(t)$ debe ser absolutamente integrable, o sea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|.dt < \infty$$

2. $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito.
3. $x(t)$ debe tener un número finito (incluso cero) de discontinuidades finitas en cualquier intervalo finito.

Apuntes Pág. 70

Transformada de Fourier para señales periódicas:

$$\boxed{X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2.\pi.a_k.\delta(\omega - k.\omega_0)}$$

/ Estudiar la demostración /

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.e^{j.k.\omega_0.t}}$$

/ Estudiar la demostración /

donde los a_k son los coeficientes de la Serie de Fourier que representa a dicha señal.

La transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de impulsos en la frecuencia espaciados $\Delta\omega = \omega_0$, y con peso (área) $2.\pi.a_k$

Apuntes Pág. 73

Propiedades de la Transformada de Fourier:

1. **Linealidad**:

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
$$y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$$
$$A.x(t) + B.y(t) \leftrightarrow A.X(j\omega) + B.Y(j\omega)$$

/ Estudiar la demostración /

2. **Desplazamiento**:

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega).e^{-j.\omega.t_0}$$

/ Estudiar la demostración /

3. **Conjugación y Simetría Conjugada**:

$$\begin{matrix} x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \\ x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega) \end{matrix} \quad \text{entonces} \quad \begin{matrix} |X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \\ \varphi(j\omega) = -\varphi(-j\omega) \end{matrix} \quad \text{(Simetrías de Espectros)}$$

/ Estudiar la demostración /

Relación de simetrías:

Si $x(t)$ es una función par, entonces $X(j\omega)$ es netamente real.

Si $x(t)$ es una función impar, entonces $X(j\omega)$ es imaginaria pura.

/ Estudiar la demostración /

4. **Diferenciación e integración**:

$$x'(t) \leftrightarrow j.\omega.X(j.\omega)$$

/ Estudiar la demostración /

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau).d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j.\omega}.X(j.\omega)+\pi.X(0).\delta(\omega)$$

/ Estudiar la demostración /

5. **Escalado de tiempo y frecuencia**:

$$x(a.t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}.X\left(\frac{j.\omega}{a}\right)$$

/ Estudiar la demostración /

4. **Relación de Parseval**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2.dt = \frac{1}{2\pi}.\int_{-\infty}^{\infty} |X(j.\omega)|^2.d\omega$$

/ Estudiar la demostración /

"La Energía puede calcularse integrando por todo el tiempo o por toda la frecuencia"

6. **Teorema de convolución**:

Si $y(t)=x(t)*h(t)$, entonces $Y(j\omega)=X(j\omega).H(j\omega)$, siendo $H(j\omega)$ la respuesta en frecuencias del sistema, que justamente es la *transformada de la respuesta impulsiva del sistema.*

/ Estudiar la demostración /

7. **Multiplicación**:

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
$$y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$$
$$x(t).y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$$

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 75

Sistemas Lineales de Tiempo Continuo:

Los sistemas lineales de tiempo continuo están caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k.\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k.\frac{d^k x(t)}{dt^k}}$$

Si transformamos Fourier a ambos miembros y reagrupamos, podemos obtener la Función de Transferencia del Sistema ($H(j\omega)$), que caracteriza al mismo.

$$\boxed{H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k.(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k.(j\omega)^k}}$$

Apuntes Pág. 80

Sistemas L.T.I. Continuos de Primer Orden:

La ecuación diferencial que modela éstos sistemas es:

$$\boxed{\tau.y'(t)+y(t)=x(t)}$$

siendo τ un parámetro llamado constante de tiempo del sistema

La respuesta en frecuencias de estos sistemas, y su respectiva respuesta impulsiva, son:

$$\boxed{H(j\omega)=\frac{1}{1+j.\omega.\tau} \text{ y } h(t)=\frac{1}{\tau}.e^{-t/\tau}.u(t)}$$

/ Estudiar las demostraciones /

Apuntes Pág. 96

Sistemas L.T.I. Continuos de Segundo Orden:

La ecuación diferencial que modela éstos sistemas es:

$$\boxed{y''(t)+2.\xi.\omega_n.y'(t)+\omega_n^{\ 2}y(t)=\omega_n^{\ 2}x(t)}$$

siendo ξ y ω_n parámetros llamados razón de amortiguamiento y frecuencia angular de resonancia, respectivamente.

La respuesta en frecuencias de estos sistemas es:

$$\boxed{H(j\omega)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{\omega_n^{\ 2}-\omega^2+j.2.\xi.\omega.\omega_n}}$$

/ Estudiar las demostraciones /

La respuesta impulsiva del sistema depende del valor de ξ.

/ Estudiar cada caso /

Apuntes Pág. 98

TIEMPO DISCRETO

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto:

Sea $x[n]$ una señal **aperiódica** discreta de **Energía Finita**, entonces la **Transformada de Fourier** de la señal es:

$$X\left(e^{j.\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n].e^{-j.\omega.n}$$

/ Estudiar la demostración /

Y la **Antitransformada**:

$$x[n]=\frac{1}{2.\pi}\int_{<2\pi>}X\left(e^{j.\omega}\right).e^{-j.\omega.n}.d\omega$$

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 82

Relación con una señal periódica:

La Transformada de Fourier de una señal aperiódica discreta es proporcional a la envolvente de los coeficientes a_k de la Serie de Fourier de la señal periódica asociada. Puede entenderse entonces que los coeficientes a_k son muestras de $X\left(e^{j.\omega}\right)$ en $\omega=k.\omega_0$ a menos del factor $\frac{1}{N}$.

