UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL MENDOZA

APUNTES DE LA CÁTEDRA DE TEORÍA DE LOS CIRCUITOS I

Prof. Dr. Ing. S. Enrique Puliafito

E-mail epuliafito@frm.utn.edu.ar

CAPITULO 5: POTENCIA

OBJETIVOS GENERALES DE LA ASIGNATURA

1. Proveer los fundamentos de los circuitos lineales e interpretar a éstos en el marco de un sistema lineal comprendiendo y aplicando sus principales propiedades
2. Mostrar cómo el análisis y diseño de circuitos eléctricos están íntimamente relacionados con la capacidad del futuro ingeniero para diseñar complejos sistemas electrónicos de comunicaciones, computación y control.
3. Que el alumno aprenda a resolver circuitos lineales simples.
4. Que el alumno adquiera las habilidades para modelar y resolver sistemas lineales tanto desde el dominio del tiempo como de la frecuencia, y que sea capaz de predecir su comportamiento ante una excitación cualquiera.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO V:

- Determinar el balance de potencia de los circuitos lineales, en corriente continua y corriente alteran. Tanto para el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.
- Calcular la máxima transferencia de potencia

TEMA A: Potencia en el dominio del tiempo: 5.A.1. Potencia en corriente continua: potencia por rama. potencia en término de corriente en las mallas y tensiones nodales. 5.A.2. Potencia en un dipolo. Teorema de la máxima transferencia de energía. Potencia en un cuadripolo. 5.A.3. Potencia en el régimen transitorio: potencia en circuitos de primer y segundo orden.

TEMA B: Potencia en circuitos de corriente alterna: 5.B.1. Valores eficaces. 5.B.2. Potencia activa y reactiva. 5.B.3. Teorema de la máxima transferencia de energía.

TIEMPO ESTIMADO DE CURSADO: 2 SEMANAS

TABLA DE CONTENIDO:

BIBLIOGRAFÍA:

- R. Scott: "Linear Circuits", *Addison-Wesley Publishing Co.*, 1960
- Dorf y Svoboda, "Circuitos Eléctricos. Introducción al Análisis y Diseños", *Alfaomega*, 2000
- Cunnigham and Stuller: "Basic Circuit Analysis", 1995
- 3. M. Van Walkenberg: "Análisis de Redes", *Limusa.*,1994
- H. Pueyo y C. Marco: "Análisis de modelos circuitales",Tomos I y II. *Arbó*, 1985
- W. Hyat and J. Kemmerly: "Análisis de Circuitos en Ingeniería", *Mc Graw Hill.*, 1985

CAPÍTULO V: POTENCIA

El concepto subyacente de toda esta materia es sin duda estudiar la transmisión de energía eléctrica de un dispositivo a otro. Sin embargo hasta ahora hemos analizado el comportamiento de la tensión y la corriente eléctricas como variables primarias, siendo éstas substitutos de los conceptos de potencia y de energía. En este capítulo trataremos intensamente estos dos conceptos de potencia y energía, tanto para los circuitos resistivos solamente, como para los de corriente alterna.
El tratamiento de las variables de potencia y la energía suscitó hacia fines del siglo XIX una fuerte controversia, por la aplicación extensiva en los sistemas industriales de la corriente continua (c.c.) o el de la corriente alterna (c.a.). Así para 1880 la corriente eléctrica era usada sobre todo para la iluminación pública, por ejemplo Nueva York y Nueva Yersey en EE.UU. tenían sistemas de corriente continua, en cambio la ciudad de Colonia en Alemania tenía corriente alterna. Paralelamente, nuevos desarrollos de motores de c.a. o dínamos de c.c., hacían difícil la elección. Representantes de la c.c. fueron Alessandro Volta (Italia,1745-1827) Thomas Edison (EE.UU. 1847-1931) mientras que los defensores de la c.a. eran George Westinghouse (1846-1914) y Nicola Tesla (serbio-americano 1857-1943) inventor del motor de c.a. Uno de los argumentos de la disputa era por un lado la dificultad en el tratamiento matemático de la potencia en c.a., y por el lado de la c.c. su dificultad en los cambios de tensión y transporte. Sin embargo fue el Ing. Charles Steinmetz (alemán-americano1865-1923) de la General Electric Company, quien publicara en 1897 un artículo sobre el tratamiento matemático de la corriente alterna por medio de fasores (ver Cap. 4), quien definitivamente volcara la elección hacia el uso extensivo de la corriente alterna.
Como lo veremos en este capítulo, la introducción de los conceptos de valor medio eficaz (o r.m.s.: root mean square en inglés), y potencias promedios y pico, en vez de potencias instantáneas, terminó por simplificar el cálculo de la potencia en corriente alterna.

1. Potencia en circuitos de corriente continua

1.1 Introducción

En los circuitos resistivos puramente no hay almacenamiento de energía, por lo que es más conveniente expresar el concepto de potencia como el producto de la corriente por la tensión. Siendo la corriente una medida de la rapidez con que circula la carga eléctrica por un dispositivo; y la tensión una medida de la cantidad de energía asociada con cada unidad de carga; el producto es una medida de la cantidad de energía absorbida o disipada por el dispositivo. El concepto de potencia está entonces asociado a la rapidez del flujo de energía en los dispositivos resistivos (ver ecuaciones 1.1 a 1.5 en el capítulo 1). En este primer punto revisaremos los balances de potencia tanto para las ramas individuales de un circuito resistivo, como para una red resistiva. Esta potencia la pondremos en función de las corrientes y tensiones de rama, y en función de las corrientes de mallas y tensiones nodales.

1.2 Potencia en redes resistivas

1.2.1. Potencia como corriente y tensiones por rama

Si conocemos la corriente y la tensión en una rama, la potencia disipada por esa rama será:

$$p = e \times i \tag{5.1}$$

Donde *e* es la tensión y se mide en Volts o (joule /coulomb), *i* es la corriente y se mide en Amperes o (coulomb /segundos), y *p* la potencia se mide en watts o (joule / segundos).

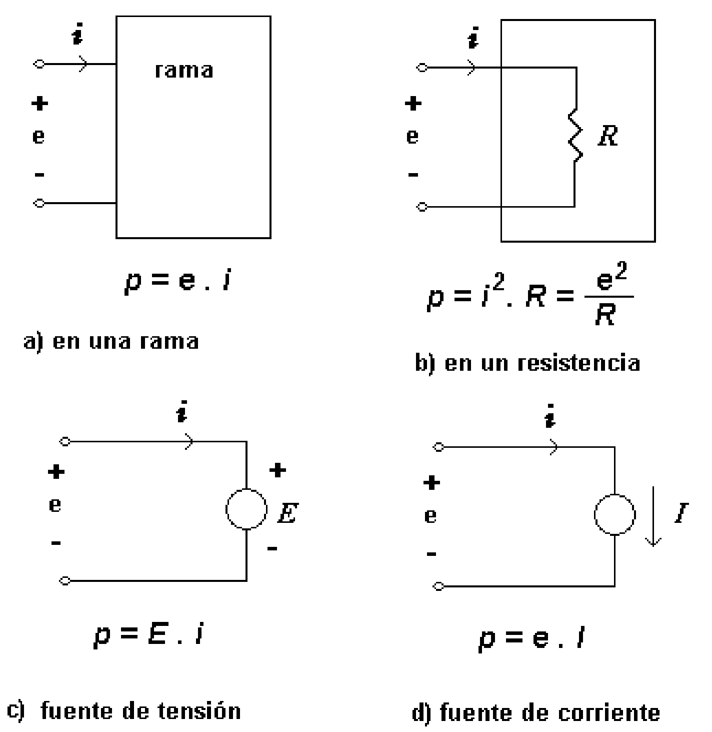

Figura 5.1: Cómputo de la potencia en una rama

En una red resistiva en la que existen varias ramas y generadores, se debe cumplir que la potencia, toda la potencia suministrada por las fuentes debe ser absorbida por los elementos pasivos. Entonces

$$\sum p = 0 \tag{5.2}$$

Recordemos, que si bien la potencia no es un vector, sí tiene una polaridad. Habíamos definido una potencia positiva cuando es potencia disipada, en cambio, si la potencia es negativa, la potencia es suministrada a la carga. (Ver figura 5.1). Si la rama está formada por una resistencia, la potencia será positiva y disipada (figura 5.1 (b));

$$p_R = e \times i = i^2 R = \frac{e^2}{R} \tag{5.3}$$

La potencia en las fuentes (figura (c) y (d)) será:

$$\begin{aligned} p_E &= e \times i = E \times i; \\ P_I &= e \times i = e \times I; \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde *E* es la tensión del generador de tensión e *I* es la corriente del generador de corriente.
La potencia será positiva, si las fuentes están absorbiendo potencia del resto del circuito, y será negativa si proveen potencia al circuito. En este caso la corriente será saliente por el

borne positivo, y en el cálculo nos dará una corriente negativa respecto del marcado en la figura 5.1.

