Trabajo Práctico N° 8: APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

Ejercicio 1:

Dibuje la región acotada por las gráficas de las siguientes funciones y encuentre el área de la región.

a). $y = \frac{1}{2}x^3 + 2, \quad y = x + 1, \qquad x = 0, \quad x = 2$

b). $f(x) = x^2 - 4x, \qquad g(x) = 0$

c). $f(x) = -x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = 3x - 1$

d). $f(x) = 2sen(x), \qquad g(x) = tg(x), \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3$

Ejercicio 2:

Encuentre la función de acumulación F. Evalúe F en cada valor indicado de la variable independiente y grafique. Identifique al área dada por cada valor de F.

a). $F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)dt, \quad F(0), \quad F(2), \quad F(6)$

b). $F(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} \cos\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)d\theta, \quad F(-1), \qquad F(0), \quad F\left(1/2\right)$

Ejercicio 3:

Pruebe que $\frac{1}{2}x|x|$ es una antiderivada de $|x|$ y utilice este hecho para dar una fórmula sencilla para $\int_0^b |x|dx$.

Longitud de curva.

Ejercicio 4:

Encuentre la longitud del segmento de recta de ecuación $y = 5x + 3$, entre $x = 1$ y $x = 7$. Verifique geométricamente.

Ejercicio 5:

Encuentre la longitud de arco para la función $y = \ln(\cos x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

Ejercicio 6:

Encuentre la longitud de arco para la función $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ en el intervalo $[1;2]$.-

Ejercicio 7:

Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que se encuentran a 80 m. El cable toma la forma de una catenaria de ecuación: $y = 75(e^{x/150} + e^{-x/150}) = 150ch(x/150)$
Encuentre la longitud del cable entre las dos torres.-

Ejercicio8:

Encuentre la longitud del arco desde el punto (-3;4) al punto (4;3) en el sentido de las agujas del reloj a lo largo de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ Muestre que el resultado es una cuarta parte de la longitud total de la circunferencia.

Área de una superficie de revolución

Ejercicio 9:
Una esfera de radio r se genera al girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje *x*. Verifique que el área de la superficie es $4\pi r^2$.

Ejercicio 10:
Halle el área de la superficie que se genera al rotar la función $y = x^3$ alrededor del eje *x* en [0; 2]

Ejercicio11:

Halle el área de la superficie del cono engendrado por la revolución de un segmento de la recta $y = 2x$ limitado por $x = 0$, $x = 2$:
a) alrededor del eje *Ox*.-
b) alrededor del eje *Oy*.-

Ejercicio 12:

Halle el área de la superficie del toroide obtenido por revolución del círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ alrededor del eje *Ox* .

Volumen de un sólido de revolución.

Ejercicio 13:

Halle el volumen del sólido generado por la región acotada por la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ al rotarla:
a). sobre el eje x entre 0 y 1.
b). sobre el eje y entre 0 y 1.

Ejercicio 14:

Verifique que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.

Ejercicio 15:

Verifique que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejercicio 16:

Determine el volumen de revolución engendrado cuando el recinto determinado por $y = \sqrt{x}$; $x = 4$ e $y = 0$ gira alrededor del eje y.-

Ejercicio 17:

Halle el volumen del cono engendrado al girar alrededor del eje Oy, el segmento de recta que une el origen de coordenadas con el punto $(a; b)$.-

Integración numérica

Ejercicio 18:

Use la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida para un valor dado de n:

a). $\int_0^2 x^2 dx \qquad n = 4 \qquad n = 6$.

b). $\int_4^9 \sqrt{x} dx \qquad n = 2 \qquad n = 4$.

c). $\int_1^3 (1 - x^2) dx \qquad n = 4 \qquad n = 8$.

Integrales impropias

Ejercicio 19:

Determine el tipo de cada una de las siguientes integrales impropias. Analice su convergencia y halle el valor si corresponde.

a). $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

b). $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$

c). $\int_0^\infty sen(x/2) dx$

d). $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x} dx$

e). $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

g). $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$

f). $\int_{0}^{1} x.\ln x.dx$

h). $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$