Apuntes Pág. 83

Convergencia:

Para que la transformada de Fourier exista, la señal debe tener energía finita, lo que significa que:

$$\sum_{k} |x[k]|^2 < \infty$$

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 85

Transformada de Fourier para señales periódicas discretas:

La Transformada de Fourier para señales periódicas no es obtenible con funciones matemáticas elementales, debido a lo señalado en el punto anterior. Pero podemos salvar éste inconveniente con el uso de funciones impulsivas. Así:

$$e^{j.\omega_0.n} \leftrightarrow 2.\pi.\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2.\pi.m)$$

/ Estudiar la demostración /

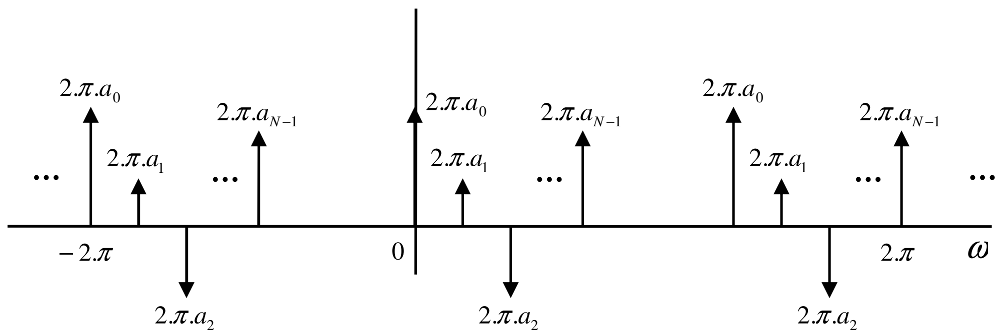
Ahora tomemos una señal periódica dada por su Serie de Fourier: $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k.e^{j.k.\frac{2.\pi}{N}.n}$

Transformamos y obtenemos:

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=<N>} 2.\pi.a_k.\delta\left(\omega - k.\frac{2.\pi}{N} - 2.\pi.m\right)}$$

/ Estudiar la demostración /

Infinitas réplicas de un grupo de N impulsos de áreas $2.\pi.a_k$ separadas cada $2.\pi$ rad



Apuntes Pág. 85

Propiedades:

1. **Periodicidad:**

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega + 2.k.\pi)})$$

/ Estudiar la demostración /

2. **Linealidad**:

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$
$$y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$$
$$A.x[n] + B.y[n] \leftrightarrow A.X(e^{j\omega}) + B.Y(e^{j\omega})$$

/ Estudiar la demostración /

3. **Desplazamiento en tiempo y en frecuencia**:

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$
$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j.\omega.n_0}.X(e^{j\omega})$$
$$e^{j.\omega_0.n}.x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

/ Estudiar la demostración /

4. **Conjugación y Simetría Conjugada**:

$$\begin{array}{c} x[n] \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) \\ x^*[n] \leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right) \end{array} \quad \text{entonces} \quad \begin{array}{c} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| \\ \varphi\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi\left(e^{-j\omega}\right) \end{array} \quad \text{(Simetrías de Espectros)}$$

/ Estudiar la demostración /

Relación de simetrías:

Si $x[n]$ es una función par, entonces $X\left(e^{j\omega}\right)$ es netamente real.

Si $x[n]$ es una función impar, entonces $X\left(e^{j\omega}\right)$ es imaginaria pura.

/ Estudiar la demostración /

5. **Diferenciación y acumulación**:

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow \left(1 - e^{-j.\omega}\right).X\left(e^{j.\omega}\right)$$

/ Estudiar la demostración /

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{X\left(e^{j\omega}\right)}{1 - e^{j\omega}} + \pi.X\left(e^{j0}\right).\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2.k.\pi)$$

/ Estudiar la demostración /

6. **Inversión en tiempo**:

$$x[-n] \leftrightarrow X\left(e^{-j\omega}\right)$$

/ Estudiar la demostración /

5. **Diferenciación en frecuencia**:

$$n.x[n] \leftrightarrow j.\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

/ Estudiar la demostración /

6. **Relación de Parseval**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}.\int_{<2\pi>} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 .d\omega$$

/ Estudiar la demostración /

7. **Convolución**:

Si $y[n] = x[n] * h[n]$, entonces $Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right).H\left(e^{j\omega}\right)$, siendo $H\left(e^{j\omega}\right)$ la respuesta en frecuencias del sistema, que justamente es la *transformada de la respuesta impulsiva del sistema*.

/ Estudiar la demostración /

8. **Multiplicación**:

$$\begin{array}{c} x[n] \leftrightarrow X\left(e^{j.\omega}\right) \\ y[n] \leftrightarrow Y\left(e^{j.\omega}\right) \\ x[n].y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X\left(e^{j.\omega}\right) * Y\left(e^{j.\omega}\right) \end{array}$$

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 87

Sistemas L.T.I. Discretos:

Los sistemas lineales de tiempo discretos están caracterizados por ecuaciones en diferencias lineales de la forma:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k .y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k .x[n-k]}$$

Si transformamos Fourier a ambos miembros y reagrupamos, podemos obtener la Función de Transferencia del Sistema ($H\left(e^{j\omega}\right)$), que caracteriza al mismo.

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k.e^{-j.\omega.k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k.e^{-j.\omega.k}}}$$

Apuntes Pág. 93

Sistemas L.T.I. Discretos de Primer Orden:

La ecuación en diferencias que modela estos sistemas es:

$$\boxed{y[n]-a.y[n-1]=x[n]}$$

El parámetro a juega un papel similar al de la constante de tiempo en T.C.