Ejemplo: Calcular el balance de potencia del circuito de la figura 5.2

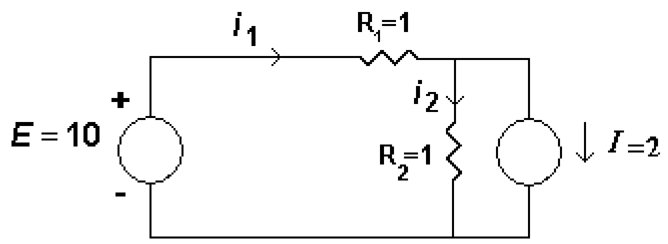

Figura 5.2: Balance de potencia

Solución: Resolviendo por superposición, la corriente i_1 en la R_1 será el aporte del generador de tensión, más el de corriente, en forma similar para la corriente i_2 en la R_2:

$$i_1 = i_{1E} + i_{1I} = \frac{10}{R_1 + R_2} + 2\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5 + 1 = 6\text{A}$$

$$i_2 = i_{2E} + i_{2I} = \frac{10}{R_1 + R_2} - 2\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 5 - 1 = 4\text{A}$$

$$e_1 = i_1 R_1 = 6\text{V}$$

$$e_2 = i_2 R_2 = 4\text{V}$$

$$P_{R_1} = i_1^{\,2} R_1 = 6^2 \times 1 = 36\text{W}$$

$$P_{R_2} = i_2^{\,2} R_2 = 4^2 \times 1 = 16\text{W}$$

Potencia disipada en las resistencias: $P_{R_1} + P_{R_2} = 52\text{W}$

La potencia entregada o disipada en las fuentes será:

$$P_R = E \times i_1 = 10 \times (-6) = -60\text{W}$$

$$P_I = e \times I = 2 \times 4 = 8\text{W}$$

Potencia total = -52 W

Nótese que la fuente de corriente no está entregando potencia (signo positivo), sino consumiendo, por lo tanto no siempre las fuentes suministran energía. La suma de las potencias disipadas y entregadas debe ser nulo para que el circuito esté bien calculado.

Balance neto: Potencia disipada + potencia entregada: $\Sigma_p = 52 - 52 = 0$

1.2.2 Potencia usando corrientes en las mallas o tensiones nodales

Cuando se resolvieron los circuitos a través de los distintos métodos, (ver capítulo 1), se obtuvieron las corrientes y tensiones en todas las ramas. Conocidas estas variables, es posible calcular las potencias en cada rama del circuito, ya sea consumidas por las resistencias o entregadas por las fuentes. Sin embargo, se puede aprovechar la misma notación matricial del método de las corrientes en las mallas o tensiones nodales para calcular directamente las potencias consumidas y entregadas por el circuito.

Potencia usando corriente en las mallas: Supongamos que se ha resuelto un circuito por corriente en las mallas, la notación general tendrá la siguiente forma [ver también (1.34) y (1.42)]:

$$\begin{cases} i_1 r_{11} - i_2 r_{12} - i_3 r_{13} \cdots - i_k r_{1k} = E_1 \\ - i_1 r_{21} + i_2 r_{22} - i_3 r_{23} \cdots - i_k r_{2k} = E_2 \\ \vdots \\ - i_1 r_{k1} - i_2 r_{k2} - i_3 r_{k3} \cdots + i_k r_{kk} = E_k \end{cases} \tag{5.5}$$

donde i_1, i_2,...,i_k, son las k corrientes de mallas, r_{11},r_{22},...,r_{kk}, son la suma de las resistencias de las mallas, r_{jk}, $j \neq k$ son las resistencias comunes de las mallas vecinas, y E_1, E_2, ... E_k, son la suma de las fuentes conectadas en cada rama. Recordemos que por el teorema de la reciprocidad los coeficientes $r_{21} = r_{12}$, $r_{13} = r_{31}$,.., $r_{jk} = r_{kj}$. Ahora, si se multiplica la primera ecuación por i_1, la segunda por i_2, y así sucesivamente y sumamos todos los términos queda:

$$\begin{cases} i_1 r_{11} - i_2 r_{12} - i_3 r_{13} \cdots - i_k r_{1k} = E_1 \\ - i_1 r_{21} + i_2 r_{22} - i_3 r_{23} \cdots - i_k r_{2k} = E_2 \\ \vdots \\ - i_1 r_{k1} - i_2 r_{k2} - i_3 r_{k3} \cdots + i_k r_{kk} = E_k \end{cases} \left| \begin{matrix} \times i_1 \\ \times i_2 \\ \vdots \\ \times i_k \end{matrix} \right. \tag{5.6}$$

$$i_1^2 r_{11} - 2r_{12} i_1 i_2 - 2r_{13} i_1 i_3 - \cdots r_{22} i_2^2 - 2r_{23} i_2 i_3 - \cdots + r_{kk} i_k^2 = E_1 i_1 + E_2 i_2 + \cdots + E_k i_k$$

En el miembro izquierdo de la igualdad, es decir

$$p_R = r_{11} {i_1}^2 - 2r_{12} i_1 i_2 - 2r_{13} i_1 i_3 - \cdots + r_{22} {i_2}^2 - 2r_{23} i_2 i_3 - \cdots + r_{33} {i_3}^2 - \cdots + r_{kk} i_k^2$$

está representada la potencia total disipada por todas las resistencias del circuito. Este número es siempre positivo y se lo denomina *forma cuadrática definida positiva.* Nótese que a pesar de los signos negativos explícitos, este número debe dar positivo, ya que representa una potencia absorbida. El miembro derecho de la igualdad en (5.6) nos determina el balance neto de las potencias entregadas por las fuentes:

$$p_F = E_1 i_1 + E_2 i_2 + \cdots + E_k i_k$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones mismas de corrientes en las mallas es posible determinar el balance neto del circuito. Nótese que primero es necesario resolver las ecuaciones de malla y luego proceder a calcular este balance de potencia. Otro hecho interesante, es que no estamos calculando las potencias en cada rama, sino su balance neto, usando las corrientes de mallas. Para calcular la potencia en una rama (o en todas) deberá calcularse la corriente de esa rama, a partir de las corrientes de mallas, calcular la caída de tensión en las ramas y luego ver su potencia. Lo mismo debe decirse si desea analizar si una fuente en particular está suministrando o entregando potencia. Debe primero analizarse la corriente que circula por la fuente y de allí estudiar si su signo es positivo o negativo, de acuerdo a la convención de signos visto más arriba.

Analicemos un ejemplo: Verificar el balance de potencia, usando el método de corrientes en las mallas.

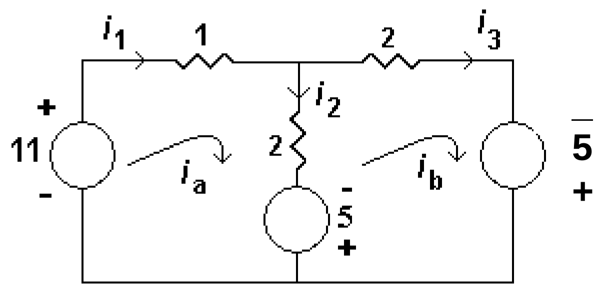

Figura 5.3: Ejemplo de cálculo de potencia por corriente en las mallas

Solución. Primero se plantean las ecuaciones de corrientes en las mallas del circuito de figura 5.3:

$$\begin{cases} ia\times 3 - ib\times 2 = 16 \\ -ia\times 2 + ib\times 4 = 0 \end{cases} \text{; de allí se obtiene que } \begin{cases} ia = 8A \\ ib = 4A \end{cases}.$$

Aplicando la ecuación (5.6), la potencia disipada en las resistencias será:

$$\begin{aligned} p_R &= ia^2\times 3 - 2\times iaib\times 2 + ib^2\times 4 \\ &= 64\times 3 - 2\times 8\times 4\times 2 + 16\times 4 \\ &= 192 - 128 + 64 = 128 \text{ W} \end{aligned}$$

Verifiquemos la potencia total disipada por las resistencias, calculando las potencias en cada rama, esto es, a partir de las corrientes de ramas i_1, i_2, e i_3:

$$\begin{aligned} p_R &= i_1^2(1) + i_2^2(2) + i_3^3(1) = 8^2\times 1 + 4^2\times 2 + 4^2\times 2 \\ p_R &= 64 + 32 + 32 = 128 \text{ W} \end{aligned}$$

siendo $i_1 = ia = 8$ A, $i_2 = (ia\text{-}ib) = 4$ A, $i_3 = ib = 4$ A. Vemos entonces, que la potencia total disipada en las resistencias, coincide con el cálculo realizado usando las corrientes de mallas. Verifiquemos ahora, por ambos métodos, la potencia neta entregada por las fuentes.

$$\begin{aligned} p_F &= ia\times 16 + ib\times 0 \\ &= 8\times 16 = 128 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_F &= i_1\times 11 + i_2\times 5 + i_3\times 5 = -8\times 11 - 5\times 4 - 5\times 4 \\ &= -88 - 20 - 20 = -128 \text{ W} \end{aligned}$$

En la ecuación suprior se calculó la potencia neta usando las corrientes de mallas, en cambio en la ecuación inferior, se calculó la potencia en cada una de las fuentes. Los signos negativos indican potencia entregada. El balance neto será $p_R + p_F = 128\text{-}128 = 0$ W Verificándose en ambas las potencias entregadas y consumidas.

