Trabajo Práctico N°3: DERIVADA Y DIFERENCIAL

Ejercicio 1:

Halle la pendiente de la gráfica de la función en los puntos dados aplicando la definición de derivada de una función en un punto. Después halle la ecuación para la recta tangente a la gráfica en cada uno de esos puntos.

a) $f(x) = x^3 + 1$ en el punto (1;2)

b) $g(x) = -x^2 + 2$ en los puntos (1;1) y (-1;1)

c) $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en los puntos (0;1) y (1;0,5)

d) $i(x) = +\sqrt{x}$ en los puntos (1;1) y (4;2)

Ejercicio 2:

Determine la razón de cambio promedio de la función en cada intervalo:

a) $f(x) = e^{-x}$; [0;2]

b) $g(x) = x^3 - 4x$; [0;1]

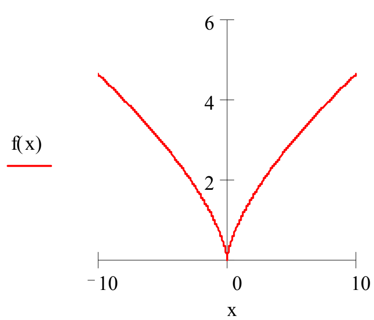
c) $h(x) = 2 + \cos t; \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

d) $i(x) = tg(t); \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$

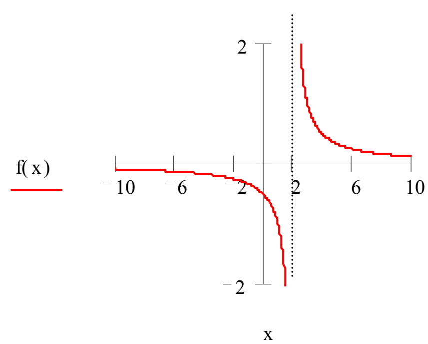
Ejercicio 3:

Analice las siguientes gráficas y determine los valores de x en los cuales f(x) no es derivable. Justifique la respuesta

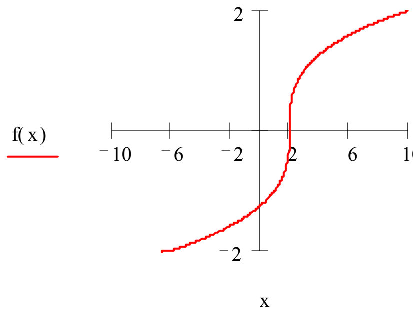
a)



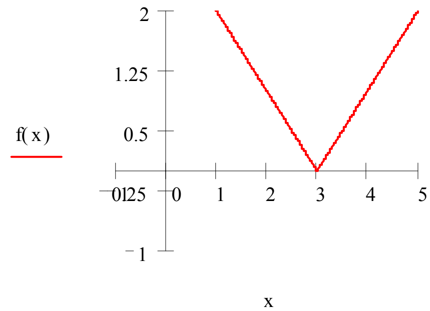
b)



c)



d)



<u>Ejercicio 4</u>:

Para las función: $f(x) = x^3 + 2$

a) Dibuje la función y su derivada, una debajo de la otra (haga coincidir los valores de abscisas)
b) Indique los intervalos donde la función crece y donde decrece
c) Indique los intervalos donde la función derivada es positiva, negativa o nula.
d) Compare los intervalos encontrados en los puntos b) y c)
e) Saque conclusiones

<u>Ejercicio 5</u>:

Idem ejercicio anterior para: $f(x) = 2x^2 + x + 1$

<u>Ejercicio 6</u>:

Emplee las reglas de derivación para hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{-2}}{4} + 3x - 5$ b) $y = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}$ c) $y = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + 2$

d) $y = tgx = \frac{senx}{\cos x}$ e) $y = \sec x \cdot senx$ f) $y = x^4 \cdot senh\, x - \cosh \mathrm{x}$

g) $y = \frac{2x+5}{3x+2}$ h) $y = \frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$ i) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

j) $y = e^x \cdot \tanh^{-1} x$ k) $y = 2\pi \cdot arctg\ x$

l) $y = 2 \cdot \ln x + \log_2 x + 2 \cdot \log x + 2 \cdot \ln 5$

Ejercicio 7:

Emplee las reglas de derivación para hallar las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\sqrt{(x+5)^3}$ b) $y=(x-1)^{-5}$ c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-2}}$ d) $y=\sec(\cos x)$

e) $y=arctg(5x^3)$ f) $y=\sec^2(sen(\cos x^2))$ g) $y=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$ h) $y=\ln(\ln(\sqrt{3x}))$

i) $y=\cosh(tgx)$ j) $y=senh^2 x$ k) $y=\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right)^{-2}-e^{2x}+tg(\pi x)+\ln 5$ l) $y=\dfrac{tg(3x)}{(x+2)}$

m) $y=\sqrt{\dfrac{x^3+2}{x^3-3}}$

Ejercicio 8:

Obtenga por derivación sucesiva las derivadas según el orden indicado:

a) $y=x-\dfrac{1}{x}$ segundo orden $\left(y^{II}=\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ b) $y=x^2\cdot(x+2)^3$ tercer orden

c) $y=\ln(x-2)$ segundo orden d) $y=x^4-3x^2+2x$ cuarto orden

e) $r=2\theta\sqrt{\cos\theta}$ 3er. orden $\left(\dfrac{d^3r}{d\theta^3}\right)$ f) $r=\dfrac{1}{3s^2}-\dfrac{5}{2s}$ 2° Orden $\left(\dfrac{d^2r}{ds^2}\right)$

g) $z=\dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}$ 2° Orden $\left(\dfrac{d^2z}{dw^2}\right)$ h) $y=sen\,\alpha$ 4° orden $\left(\dfrac{d^4y}{d\alpha^4}\right)$

i) y = ln x, halle derivada enésima j) y = 5^x, halle derivada enésima

Ejercicio 9:

¿A qué funciones corresponde la derivada dada?

a) $y^I=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ b) $y^I=\cos(2t)$

c) $s^I=19{,}6t+30$ d) $y^I=-(sen^2x)^{-1}$

Ejercicio 10:

Dada la función: $f(x)=2x^3-3x+2$

a) Halle la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva en el punto (-1;3)
b) ¿Cuándo la pendiente en la curva es nula? ¿En qué puntos ocurre?

c) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva donde la pendiente de la curva valga 6

Ejercicio 11:

Dada la función: $f(x) = 2x^3 - 4x + 2$

a) Halle la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva en el punto de abscisa x = -1
b) ¿Cuándo la pendiente en la curva es nula? ¿En qué puntos ocurre?
c) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva donde la pendiente de la curva valga 8

Ejercicio 12:

La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (1;2) y es tangente a la recta $y = x$ en el origen. Halle los valores de a, b y c

Ejercicio 13:

Las curvas $y = x^2 + bx + c$ e $y = -x^2 + d$ tienen una tangente común en el punto (1;0). Halle los valores de a, b y c

Ejercicio 14:

En el instante t la posición de un objeto que se mueve a lo largo del eje s es $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ metros.

a) Halle la aceleración del objeto cada vez que la velocidad es cero.
b) Halle la rapidez del objeto cada vez que la aceleración es cero.
c) Halle la distancia total recorrida por el objeto desde t = 0 hasta t = 2.

Ejercicio 15:

Una roca lanzada verticalmente hacia arriba alcanzaría una altura de $s = 24t - 4{,}9t^2$ metros en t segundos. Desprecie la fricción del aire sobre la piedra:

a) Halle la velocidad y la aceleración de la roca en el instante t
b) ¿Cuánto tiempo tarda la roca en alcanzar su punto más alto?
c) ¿Qué altura máxima alcanza la roca?
d) ¿Cuánto tiempo tarda la roca en alcanzar la mitad de su altura máxima?
e) ¿Cuánto tiempo está la roca en el aire?

Ejercicio 16:

¿Tienen tangentes horizontales las gráficas de las siguientes funciones en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$? Si es así, indique dónde. Si no, explique por qué.

a) $y = x + senx$ b) $y = x - \cot g$ x

c) $y = 2x + senx$ d) $y = x - 2\cos x$

Ejercicio 17:

Derive aplicando logaritmos:

a) $y = x^{\frac{1}{x}}$ b) $y = (\ln x)^{2x+3}$

c) $y = \left(x^2 + 1\right)^{\ln x}$ d) $y = (x^2 + 2)^{x^3}$

Ejercicio 18:

Suponga que cada una de las ecuaciones de los siguientes problemas define *y* como una función diferenciable de *x*. Halle $\frac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita:

a) $x^2 + y^2 = 36$ b) $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$ c) $x = tg\ y$

d) $x \cdot y = 4$ e) $y^2 = sen^4 2x + \cos^4 2x$

Ejercicio 19:

¿Existen puntos sobre la curva $y = \dfrac{\frac{x}{2} + 1}{2x - 4}$ donde la pendiente sea $-\frac{3}{2}$?. Si existen hállelos.

Ejercicio 20:

Halle las ecuaciones para la tangente y la normal a la curva $y = 1 + \cos x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$. Trace la curva, la tangente y la normal e indique cada una con su ecuación.