La respuesta en frecuencias de estos sistemas, y la respectiva respuesta impulsiva, son:

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-a.e^{-j\omega}} \text{ y } h[n]=a^n.u[n] \text{ con } |a|<1}$$

/ Estudiar las demostraciones /

Apuntes Pág. 102

Sistemas L.T.I. Discretos de Segundo Orden:

La ecuación en diferencias que modela estos sistemas es:

$$\boxed{y[n]-2.r.\cos\theta.y[n-1]+r^2 y[n-2]=x[n]}$$

Donde r y θ son parámetros característicos del sistema. r controla la velocidad de respuesta, y θ tiene directa relación con el comportamiento oscilatorio.

La respuesta en frecuencias de estos sistemas, y la respectiva respuesta impulsiva, son:

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-2.r.\cos\theta.e^{-j\omega}+r^2.e^{-j.2.\omega}} \text{ y } h[n]=\frac{r^n}{\sin\theta}.\sin[\theta.(n+1)].u[n]}$$

/ Estudiar las demostraciones /

Apuntes Pág. 105

Muestreo

Muestreo: Discretización de Señales:

Para discretizar una señal continua, sólo nos basta multiplicarla por un tren de impulsos periódicos, lo que nos deja sólo los valores de la señal que están ubicados en el lugar exacto de cada impulso.

Apuntes Pág. 108

Teorema del Muestreo:

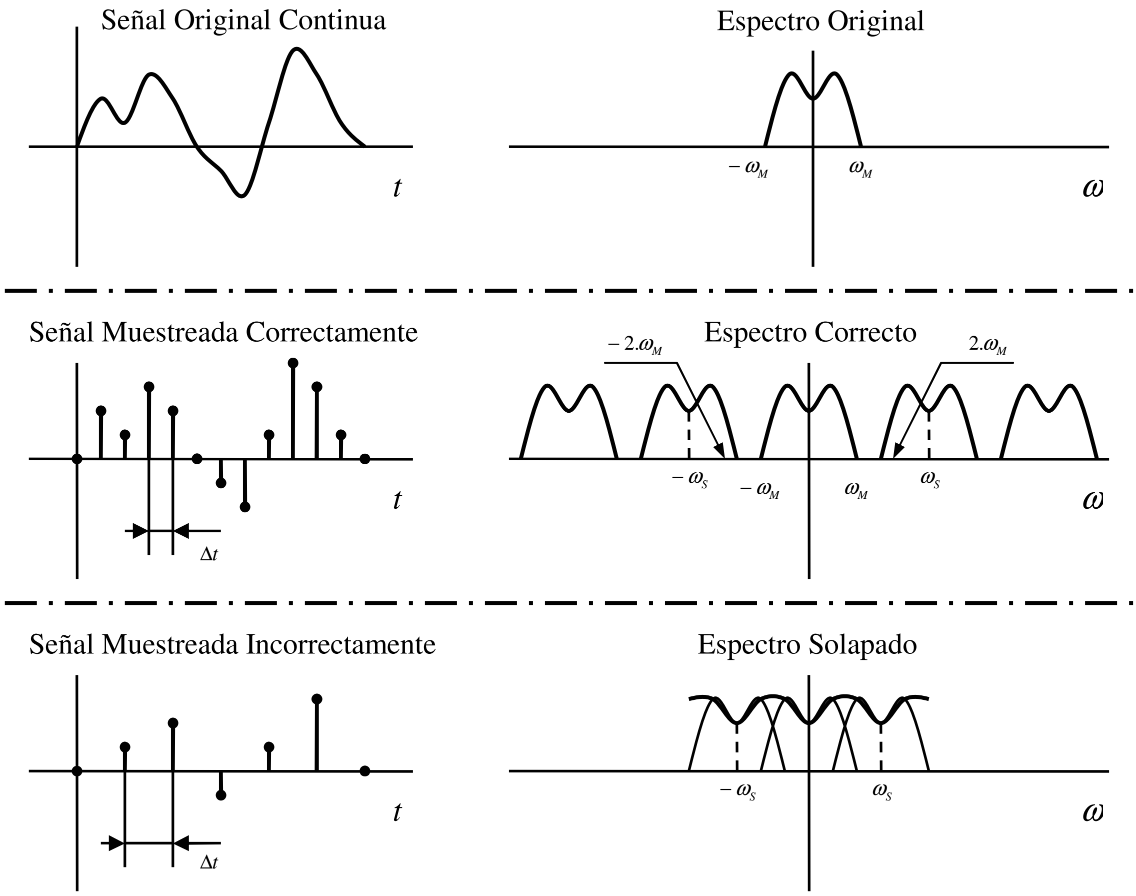
Sea $x(t)$ una señal de banda limitada, es decir, si la transformamos $X(j\omega)=0 \quad \forall|\omega|>\omega_M$, entonces $x(t)$ se determina unívocamente mediante sus muestras $x(n.\Delta t)$ si

$$\boxed{\omega_S \geq 2.\omega_M}$$

donde $\omega_S = \dfrac{2\pi}{\Delta t}$ es la frecuencia de muestreo. La señal puede recuperarse exactamente desde sus muestras con un adecuado filtro pasabajos con frecuencia de corte mayor que ω_M .

```
*/ Estudiar la demostración /*
```

La interpretación es la siguiente: Si nosotros muestreamos una señal, su transformada de Fourier tendrá el mismo espectro que la señal continua original, pero será periódico en la frecuencia de muestreo. Entonces, para poder recuperar la señal original, no querríamos que los espectros se superpusieran, deformando el espectro esperado. Gráficamente:



Apuntes Pág. 111

Aliasing:

Cuando la frecuencia de muestreo es menor que dos veces la frecuencia máxima, se produce un solapamiento de los espectros llamado **aliasing**, lo que hace que la señal original sea irrecuperable.
Para evitar esto, antes de muestrear la señal se utilizan filtros anti-aliasing (F.A.A.), que eliminan las frecuencias de la señal que no queremos (ruido), y que se puede solapar en el proceso de muestreo.
En la práctica conviene que la frecuencia de muestreo sea mayor o igual que por lo menos 2,6 veces la frecuencia máxima de la señal, debido a que no existen filtros pasa bajos ideales, entonces debemos dejar un margen de error.