Balance de potencia usando tensiones nodales: En forma análoga a lo visto para corrientes en las mallas, se puede demostrar que si un circuito se ha resuelto por tensiones nodales, se puede calcular su balance de potencia consumida y entregada; a partir del juego de ecuaciones de tensiones nodales.

$$\begin{cases} e_1 g_{11} - e_2 g_{12} - e_3 g_{13} \cdots - e_k g_{1k} = I_1 \\ -e_1 g_{21} + e_2 g_{22} - e_3 g_{23} \cdots - e_k g_{2k} = I_2 \\ \vdots \\ -e_1 g_{k1} - e_2 g_{k2} - e_3 g_{k3} \cdots + e_k g_{kk} = I_k \end{cases} \tag{5.7}$$

donde e_1, e_2,...e_k, son las k tensiones en los nodos, g_{11},g_{22},...,g_{kk}, son la suma de las conductancias (1/resistencias) conectadas a los nudos, g_k, $j \neq k$ son las conductancias comunes entre dos nodos vecinos, e I_1, I_2, ... I_k, son la suma neta de las fuentes de corriente que inyectan o extraen corriente del nudo. Nuevamente recordemos que por el teorema de la reciprocidad los coeficientes $g_{21} = g_{12}$, $g_{13} = g_{31}$,.., $g_{jk} = g_{kj}$. Ahora, si se multiplica la primera ecuación por e_1, la segunda por e_2, y así sucesivamente y sumamos todos los términos queda:

$$\begin{cases} e_1 g_{11} - e_2 g_{12} - e_3 g_{13} \cdots - e_k g_{1k} = I_1 & \times e_1 \\ -e_1 g_{21} + e_2 g_{22} - e_3 g_{23} \cdots - e_k g_{2k} = I_2 & \times e_2 \\ \vdots & \vdots \\ -e_1 g_{k1} - e_2 g_{k2} - e_3 g_{k3} \cdots + e_k g_{kk} = E_k & \times i_k \end{cases} \tag{5.8}$$

$$e_1^2 g_{11} - 2g_{12}e_1e_2 - 2g_{13}e_1e_3 - \cdots g_{22}e_2^2 - 2g_{23}e_2e_3 - \cdots + g_{kk}e_k^2 = I_1e_1 + I_2e_2 + \cdots + I_ke_k$$

Análogamente a lo visto anteriormente, el miembro izquierda de la igualdad, es decir

$$p_R = g_{11}e_1{}^2 - 2g_{12}e_1e_2 - 2g_{13}e_1e_3 - \cdots + g_{22}e_2{}^2 - 2g_{23}e_2e_3 - \cdots + g_{33}e_3{}^2 - \cdots + g_{kk}e_k^2$$

está representando la potencia total disipada por todas las resistencias del circuito. El miembro derecho de la igualdad en (5.8) determina el balance neto de las potencias entregadas por las fuentes, usando las tensiones nodales y los valores de corriente de los generadores:

$$p_F = I_1e_1 + I_2e_2 + \cdots + I_ke_k$$

Calculemos en el ejemplo de la figura 5.4, el balance de potencia neta, usando las tensiones nodales:

Solución: Se resuelve primero el circuito de la figura 5.4, por el método de las tensiones nodales:

$$\begin{cases} e_a \times 2 - e_b \times 1 = 1 - 2 \\ -e_a \times 1 + e_b \times 2 = 0 \end{cases} \text{; de allí se obtiene que } \begin{cases} e_a = -\frac{2}{3}\,\mathrm{V} \\ e_b = -\frac{1}{3}\,\mathrm{V} \end{cases}$$

Una vez resuelto las tensiones nodales, calculamos la potencia disipada en las resistencias por (5.8):

$$\begin{aligned} p_R &= e_a^2 g_{11} - 2e_ae_bg_{12} + e_b^2 g_{22} \\ &= \frac{4}{9} \times 2 - 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{9} \times 2 \\ &= \frac{2}{3}\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

La potencia entregada por las fuentes será, según (5.8):

$$
\begin{aligned}
p_F &= I_1 e_a + I_2 e_b \\
&= -1 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

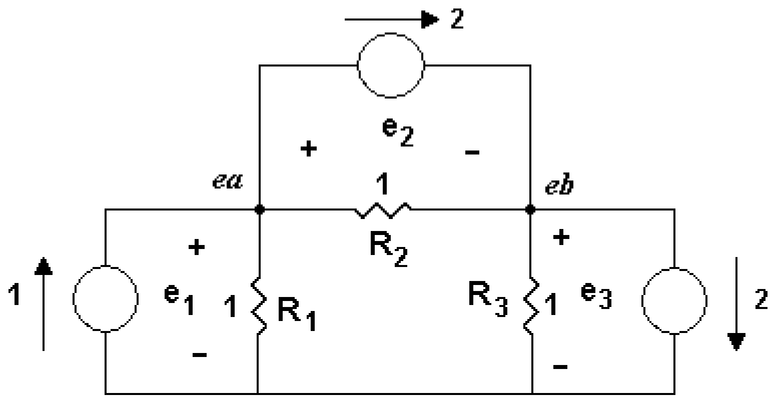

Figura 5.4. Ejemplo de verificación de potencia

Igual que en el ejemplo anterior podemos verificar calculando las tensiones en cada rama, y verificando la potencia disipada en cada resistencia y la potencia en cada fuente:

$$
\begin{aligned}
p_R &= \frac{e_1^2}{R_1} + \frac{e_2^2}{R_2} + \frac{e_3^2}{R_3} \\
&= \frac{4}{9} \div 1 + \frac{1}{9} \div 1 + \frac{1}{9} \div 1 = \frac{2}{3}\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

donde $e_1 = e$a = -2/3, $e_2 = (e$a - eb) = –1/3 , $e_3 = e$b =-1/3; y R_1=1, R_2=1 R_3=1. La potencia en cada una de las fuentes será:

$$
\begin{aligned}
p_F &= -1 \times e_1 + 2 \times e_2 + 2 \times e_3 \\
&= -1 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

El menos 1 de la primera fuente, significa que la corriente sale por el terminal positivo. La potencia neta será: $p_R + p_F = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0\mathrm{W}$. Con lo cual verifica los cálculos anteriores.

Tanto el cálculo de la potencia neta usando el método de las corrientes en las mallas o el de las tensiones nodales, entrega en forma ordenada y con los signos adecuados las potencias consumidas y entregadas netas por las fuentes. En los ejemplos de cálculo de potencia por rama debe tenerse especial precaución de respetar la convención de signos de la potencia. Lo cual no pocas veces produce serios inconvenientes o errores. Es por ello que es preferible el método de las corrientes en las mallas o tensiones nodales.

1.2.3 Potencia en dipolos activos y pasivos.

Potencia en dipolos pasivos: Calcular la potencia en un dipolo pasivo, es determinar la disipación de potencia neta realizada en sus resistencias. Ya vimos en el Capítulo 2, que un dipolo puede reemplazarse por una resistencia equivalente, por lo tanto, la potencia neta disipada puede calcularse conociendo la corriente y tensión en esa resistencia equivalente. La potencia disipada por la resistencia equivalente es la potencia disipada por todo el dipolo.
Veamos en el siguiente ejemplo de la figura 5.5, la potencia disipada por cada resistencia, y luego el balance neto, sumando todas las potencias; y luego su cálculo a través de la resistencia equivalente del dipolo.

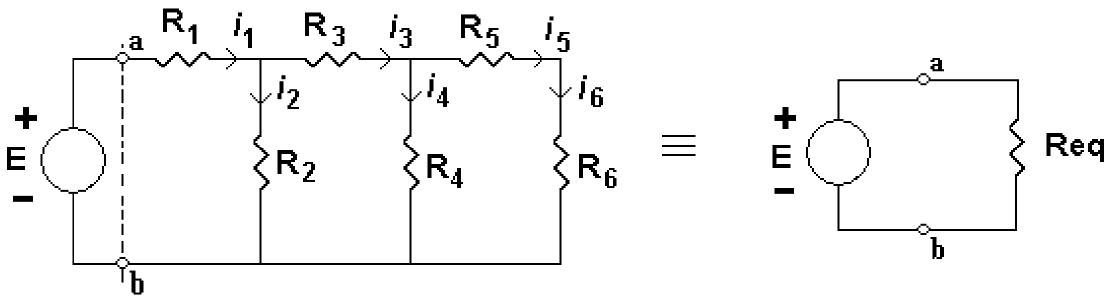

Figura 5.5: Cálculo de la potencia en un dipolo.

Supongamos que $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1\Omega$; y E = 52 V

La forma de resolver los circuitos tipo escalera como el de la figura es primero encontrar la resistencia equivalente, y de allí se puede obtener la corriente i_1, y luego las otras variables del circuito, según lo vimos en el capítulo 2, apartado 1.2.2, figura 2.6. Siguiendo este procedimiento, podemos hallar que: Req=13/8; i_1=32 A, i_2=20 A, i_3=12 A, i_4= 8 A, i_5= 4 A i_6=4 A. La potencia disipada en cada resistencia será:

$$
\begin{aligned}
p_{R1} &= i_1^2 R_1 = 32^2 \times 1 = 1024\,W \\
p_{R2} &= i_2^2 R_2 = 20^2 \times 1 = 400\,W \\
p_{R3} &= i_3^2 R_3 = 12^2 \times 1 = 144\,W \\
p_{R4} &= i_4^2 R_4 = 8^2 \times 1 = 64\,W \\
p_{R5} &= i_5^2 R_5 = 4^2 \times 1 = 16\,W \\
p_{R6} &= i_6^2 R_6 = 4^2 \times 1 = 16\,W \\
\hline
\sum p_R &= 1664W
\end{aligned}
$$

la potencia equivalente del dipolo será $p_{dip} = \dfrac{E^2}{Re\,q} = \dfrac{52^2}{13/8} = 1664W$

Por lo que se demuestra que la potencia neta total disipada del dipolo puede calcularse a través de su resistencia equivalente o como suma de las disipaciones en cada resistencia.

Potencia en dipolos activos: Anteriormente hemos visto que un circuito resistivo con fuentes puede reemplazarse, usando los teoremas de Thèvenin o Norton, por una fuente y una resistencia equivalente, vistos para el par de terminales del dipolo. Además, es posible reemplazar un generador real de tensión, por un generador real de corriente y viceversa. Estas operaciones de equivalencia eran válidas a los efectos de calcular la corriente, la tensión o una resistencia equivalente para un par de terminales específicos. Ahora veremos que efectos produce estas equivalencias sobre el cómputo de la potencia. Supongamos el circuito siguiente de la figura 5.6, y calculemos el balance de potencia.

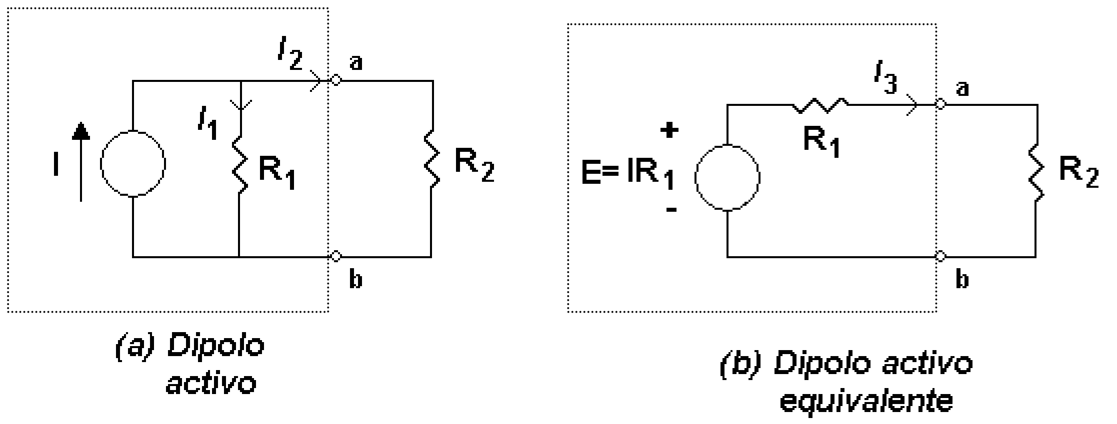

Figura 5.6: Potencia en dipolos activos

Supongamos que I = 11 A, R_1= 10 Ω y R_2=1 Ω. En el circuito de la figura (a), por divisor de corriente obtenemos que

$$i_1 = I\,\frac{R_2}{R_1+R_2} = 11\frac{1}{11} = 1\,\text{A}\,; \qquad i_2 = I\,\frac{R_1}{R_1+R_2} = 11\frac{10}{11} = 10\ \text{A}$$

Entonces las potencias en cada resistencia del dipolo de fig. (a) será:

$$p_{R1} = i_1^2 R_1 = 1^2 \times 10 = 10\ \text{W}$$

$$p_{R2} = i_2^2 R_2 = 10^2 \times 1 = 100\ \text{W}$$

$$\sum p_R = p_{R1} + p_{R2} = 110\ \text{W}$$

La potencia entregada por la fuente de corriente será:

$$p_I = I \times e_1 = I \times (-\,i_1 R_1) = 11 \times (-10) = -110\ \text{W}$$

La potencia neta será: $\sum p_R + p_I = 110 - 110 = 0$ W ; quedando verificada las potencias.

Realicemos el mismo cálculo para el circuito equivalente de este dipolo, como se grafica en la figura (b). La tensión equivalente del generador de tensión será $E = IR_1$ = 11×10 = 110 V. La corriente i_3 será:

$$i_3 = \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{110}{11} = 10\ \text{A}$$

Una vez obtenida la corriente se puede calcular las potencias disipadas por las resistencias, la entregada por la fuente, y el balance neto:

Potencia disipada:

$$p_{R1} = i_3^2 R_1 = 10^2 \times 10 = 1000 \text{ W}$$
$$p_{R2} = i_3^2 R_2 = 10^2 \times 1 = 100 \text{ W}$$
$$\sum p_R = p_{R1} + p_{R2} = 1100 \text{ W}$$

Potencia entregada:

$$p_E = E \times i_3 = 110 \times (-10) = -1100 \text{ W}$$

Balance neto:

$$\sum p_R + p_E = 1100 - 1100 = 0 \text{ W}$$

De aquí observamos varios elementos interesantes. Por un lado cada circuito cumple con los balances netos de potencia, pero en le caso (a) la potencia es de 110 W , en cambio en le caso (b) es de 1100 W. Es decir el nivel del segundo caso es 10 veces superior. Y por otro lado los niveles de potencia disipada por la resistencia R_2 son iguales en ambos casos, no así para la R_1.
Esto es correcto, pues para la resistencia R_2 ambos circuitos (a la derecha de los terminales a-b) son equivalentes. Pero a los efectos de la potencia, internamente ambos dipolo no se comportan de igual manera. Recordemos que la potencia no es una variable lineal, y por lo tanto no se cumplen los principios de linealidad y superposición. Como veremos en el siguiente ejemplo.

Potencia y superposición: Verifiquemos las potencias en el siguiente ejemplo, y apliquemos el principio de superposición para resolverlo.

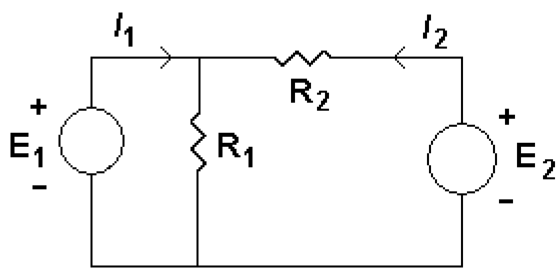

Figura 5.7: Potencia y superposición

Supongamos que E_1= E_2 = 10 V; y R_1 = R_2 = 1Ω. Si sólo está presente el generador E_1, entonces, R_1 y R_2 están en paralelo, por lo tanto la resistencia equivalente será Req_1 =1/2 Ω. La potencia disipada será:

$$p_{E1} = \frac{E_1^2}{Req_1} = \frac{100}{1/2} = 200 \text{ W}$$

Si solo está presente el generador E_2, la resistencia R_1 desaparece pues está en paralelo con un cortocircuito. Por lo tanto la Req_2 = R_2=1 Ω. Su potencia disipada será:

$$p_{E2} = \frac{E_2^2}{Req_2} = \frac{100}{1} = 100 \text{ W}$$

Si sumamos los cálculos de potencia en ambos casos (por superposición de potencias):

$$\sum p = p_{E1} + p_{E2} = 200 + 100 = 300 \text{ W}$$

Calculemos las corrientes i_1 e i_2 por superposición, esto es, enmudeciendo un generador por vez:

$$i_1 = i_{1E1} + i_{1E2} = 20 - 10 = 10\ A$$
$$i_2 = i_{2E1} + i_{2E2} = -10 + 10 = 0\ A$$

Una vez calculada las corrientes, calculemos las potencias, calculemos la potencia total entregada por ambas fuentes simultáneamente:

$$\sum p_t = E_1 i_1 + E_2 i_2 = 10 \times 10 + 10 \times 0 = 100 \text{ W}$$

vemos entonces, que si calculamos las potencias en forma separadas la potencia es mucho mayor que ambas fuentes actuando conjuntamente. Por lo tanto no se puede aplicar el principio de superposición para las potencias, porque como ya se dijo, este principio es válido para variables lineales. Si se pueden calcular las corrientes y tensiones separadamente por superoposición, y luego calcular las potencias, pero no éstas directamente.