Apuntes Pág. 117

Muestreo en la frecuencia:

Como es más fácil procesar una señal en el dominio de la frecuencia, pero la computadora maneja números, más que funciones continuas, debemos muestrear en la frecuencia. El

problema es ¿Cuántas muestras de $X\left(e^{j\omega}\right)$ deberemos tomar para no alterar $x[n.\Delta t]$?
Buscamos entonces discretizar correctamente la Transformada de Fourier de una señal de longitud finita de N muestras.
La variable ω pasará a ser una variable discreta:

$$\boxed{\omega = m.\frac{2.\pi}{M}} \text{ con } m = 0,1,2,...,M-1$$

donde M será la cantidad de muestras en la frecuencia.
Entonces $X\left(e^{j\omega}\right)$ pasará a ser ahora:

$$X(m) = X\left(e^{j.m.\frac{2\pi}{M}}\right)$$

El par de transformada y antitransformada discreta de Fourier serán:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X\left(e^{j.m.\frac{2\pi}{M}}\right).e^{j.m.\frac{2\pi}{M}.n}} \text{ con } n = <N>$$

y

$$\boxed{X\left(e^{j.m.\frac{2\pi}{M}}\right) = \sum_{k=<N>} x[k].e^{-j.m.\frac{2\pi}{M}.k}}$$

$\boxed{\text{Y para que la señal esté bien muestreada, sólo basta que } M > N}$

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 118

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace, condiciones de convergencia:

Dada una señal continua $x(t)$, su transformada de Laplace (unilateral) es:

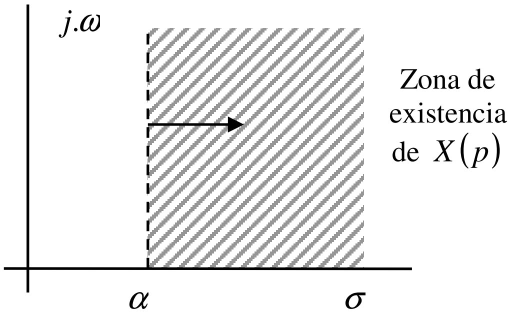
$$\boxed{X(p) = \int_0^{\infty} x(t).e^{-p.t}.dt} \text{ para } p > \alpha$$

si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $x(t)$ es seccionalmente continua, es decir, tiene un número finito de discontinuidades finitas.
2. $x(t)$ es de "Orden Exponencial", es decir, que para algún número α se cumple que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-\alpha.t}.\left|x(t)\right|\right) = 0$$

La zona de existencia de la transformada de Laplace se representa en el plano complejo, debido a que $p = \sigma + j.\omega$ (frecuencia compleja), en el semiplano derecho partiendo desde el eje $\sigma = \alpha$.



Apuntes Pág. 121

Transformada Inversa de Laplace:

La fórmula de la transformada inversa de Laplace es:

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2.\pi.j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}X(p).e^{p.t}.dp}$$

donde c pertenece al lugar donde existe $X(p)$

Pero ésta fórmula generalmente no se usa, sino que lo que se hace es separar la transformada en fracciones simples y usar las tablas de transformadas, junto con las propiedades, para hallar las antitransformadas.

Apuntes Pág. 132

Propiedades:

1. **Linealidad**:

$$x(t)\leftrightarrow X(p)$$
$$y(t)\leftrightarrow Y(p)$$
$$A.x(t)+B.y(t)\leftrightarrow A.X(p)+B.Y(p)$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

2. **Desplazamiento en tiempo y en frecuencia**:

$$x(t)\leftrightarrow X(p)$$
$$x(t-a)\leftrightarrow e^{-a.p}.X(p)$$
$$e^{a.t}.x(t)\leftrightarrow X(p-a)$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

3. **Escalado:**

$$x(t)\leftrightarrow X(p)$$
$$x(a.t)\leftrightarrow \frac{1}{a}.X\left(\frac{p}{a}\right)$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

4. **Derivadas en tiempo y en frecuencia**:

$$x(t)\leftrightarrow X(p)$$
$$x'(t)\leftrightarrow p.X(p)-x(0)$$
$$x''(t)\leftrightarrow p^2.X(p)-p.x(0)-x'(0)$$
$$x^{(n)}(t)\leftrightarrow p^n.X(p)-p^{n-1}.x(0)-p^{n-2}.x'(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0)$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

$$X(p)\leftrightarrow x(t)$$
$$X^{(n)}(p)\leftrightarrow(-1)^n.t^n.x(t)$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

Integrales:

$$x(t) \leftrightarrow X(p)$$

$$\int_0^t x(t).dt \leftrightarrow \frac{1}{p}.X(p)$$

/ Estudiar la demostración /

5. **Convolución**:

Si $y(t) = x(t) * h(t)$, entonces $Y(p) = X(p).H(p)$, siendo $H(p)$ la función de transferencia del sistema.

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 124

Solución de Ecuaciones Diferenciales:

Cuando tenemos un sistema L.T.I. representado por una ecuación diferencial, podemos obtener su respuesta en frecuencias, su respuesta impulsiva o su respuesta a la perturbación que se le ha puesto utilizando la transformada de Laplace. Para ello, transformamos ambos miembros de la ecuación, utilizando la propiedad de derivación. Luego despejamos la transformada que queremos obtener. En el otro miembro nos quedará una función racional de p, que podemos descomponer en fracciones simples, y utilizar una tabla de transformadas de funciones simples para llegar a la función buscada en el dominio del tiempo.