1.2.4 Potencia en cuadripolos.

Similarmente a lo visto anteriormente, la potencia total neta disipada en un cuadripolo resistivo puede calcularse, o bien sumando las potencias disipadas en cada resistencia, o bien a través de un circuito equivalente, o a través de los parámetros de un cuadripolo (parámetros *r* o *g*). En cada caso los cálculos netos serán iguales, pero los cálculos intermedios serán distintos, ya que los circuitos son distintos. Sin embargo la equivalencia de dichos circuitos es válida para otros circuitos conectados externamente al par de terminales de entrada y salida definidos para dicho cuadripolo.

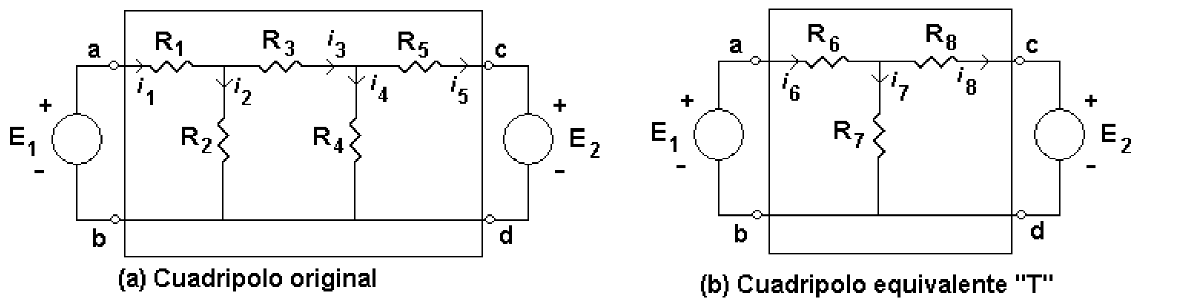

Figura 5.8: Potencia en cuadripolos pasivos

Supongamos que el circuito de la figura 5.8 (a) tenga los siguientes valores: $E_1 = E_2 = 12$V; $R_1 = R_5 = 1\Omega$; $R_2 = R_3 = R_4 = 3\Omega$. Calculando sus corrientes obtendríamos; $i_1 = i_2 = i_4 = 3$ A; $i_5 =$ 3 A, $i_3 = 0$ A.

Entonces las potencias disipadas en sus resistencias será:

$$
\begin{aligned}
p_{R1} &= i_1^2 R_1 = 9 \times 1 = 9 \text{ W} \\
p_{R2} &= i_2^2 R_2 = 9 \times 3 = 27 \text{ W} \\
p_{R3} &= i_3^2 R_3 = 0 \times 3 = 0 \text{ W} \\
p_{R4} &= i_4^2 R_4 = 9 \times 3 = 27 \text{ W} \\
p_{R5} &= i_5^2 R_5 = 9 \times 1 = 9 \text{ W} \\
\hline
\sum p_R &= 72 \text{ W}
\end{aligned}
$$

Hagamos el mismo cálculo en el circuito equivalente de la figura 5.8 (b). Este circuito tiene los siguientes valores: $R_6 = R_8 = 2\Omega$; $R_7 = 1$; $i_6 = 3$ A; $i_7 = 6$ A y $i_8 = -3$ A. El balance de las potencias disipadas será:

$$
\begin{aligned}
p_{R6} &= i_6^2 R_6 = 9 \times 2 = 18 \text{ W} \\
p_{R7} &= i_7^2 R_7 = 36 \times 1 = 36 \text{ W} \\
p_{R8} &= i_8^2 R_8 = 9 \times 2 = 18 \text{ W} \\
\hline
\sum p_R &= 72 \text{ W}
\end{aligned}
$$

Observamos que el balance final neto es el mismo, pero sus cálculos individuales no tienen relación entre sí. Por lo tanto, si desea computar la potencia total neta es válido calcularlo a partir de los valores originales, figura (a), o a partir de un circuito equivalente, como el de la figura (b).

Cálculo de potencia usando parámetros "r" o "g". Si desconocemos los componentes interiores de un cuadripolo pasivo, podemos determinar su consumo de potencia, a partir de un ensayo externo, determinando sus parámetros "r" o "g", según lo visto en el capítulo 2.

Entonces un cuadripolo, caracterizado por estos parámetros puede representarse como la figura 5.9. Si lo definimos por sus parámetros "r" (ver ecuación 2.15 y):

$$
\begin{cases}
e_1 = r_{11} I_1 + r_{12} I_2 \\
e_2 = r_{21} I_1 + r_{22} I_2
\end{cases}
\tag{5.9}
$$

Para calcular la potencia, podemos multiplicar la primera ecuación de (5.9) por I_1, y la segunda por I_2; y luego sumar miembro a miembro (recordemos que $r_{12} = r_{21}$). Esto es:

$$
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{l|l}
e_1 = r_{11} I_1 + r_{12} I_2 & \times I_1 \\
e_2 = r_{21} I_1 + r_{22} I_2 & \times I_2
\end{array}
\right. \\
\hline
e_1 I_1 + e_2 I_2 = r_{11} I_1^2 + 2 r_{12} I_1 I_2 + r_{22} I_2^2
\end{array}
\tag{5.10}
$$

La primera parte de la igualdad representa la potencia neta suministrada por las fuentes, y la segunda parte la potencia disipada por las resistencias. Si el cuadripolo es pasivo, este cómputo debe dar siempre positivo.

En forma análoga, podemos hacerlo para un cuadripolo definido por sus parámetros "g":

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}E_1 + g_{12}E_2 \\ i_2 = g_{21}E_1 + g_{22}E_2 \end{cases} \tag{5.11}$$

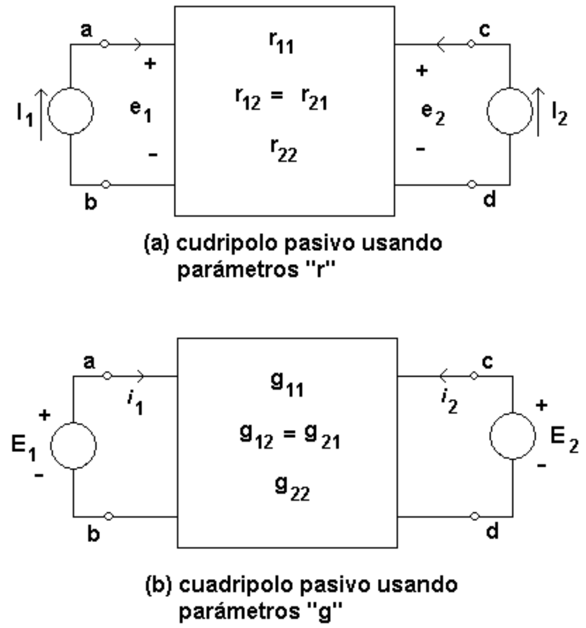

Figura 5.9: Potencia y cuadripolos definidos por sus parámetros "r" o "g"

y la potencia multiplicando la primera ecuación de (5.11) por E_1, y la segunda por E_2; y luego sumando miembro a miembro (recordando que $g_{12} = g_{21}$). Por lo tanto:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}E_1 + g_{12}E_2 & \times E_1 \\ i_2 = g_{21}E_1 + g_{22}E_2 & \times E_2 \end{cases}$$
$$\overline{i_1E_1 + i_2E_2 = g_{11}E_1^2 + 2g_{12}E_1E_2 + r_{22}E_2^2} \tag{5.12}$$

Idéntico comentario puede hacerse a lo visto para los parámetros "r".

2. Potencia en corriente alterna

El cálculo de potencia visto hasta aquí, sólo contemplaba la disipación en las resistencias, pues los elementos como las inductancias y capacitores, en c.c. sólo tienen un efecto transitorio corto, y desvaneciéndose éstos rápidamente. Sin embargo, cuando la corriente varía en forma permanente, como en la c.a. las inductancias y capacitores tiene el efecto de almacenar y luego entregar energía. Este fenómeno hace que tenga relevancia el uso del concepto de energía y no sólo el de potencia. Esta complicación fue motivo de muchos debates hacia finales del siglo XIX. Como ya se explicara en la introducción al capítulo, la normalización del uso de la corriente alterna, se debió en gran parte a la simplificación propuesta P. Steinmetz. Como veremos a continuación, el cálculo de la potencia instantánea en corriente alterna es bastante complicada, pues implica la aplicación de la trigonometría; sin embargo el uso de potencias promedios, y valores eficaces permitió un uso sencillo similar a los cómputos de la corriente continua. Por ello primeramente debemos definir varios conceptos previos, para luego desarrollar el método propio usado en c.a.

2.1 Valor eficaz o valor r.m.s.

El valor eficaz I_{ef} (o I_{rms}) de una corriente periódica $i(t)$, se define como el valor constante de corriente que producirá la misma potencia disipada en una resistencia, que la que produciría como promedio la corriente periódica. Es decir, buscamos un valor promedio que produzca el mismo efecto de disipación que produciría una corriente continua.