Para descomponer en fracciones simples, recordar que (ejemplo):

$$\frac{q(t)}{(t-t_1).(t-t_2)^2} = \frac{k_1}{(t-t_1)} + \frac{k_2}{(t-t_2)^2} + \frac{k_3}{(t-t_2)}$$

y que:

$$k_1 = \left.\frac{q(p)}{(p-p_2)^2}\right|_{p=p_1}$$ ➔ Polo simple

$$k_2 = \left.\frac{q(p)}{(p-p_1)}\right|_{p=p_2}$$ ➔ Polo múltiple, residuo de su multiplicidad

$$k_3 = \left.\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{(2-1)}}{dp^{(2-1)}}\left(\frac{q(p)}{(p-p_1)^{(2-1)}}\right)\right|_{p=p_2}$$ ➔ Polo múltiple, residuo en multiplicidad menor

(se comienza a derivar aumentando el orden mientras decrece la multiplicidad del residuo)

Apuntes Pág. 133

Teorema del Valor Inicial:

Sea $X(p)$ la transformada de Laplace de $x(t)$, entonces:

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} p.X(p) = x(0)}$$

/ Estudiar la demostración /

Éste teorema es de utilidad para conocer el régimen transitorio de una señal (comportamiento inicial).

Apuntes Pág. 137

Teorema del Valor Final:

Sea $X(p)$ la transformada de Laplace de $x(t)$, entonces:

$$\boxed{\lim_{p\to 0} p.X(p) = x(\infty)}$$

/ Estudiar la demostración /

Éste teorema es de utilidad para conocer el régimen permanente de una señal (comportamiento al que tiende después de un tiempo).

Apuntes Pág. 137

Tabla de Transformadas de Laplace:

Función: $x(t)$	**Transformada:** $X(p)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-\alpha.t}u(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$t.e^{-\alpha.t}u(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$t^n.e^{-\alpha.t}u(t)$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$\cos(\beta.t).u(t)$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$t.\cos(\beta.t).u(t)$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
$\sin(\beta.t).u(t)$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$t.\sin(\beta.t).u(t)$	$\frac{2.p.\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

Apuntes Pág. 139

Transformada Bilateral de Laplace:

Hasta ahora hemos visto la transformada unilateral de Laplace. Ahora presentaremos su expresión más general:

$$\boxed{X_b(p)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-p.t}.dt}$$

Podemos ver que la transformada de Fourier es un caso particular de la transformada bilateral de Laplace ($p=\sigma+j.\omega$ con $\sigma=0$), con región de existencia en el eje $j\omega$. De ello se desprende que si existe la transformada de Fourier, existe la de Laplace, pero la recíproca no siempre se cumple, porque la zona de convergencia puede no contener al eje $j\omega$.

Apuntes Pág. 141

Causalidad y Estabilidad:

Si una señal es **causal**, es una función "derecha" y su Región de Convergencia es un semiplano derecho, a partir de $\sigma=\alpha$.

Si un sistema es estable, $h(t)$ tiene una $H(p)$ que converge en una región que contiene al eje $j\omega$. Vale decir, existe la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva del sistema.

`*/ Estudiar la demostración /*`

Apuntes Pág. 145

Transformada Z

Transformada Z:

Dada una señal discreta $x[n]$, su Transformada Z es:

$$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n}}$$

Apuntes Pág. 149

Transformada Z Inversa:

La transformada Z inversa de una señal es:

$$\boxed{x[n]=\frac{1}{2.\pi.j}\oint_C X(z).z^{n-1}.dz}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

Apuntes Pág. 154

Relación con la transformada de Fourier:

Si el módulo de z es unitario ($z=r.e^{j\omega}$), entonces la fórmula de la transformada Z se convierte en la expresión de la transformada de Fourier para señales discretas, que es la transformada Z de una señal, evaluada sobre la circunferencia unitaria.
De aquí se puede desprender que siempre que existe transformada de Fourier, existe la transformada Z de esa señal, pero la recíproca no siempre se cumple, pues la región de convergencia puede no contener a la circunferencia de radio unitario.

Apuntes Pág. 149

Relación con la transformada de Laplace:

Si muestreamos una señal continua y le aplicamos la transformada de Laplace, obtenemos la siguiente expresión:

$$X_s(p)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n.T).e^{-n.T.p}$$

si tomamos $z=e^{T.p}$, obtenemos:

$$X_s(p)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n.T).z^{-n.}=X(z)$$

Entonces la transformada Z puede verse como la transformada de Laplace de la señal muestreada con el cambio $z=e^{T.p}$.

Apuntes Pág. 168

Causalidad y Estabilidad:

Cuando $x[n]$ es **causal**, su $X(z)$ converge hacia fuera de un círculo de radio $|a|$ y cuando $x[n]$ es **no causal**, su $X(z)$ converge hacia adentro de una circunferencia de radio $|a|$.

Una o más señales distintas pueden tener la misma transformada Z, pero distinta región de convergencia. Por eso es importante especificarla cuando se determina la transformada de una señal.

Para que un sistema sea **estable**, la región de convergencia debe contener a la circunferencia de radio unitario, esto es: debe existir la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva del sistema.

/ Estudiar la demostración /

Apuntes Pág. 152

Propiedades:

1. **Convergencias:**

Cuando $x[n]$ es de duración finita, la transformada Z converge en todo el plano, excepto tal vez en $z=0$ y/o $z=\infty$

Si $x[n]$ es bilateral, $X(z)$ converge en un anillo.

2. **Linealidad**:

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$
$$y[n] \leftrightarrow Y(z)$$
$$A.x[n]+B.y[n] \leftrightarrow A.X(z)+B.Y(z)$$

/ Estudiar la demostración /

3. **Desplazamiento en el tiempo**:

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$
$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}.X(z)$$

/ Estudiar la demostración /

4. **Inversión en el tiempo:**

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$
$$x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

/ Estudiar la demostración /

5. **Conjugación**:

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$
$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(z^*)$$

/ Estudiar la demostración /

6. **Convolución y Multiplicación**:

Si $y[n]=x[n]*h[n]$, entonces $Y(z)=X(z).H(z)$, siendo $H(z)$ la función de transferencia del sistema.

/ Estudiar la demostración /

Si $y[n]=x[n].h[n]$, entonces $Y(z)=\frac{1}{2\pi}.X(z)*H(z)$

/ Estudiar la demostración /

7. **Diferenciación en Z**:

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$
$$n.x[n] \leftrightarrow -z.\frac{dX(z)}{dz}$$

/ Estudiar la demostración /

8. **Escalado en Z**:

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$
$$a^n.x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

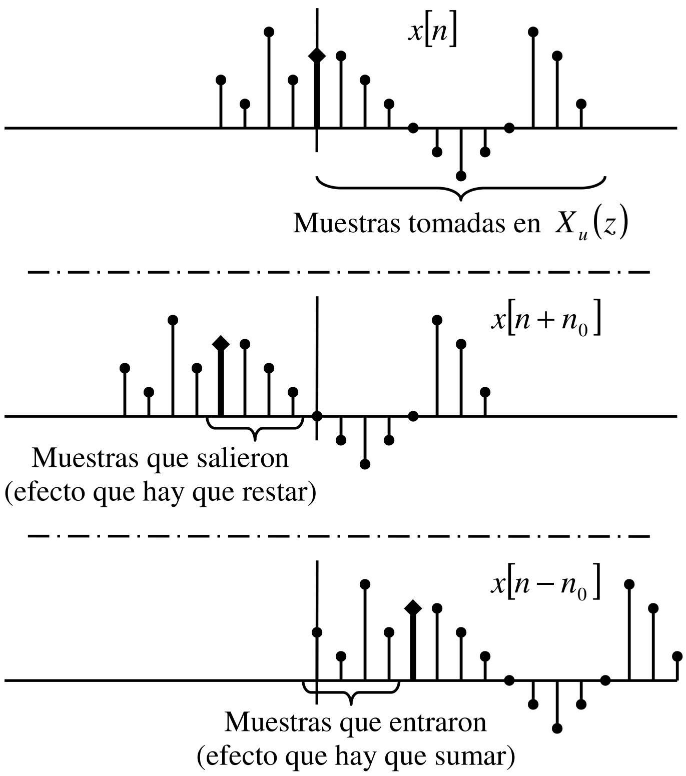
Apuntes Pág. 155

Teorema del desplazamiento temporal:

Cuando queremos operar con señales o sistemas causales, la transformada Z se convierte en unilateral ($X_u(z)$), comenzando la suma en 0. Cuando desplazamos una señal no causal en $n_0 > 0$ unidades de muestreo se tiene:

$$\boxed{x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0}.X_u(z) - z^{n_0}\sum_{m=0}^{n_0-1} x[m].z^{-m}}$$
$$\boxed{x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}.X_u(z) + z^{-n_0}\sum_{m=-n_0}^{-1} x[m].z^{-m}}$$

Viendo esto gráficamente:



Apuntes Pág. 160

Solución de Ecuaciones en Diferencias:

Cuando tenemos un sistema L.T.I. representado por una ecuación en diferencias, podemos obtener su respuesta en frecuencias, su respuesta impulsiva o su respuesta a la perturbación que se le ha puesto utilizando la transformada Z. Para ello, transformamos ambos miembros de la ecuación, utilizando la propiedad de desplazamiento. Luego despejamos la transformada que queremos obtener. En el otro miembro nos quedará una función racional de z , que podemos descomponer en fracciones simples, y utilizar una tabla de transformadas de funciones simples para llegar a la función buscada en el dominio de n .

Para descomponer en fracciones simples es el mismo método que para las transformadas de Laplace, sólo que en algunos casos, la transformada Z requiere que se divida por z la expresión antes de descomponer y luego se multiplique por z al final, para lograr obtener más fácilmente las antitransformadas desde las tablas.

Apuntes Pág. 165

Teorema del Valor Inicial:

Sea $X(z)$ la transformada Z de $x[n]$ (una secuencia causal), entonces:

$$\boxed{\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]}$$

/ Estudiar la demostración /

Éste teorema es de utilidad para conocer el régimen transitorio de una señal (comportamiento inicial).

Apuntes Pág. 164

Teorema del Valor Final:

Sea $X(z)$ la transformada Z de $x[n]$ (una secuencia causal), entonces:

$$\boxed{\lim_{z\to 1} (1 - z^{-1}) X(z) = x[\infty]}$$

/ Estudiar la demostración /

Éste teorema es de utilidad para conocer el régimen permanente de una señal (comportamiento al que tiende después de un tiempo).