La potencia promedio entregada por una corriente periódica a una resistencia será:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\, R\, dt \tag{5.13}$$

donde T es el período de la función periódica. La potencia producida por una corriente constante sobre la misma resistencia será:

$$P = {I_{ef}}^2 R \tag{5.14}$$

siendo I_{ef} esa corriente de c.c. que iguala ambas potencias. Entonces igualando (5.13) y (5.14):

$$\begin{aligned} I_{ef}^2 R &= \frac{R}{T}\int_0^T i^2(t)\, dt \\ I_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\, dt} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Por lo tanto se define el valor eficaz como la raíz cuadrada del valor medio elevado al cuadrado. Por ello este valor se lo denomina también valor r.m.s (del inglés root mean square Root: raíz; mean: valor medio; square: cuadrado).

Si la corriente (o tensión) periódica es de tipo senoidal, con valor máximo $|I|$ y frecuencia angular ω:

$$i(t) = |I| \cos \omega t\ ,$$

Entonces, la potencia instantánea desarrollada sobre una resistencia será:

$$\begin{aligned} p &= e \times i = i^2 R = |I|^2 R \cos^2 \omega t = \\ &= \frac{|I|^2 R}{2}\left(1 + \cos 2\omega t\right) = \frac{|I|^2 R}{2} + \frac{|I|^2 R}{2}\cos 2\omega t \end{aligned} \tag{5.16}$$

Vemos que esta potencia está formada por dos términos uno constante y otro que varía con el doble de la frecuencia. Si calculamos la potencia promedio P sobre la relación (5.16):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{|I|^2 R}{2} + \frac{|I|^2 R}{2}\cos 2\omega t\right) dt \\ &= \frac{|I|^2 R}{2} + \frac{|I|^2 R}{2T}\int_0^T \cos 2\omega t\ dt \\ &= \frac{|I|^2 R}{2} \end{aligned} \tag{5.17}$$

El primer término es constante y sale fuera de la integral. En cambio la integral del término cos 2ωt es cero, ya que el promedio en el período de cualquier onda senoidal es cero. Esto se aprecia en la figura 5.10, donde se grafica la potencia instantánea desarrollada en una resistencia para una corriente senoidal. Finalmente, igualando (5.17) y (5.14) se obtiene la corriente eficaz de una función senoidal:

$$
\begin{aligned}
{I_{ef}}^2 R &= \frac{|I|^2 R}{2} \\
I_{ef} &= \sqrt{\frac{|I|^2}{2}} = \frac{|I|}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
\qquad (5.18)
$$

Entonces, el valor eficaz o r.m.s. de una corriente (o tensión) senoidal es el valor máximo dividido raíz cuadrada de 2, es decir

$$I_{ef} \approx 0.707\,|I| \qquad (5.19)$$

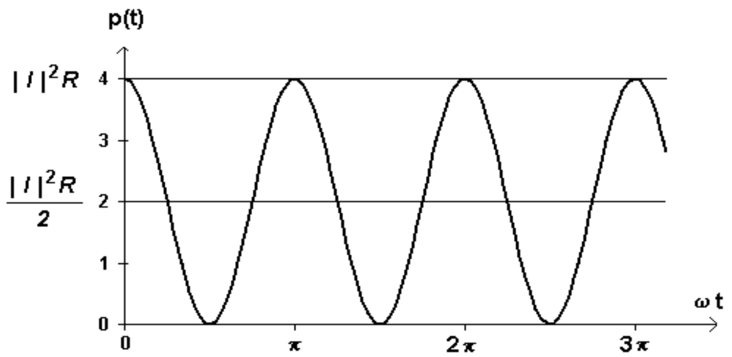

Figura 5.10 . Potencia desarrollada en una resistencia

La potencia media sobre una resistencia también puede expresarse en términos de la tensión eficaz:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{|V|^2}{2R} = \frac{V_{ef}^2}{R} \\
P &= \frac{|I|^2 R}{2} = I_{ef}^2 R
\end{aligned}
\qquad (5.20)
$$

Una vez definidos los valores eficaces, las potencias promedios de una onda senoidal, sobre una resistencia es similar a lo visto para corriente continua.

Los valores eficaces dependen de las formas de onda periódica, así, si la onda tiene otra forma distinta a la senoidal, deberá calcularse a partir de la definición 5.15. Veamos como ejemplo, los valores eficaces para una onda triangular y una onda cuadrada, ambas con período T, según se grafica en la figura 5.11. La onda triangular de la figura (a) puede definirse como:

$$i(t) = \frac{|I|}{T} t \quad 0 \le t \le T$$

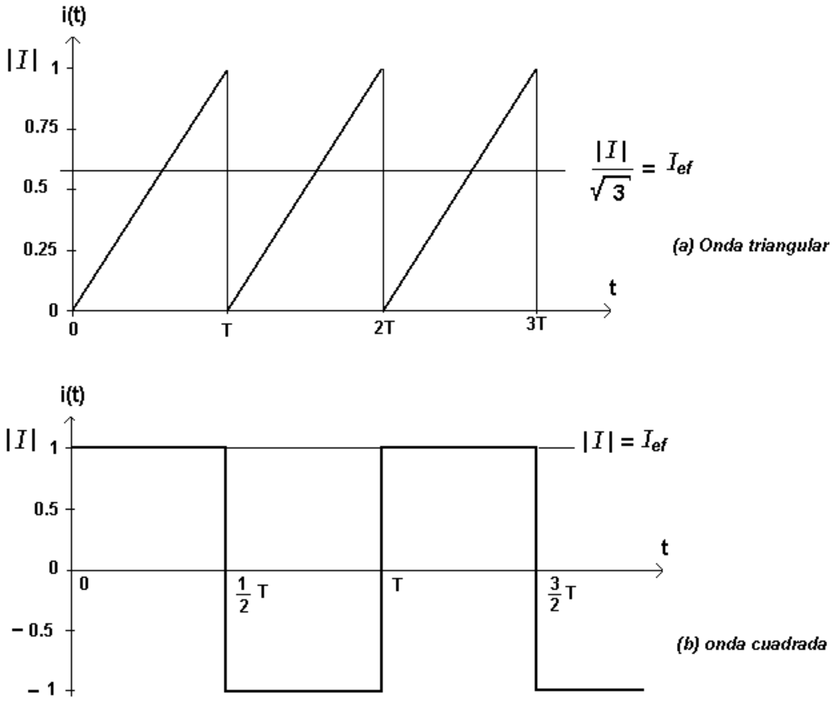

Figura 5.11: Valor eficaz para otras formas de ondas

Aplicando la definición:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{|I|^2}{T^2} t^2 dt$$

$$= \frac{|I|^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T$$

$$= \frac{|I|^2}{3}$$

Por lo tanto le valor eficaz será:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{|I|^2}{3}} = \frac{|I|}{\sqrt{3}} \qquad (5.21)$$

Para la onda cuadrada de período T de la figura (b), la función i(t) es:

$$i(t) = |I| \quad 0 \le t \le T; \quad \begin{cases} +I & 0 \le t \le T/2 \\ -I & t/2 \le t \le T \end{cases}$$

Aplicamos la definición de valor eficaz:

$$
\begin{aligned}
I_{ef}^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T |I|^2 dt = \frac{|I|^2}{T}\int_0^T dt \\
&= \frac{|I|^2}{T}[t]_0^T = \frac{|I|^2}{T} T = |I|^2
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

Obteniéndose para la onda cuadrada un valor eficaz igual al valor máximo.

$$I_{ef} = \sqrt{|I|^2} = |I| \tag{5.23}$$

Por lo tanto el procedimiento general es:

a) hallar el cuadrado de la forma de onda,
b) calcular el promedio en su período,
c) obtener la raíz cuadrada.

Otra deducción importante para comprender la importancia del valor eficaz, lo constituye el siguiente caso. Supongamos que la entrada de un circuito es alimentada por la combinación lineal de dos señales senoidales, pero de distinta frecuencias. Se desea obtener el valor eficaz de esa suma de funciones, en función de los valores eficaces de cada onda.