Apuntes Pág. 164

Tabla de Transformadas Z:

Función: $x[n]$	**Transformada:** $X(z)$	**Radio de Convergencia**
$\delta[n]$	1	todo z
$u[n]$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\alpha^n.u[n]$	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$n.u[n]$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$n.\alpha^n.u[n]$	$\dfrac{z.\alpha}{(z-\alpha)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$\cos(n.\Omega).u[n]$	$\dfrac{z^2 - z.\cos\Omega}{z^2 - 2.z.\cos\Omega + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(n.\Omega).u[n]$	$\dfrac{z.\sin\Omega}{z^2 - 2.z.\cos\Omega + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\alpha^n.\cos(n.\Omega).u[n]$	$\dfrac{z^2 - \alpha.z.\cos\Omega}{z^2 - 2.\alpha.z.\cos\Omega + \alpha^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$\alpha^n.\sin(n.\Omega).u[n]$	$\dfrac{\alpha.z.\sin\Omega}{z^2 - 2.\alpha.z.\cos\Omega + \alpha^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$

Apuntes Pág. 169 Bis

Aplicaciones

MODULACIÓN

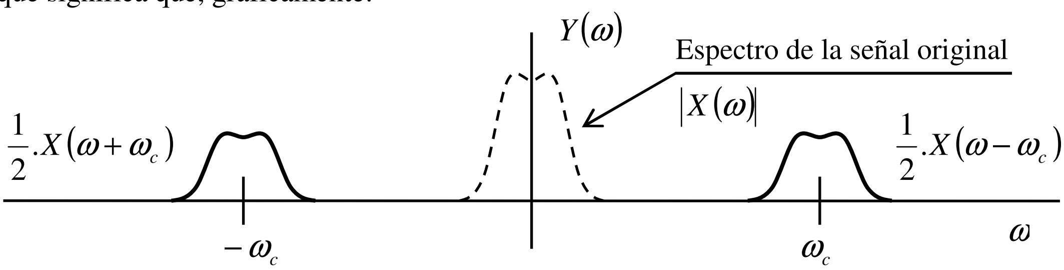
Modulación:

En comunicaciones es imprescindible valerse de la propiedad de traslación en frecuencia, debido a que es deseable trasladar el espectro de una señal y centrarlo en una frecuencia determinada para, por ejemplo, disminuir costos en antenas. Para ello nos valemos de la propiedad de multiplicación.
Multiplicaremos nuestra señal $x(t)$ por una señal $x_c(t) = \cos(\omega_c.t)$, donde ω_c se llama "**frecuencia portadora**", y es la frecuencia donde centraremos el espectro de la señal. Éste producto lo hacemos para obtener:

$$\boxed{Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega+\omega_c) + X(\omega-\omega_c)\right]}$$

`*/ Estudiar la demostración /*`

lo que significa que, gráficamente:



Apuntes Pág. 172

FILTRADO DE SEÑALES

Definiciones de Filtro:

Definición 1:
El filtro es todo sistema que procesa una señal, separando la parte esencial o útil de otras componentes no deseadas.

Definición 2:
Un filtro es un sistema que modifica en alguna medida el espectro de amplitud y/o el de fase de una señal de entrada.

Apuntes Pág. 174

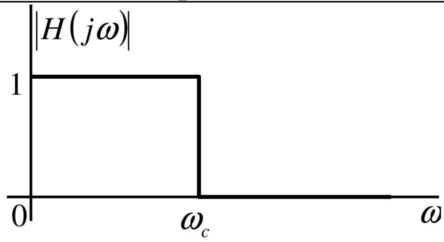
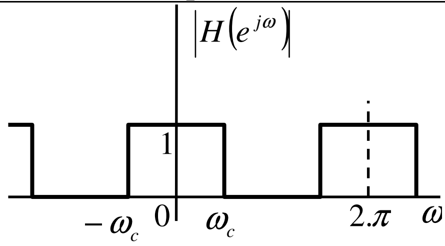
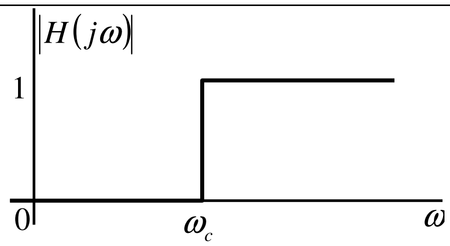
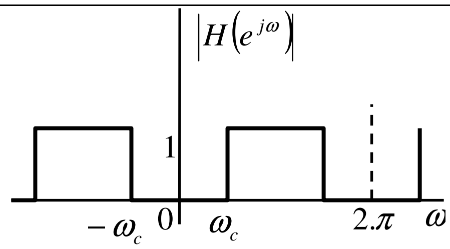
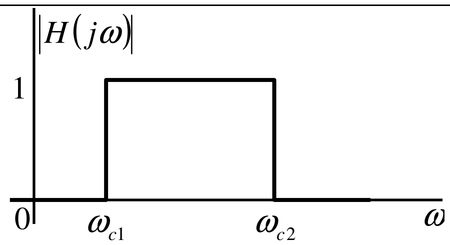
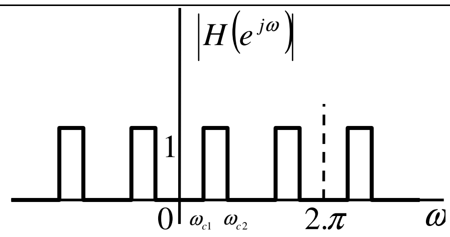
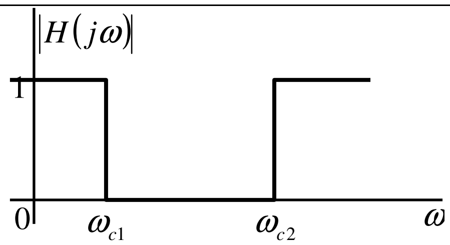
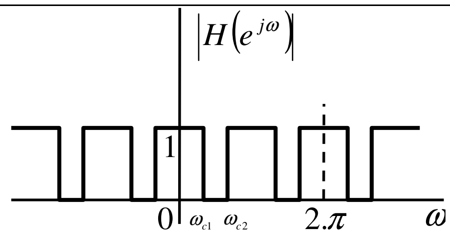
Clasificación:

Existen tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, cuatro tipos fundamentales de filtros:

1. Pasa bajos
2. Pasa altos
3. Pasa banda
4. Corta banda

Apuntes Pág. 174

Respuesta en frecuencia de los filtros selectivos ideales:

Filtro	Tiempo Continuo	Tiempo Discreto
Pasa bajos		
Pasa altos		
Pasa banda		
Corta banda		
		En tiempo discreto los espectros de los filtros son periódicos cada 2π

Estas características son las de filtros ideales, pero no son realizables físicamente.

Apuntes Pág. 175

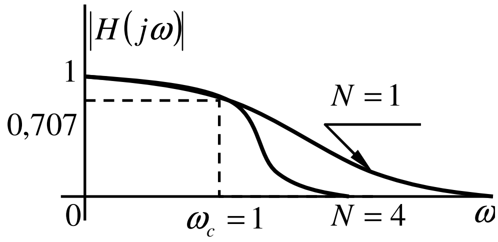
Filtros Analógicos:

Filtro de Butterworth:

Su magnitud de respuesta en frecuencia tiene la forma:

$$\boxed{\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2.N}}}$$

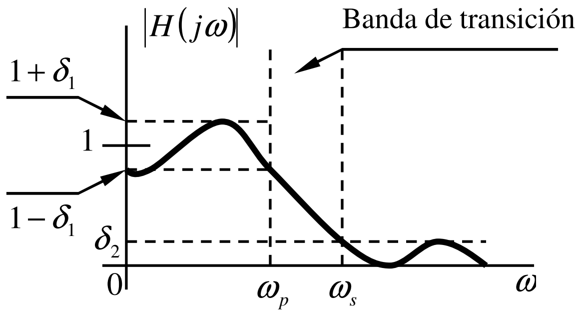
donde N es el orden del filtro y $\omega_c = 1$. Conforme aumenta el orden, el filtro de Butterworth se aproxima mejor al pasa bajos ideal.



La función de sistema del filtro está relacionada con los polinomios de Butterworth $P_N(s)$ de la siguiente manera:

$$H(s)=\frac{1}{P_N(s)}$$

Como el corte entre la banda de paso y la eliminada no es neto, hay una banda de transición:



Para adaptar a cualquier caso particular las fórmulas, basta con reemplazar s por s/ω_c.

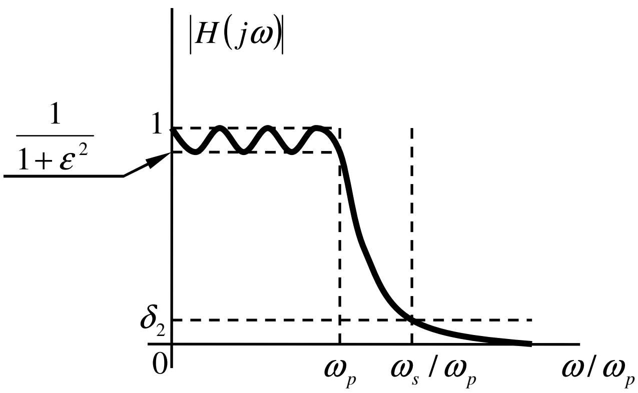
Apuntes Pág. 176

Filtro de Chebyshev:

La expresión matemática característica es:

$$\boxed{|H(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2.C_N(\omega)}}$$

donde ε es la tolerancia en la banda de paso y $C_N(\omega)$ son los polinomios de Chebyshev de orden N.
Tiene la forma:



La ventaja principal frente al filtro de Butterworth es que la banda de transición es más estrecha, pero la desventaja es que tiene rizos en la banda de paso, cosa que no es siempre deseable.

Apuntes Pág. 178

Filtros Digitales:

Se pueden clasificar como Filtros de Respuesta Impulsiva Infinita (I.I.R.) o de Respuesta Impulsiva Finita (F.I.R.), de los que los últimos no tienen contrapartida en el dominio analógico.

Apuntes Pág. 181

Técnicas de Diseño para filtros I.I.R.:

a) Diseño por invarianza al impulso:

Consiste en utilizar las técnicas de diseño analógicas, y luego muestrear la respuesta impulsiva del filtro para adaptarla al caso digital. Utiliza tablas de equivalencia entre transformada de Laplace y transformada Z para el caso de la función del sistema. La desventaja es que produce aliasing, lo cual no se soluciona aumentando la frecuencia de muestreo.

Apuntes Pág. 182

b) Diseño por transformación Bilineal:

Se propone una transformación para el dominio z en un dominio s. La mencionada transformación es:

$$\boxed{s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad \text{o} \quad z = \frac{1+(T/2).s}{1-(T/2).s}$$

Y puede obtenerse una relación entre la frecuencia en radianes y la de radianes por segundo, la que es:

$$\boxed{\omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

Se utilizan los mismos procedimientos analógicos y se transforma con las fórmulas al caso discreto.

Apuntes Pág. 183

Filtros Digitales F.I.R.:

Un filtro F.I.R. de longitud de N muestras para $h[n]$ tendrá fase lineal si verifica la simetría:

$$\boxed{h[n] = h[N-1-n]}$$

Apuntes Pág. 184

Ventanas:

Las ventanas sirven para truncar los espectros de los filtros, para que se vuelvan causales y de longitud finita.

Apuntes Pág. 185

Procedimiento de Diseño de Filtros F.I.R. (Fase Lineal):

1. De los datos de $H(\Omega)$ podemos antitransformar y hallar $h[n]$.
2. Se multiplica $h[n]$ por la función de ventana elegida.
3. Se obtiene la función filtro $H(z)$ transformando dicho producto.
4. Desplazar la $H(z)$ para hacerla causal, multiplicando por z^{-p}, con p número de intervalos a desplazar hacia la derecha.

Apuntes Pág. 185