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= |I_1| \, cos(\omega_1 t + \theta_1) \\
i_2(t) &= |I_2| \, cos(\omega_2 t + \theta_2)
\end{aligned}
$$

La suma de ambas señales será:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = |I_1| \, cos(\omega_1 t + \theta_1) + |I_2| \, cos(\omega_2 t + \theta_2) \tag{5.24}$$

Como se acaba de decir, para obtener su valor eficaz debemos primero elevar al cuadrado:

$$i^2(t) = |I_1|^2 cos^2(\omega_1 t + \theta_1) + |I_2|^2 cos^2(\omega_2 t + \theta_2) + 2|I_1||I_2| \, cos(\omega_1 t + \theta_1) cos(\omega_2 t + \theta_2) \tag{5.25}$$

luego debemos obtener el promedio. El promedio de cada coseno cuadrado es ½, en cambio el promedio del producto de cosenos de distintas frecuencias es 0, por la propiedad de ortogonalidad de las funciones senoidales. Por lo tanto el promedio de $i^2(t)$ es:

$$\overline{i^2(t)} = \frac{|I_1|^2}{2} + \frac{|I_2|^2}{2} \tag{5.26}$$

y tercero debemos obtener la raíz cuadrada para calcular el valor eficaz

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{|I_1|^2}{2} + \frac{|I_2|^2}{2}} \tag{5.27}$$

De aquí podemos extraer las siguientes conclusiones o reglas:

1) Dos señales *continuas* pueden sumarse *aritméticamente*
2) Dos señales *senoidales de la misma frecuencia* pueden sumarse *vectorialmente* (suma fasorial o *suma geométrica*).
3) Dos señales *senoidales de frecuencia distintas*, solo pueden sumarse sus *valores eficaces al cuadrado.*

Evidentemente el primer caso contiene mayor información que el segundo, y el segundo más información que el tercero. Mientras que en el primer caso puedo predecir su valor instantáneo en cada momento, en el tercer caso sólo se puede predecir el promedio cuadrático de la suma. Si esta corriente pasa por una resistencia, entonces el promedio cuadrático es proporcional a la potencia promedio. Por lo tanto las potencias promedios siempre se suman, independientemente del signo de la corriente. Esta conclusión será de suma utilidad para el tratamiento de la potencia de ruido en sistemas de comunicaciones y sistemas estocásticos (aleatorios) en general.

2.2. Potencia instantánea y potencia promedio

En los circuitos de corriente continua, normalmente el sentido del flujo de potencia es de la fuente a la resistencia de carga. En cambio cuando analizamos circuitos de corriente alterna, donde existen inductancias y capacidades, el flujo de potencia dependerá del ciclo de la corriente. Así en una inductancia, en la primera mitad del ciclo, la inductancia almacena energía, es decir el flujo de potencia es de la fuente a la inductancia, En cambio en la segunda mitad del ciclo, la inductancia devuelve la energía almacenada a la fuente. También puede decirse lo mismo de los capacitores pero con sentidos opuestos. Si una carga está compuesta por inductancias y capacidades, habrá también un intercambio de energía entre la inductancia y el capacitor.
Veremos a continuación el comportamiento de la potencia instantánea y promedio para cada elemento circuital, y luego para una impedancia cualquiera *Z*, cuan se excita con una corriente alterna.

2.2.1. Potencia en una resistencia.

Cuando vimos la definición de potencia promedio supusimos que una corriente senoidal circulaba por una resistencia. Veamos nuevamente este desarrollo a fin de establecer el método para los otros elementos. En un caso general, podemos escribir que

$$i(t) = |I| \cos \omega t$$
$$e(t) = |E| \cos \omega t$$

siendo $|I|$ y $|E|$ los valores máximos de la corriente y tensión, recordemos que, según lo vimos en el capítulo 4, (tabla 4.1), que la corriente y la tensión están en fase. La potencia instantánea sobre la *R* será:

$$\begin{aligned} p = e \times i &= |E||I| \cos^2 \omega t = \frac{|E||I|}{2}(1 + \cos 2\omega t) \\ &= I_{ef} E_{ef} (1 + \cos 2\omega t) = I_{ef} E_{ef} + I_{ef} E_{ef} \cos 2\omega t \end{aligned} \qquad (5.28)$$

La potencia promedio de disipación desarrollada sobre la carga será la integral en el período de la ecuación (5.28). La primera parte es constante y el promedio de la onda senoidal del doble de frecuencia será 0. Siguiendo lo desarrollado en las ecuaciones (5.16) a (5.20) y la figura (5.10):

$$P = I_{ef} E_{ef} = \frac{E_{ef}^2}{R} = I_{ef}^2 R \qquad (5.29)$$

A esta potencia promedio también se la denomina ***potencia activa***.

2.2.2 Potencia en una inductancia

Si aplicamos una tensión senoidal, (ver tabla 4.1 y ecuación. 4.19), la corriente que circula por la inductancia será:

$$e(t) = |E| \cos \omega t$$

$$i(t) = \frac{|E|}{\omega L} \sin \omega t = |I| \sin \omega t$$

Por lo tanto su potencia instantánea será:

$$\begin{aligned} p = e \times i &= \frac{|E|^2}{\omega L} \cos \omega t \sin \omega t \\ &= \frac{|E||I|}{2} \sin 2\omega t = E_{ef} I_{ef} \sin 2\omega t \end{aligned} \tag{5.30}$$

Para calcular la potencia promedio, debemos integrar en el período la ecuación (5.30). Sin embargo la integral de una función senoidal es cero; por lo que su promedio será cero.

Analizando la figura 5.12, se observa que durante la primera mitad del ciclo la potencia va del generador a la fuente, en cambio en la segunda mitad, ésta se vuelve a la fuente. A esta potencia se la denomina ***potencia reactiva o potencia pico Q*** . A pesar que la potencia promedio es cero, se usará la potencia reactiva o pico para el cálculo de la potencia en una carga cualquiera.

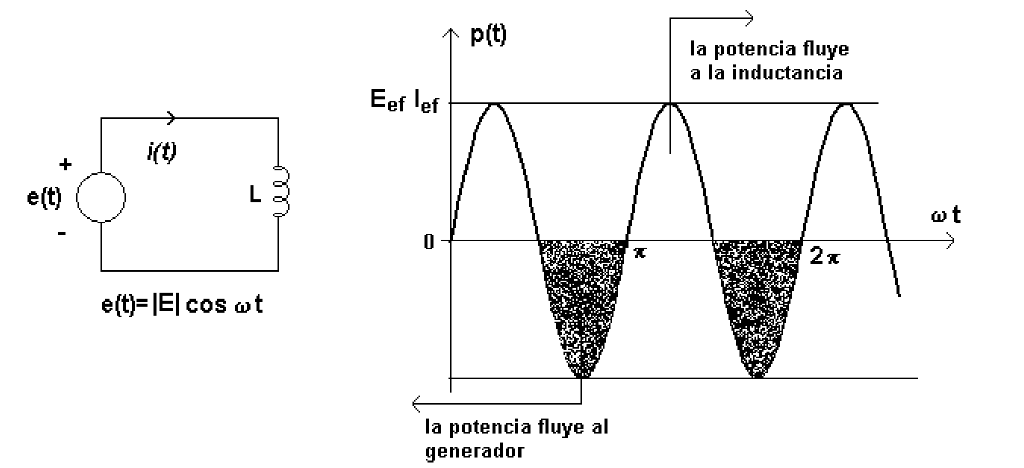

Figura 5.12: Potencia alterna en una inductancia

Esta es:

$$Q = E_{ef} I_{ef} = \frac{E_{ef}^2}{\omega L} = I_{ef}^2 \omega L \tag{5.31}$$

Esta potencia reactiva Q, está relacionada con la energía que se almacena en la inductancia.
La energía instantánea w_L en una inductancia es:

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{L|I|^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{LI_{ef}^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) \tag{5.32}$$

su energía promedio almacenada W_L es la integral de la ecuación (5.32) y es:

$$W_L = \frac{1}{2} LI_{ef}^2 \tag{5.34}$$

Si comparamos (5.34) con (5.31) nos revela que:

$$Q = 2\omega W_L \tag{5.35}$$

Por lo tanto, la potencia reactiva en una inductancia es 2ω veces la energía magnética almacenada en esa inductancia.

2.2.3 Potencia en una capacidad

Una forma similar a lo estudiado para la inductancia puede desarrollarse para la capacidad. Para esto deberá revisarse lo dicho también en el capítulo 4. Si se excita una capacidad con una tensión senoidal, la corriente será la derivada de la tensión:

$$\begin{aligned} e(t) &= |E|\, cos\, \omega t \\ i(t) &= C\frac{de}{dt} = -\omega C|E|\, sin\, \omega t \\ &= -|I|\, sin\, \omega t \end{aligned}$$

Donde $|E|$ e $|I|$ son las amplitudes máximas de la corriente y tensión. La potencia instantánea será:

$$p = e \times i = -|E||I|\, cos\,\omega t\, sin\,\omega t = -E_{ef} I_{ef}\; sin\, 2\omega t \tag{5.36}$$

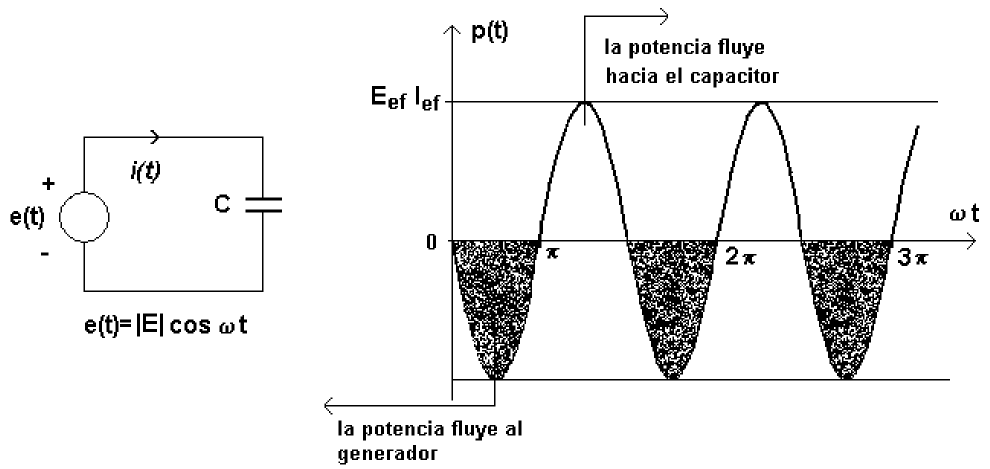

Figura 5.13: Potencia en una capacidad

Podemos expresar conceptos similares a los de la inductancia. (Ver figura 5.13). En el primer semiciclo, la potencia fluye de la capacidad a la fuente y en el segundo semiciclo, la capacidad recibe potencia de la fuente. Recordemos que este sistema ya está en equilibrio y durante el transitorio, la capacidad se cargó inicialmente. El signo menos de la expresión (5.36) comparada con (5.30) justamente expresa que estos sentidos de potencias están desfasadas 180° entre sí. Mientras que una se carga, la otra se descarga. Definimos nuevamente una *potencia reactiva o potencia pico* para la capacidad como:

$$Q = -E_{ef} I_{ef} = \frac{I_{ef}^2}{\omega C} = E_{ef}^2 \omega C \tag{5.37}$$

Igual que en (5.32) y (5.33) calculamos la energía instantánea w_C almacenada en la capacidad y la energía promedio W_C:

$$\begin{aligned} w_C &= \frac{Ce^2}{2} = \frac{C|E|^2}{2} cos^2\,\omega t = \frac{CE_{ef}^2}{2}(1+cos\,2\omega t) \\ W_C &= \frac{CE_{ef}^2}{2} \end{aligned} \tag{5.38}$$

La relación de la energía promedio con la potencia reactiva es (compare (5.37) con (5.38):

$$Q = -2\omega\, W_C \tag{5.39}$$

2.2.4. Potencia en una impedancia *Z*

Una vez analizados en forma individual las variaciones de potencia en cada elemento, estudiemos el balance de potencia y energía en una impedancia cualquiera Z.

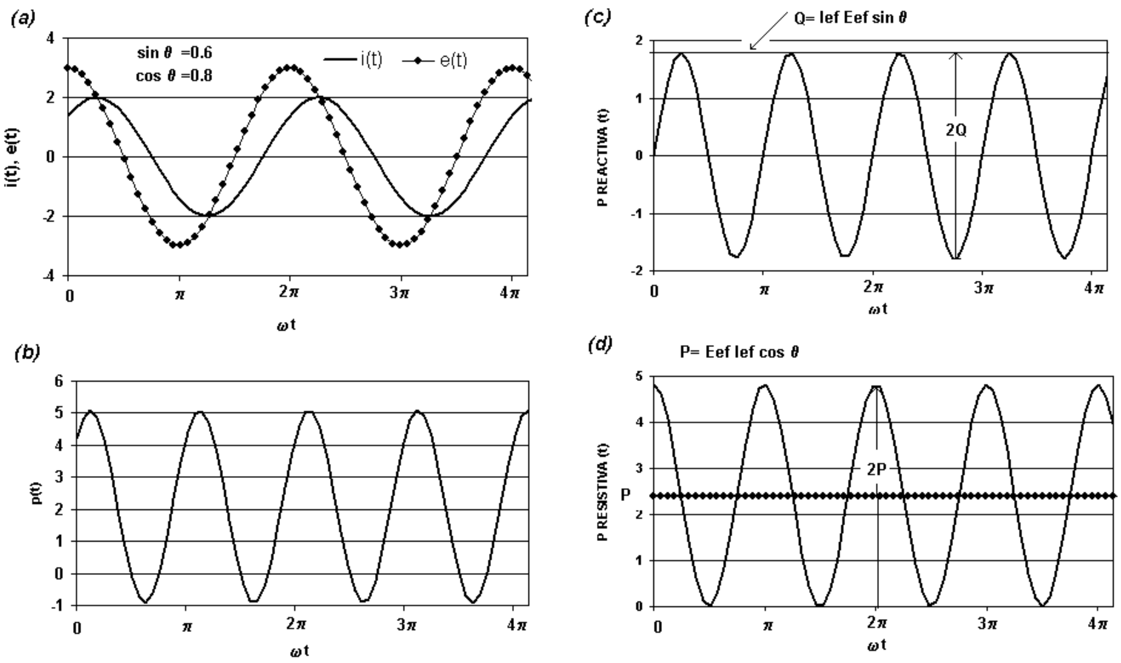

Figura 5.14: Potencia en una impedancia de carga Z. (a) Gráficos de la tensión y corriente; (b) potencia instantánea en la carga; (c) potencia reactiva; (d) potencia resistiva.

Por lo visto en el capítulo anterior, si excitamos una carga Z, con una tensión senoidal, la corriente en general tendrá un desfasaje θ respecto de la tensión. (ver figura 5.14 a).

$$e(t) = |E|\,cos\,\omega t$$

$$i(t) = |I|\,cos(\omega t - \theta)$$

La potencia instantánea será (figura 5.14 (b)):

$$
\begin{aligned}
p = e \times i &= |E||I| \cos \omega t \cos(\omega t - \theta) \\
&= \frac{|E||I|}{2} \cos\theta + \frac{|E||I|}{2} \cos(2\omega t - \theta) \\
&= \underbrace{E_{ef} I_{ef} \cos\theta + E_{ef} I_{ef} \cos\theta \cos 2\omega t}_{\text{potencia real}} + \underbrace{E_{ef} I_{ef} \sin\theta \sin 2\omega t}_{\text{potencia reactiva}}
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Los primeros dos términos constituyen una potencia real consumida en la resistencia de la carga. El tercer término es la potencia reactiva que fluye de la carga a la fuente y viceversa y cuyo valor promedio es cero. Estos términos se aprecian en la figura (5.14) (c y d).
De (5.40) definimos que:

$$
\begin{aligned}
P &= E_{ef} I_{ef} \cos\theta \\
Q &= E_{ef} I_{ef} \sin\theta
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

P es la potencia activa promedio consumida por el circuito, y Q es la potencia pico reactiva, que fluye de la carga a la fuente y viceversa. Al factor $\cos\,\theta$ se lo denomina ***factor de potencia*** y representa la parte real de la impedancia, y a $\sin\theta$ se lo llama ***factor reactivo***. Una de las grandes ventajas en usar los valores P y Q, es que pueden sumarse en cualquier punto del circuito. Es decir, la potencia promedio total consumida en un circuito es la suma de las potencias en cada rama del circuito. Es decir se cumple que

$$
\begin{aligned}
P_{total} &= \sum P_{ramas} \\
Q_{total} &= \sum Q_{ramas}
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

2.3 Potencia activa y reactiva en el dominio de la frecuencia

2.3.1 Representación fasorial de la potencia activa y reactiva

Ya definimos la conveniencia para el cálculo de la tensión y la corriente en el dominio de la frecuencia del uso de fasores. Sin embargo los vectores sólo se definen para variables lineales, y a priori no es posible definir el uso de éstos en el cálculo de la potencia. Sin embargo, sorprendentemente, se mostrará que haciendo algunos "pequeños cambios", es posible usar la nomenclatura y operatoria fasorial para el cálculo de la potencia en corriente alterna. En la ecuación (5.41) henos definido la potencia real activa P y la potencia imaginaria pico reactiva Q:

$$
\begin{aligned}
P &= E_{ef} I_{ef} \cos\theta \\
Q &= E_{ef} I_{ef} \sin\theta
\end{aligned}
$$

Siendo *Ief* y *Eef* las corriente y tensiones eficaces aplicadas a una carga *Z*, siendo θ el ángulo que forman los fasores corriente y tensión entre sí (Figura 5.15).
Así como definíamos los fasores corriente y tensión, se puede definir los fasores *Ief* y *Eef*, siendos éstos proporcionales a los anteriores por $\sqrt{2}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{ef} &= |E_{ef}| \angle \phi_1 \\
\vec{I}_{ef} &= |I_{ef}| \angle \phi_2
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

Siendo ϕ_1 la fase inicial de la tensión y ϕ_2 la fase inicial de la corriente. Si definimos la conjugada del vector *Ief* como $I^{*}ef$:

$$
\vec{I}^{*}_{ef} = |I_{ef}| \angle(-\phi_2) \tag{5.44}
$$

Si multiplicamos el vector tensión eficaz por la conjugada de la corriente eficaz se tiene:

$$\vec{E}_{ef} \times \vec{I}_{ef}^{\,*} = \left|E_{ef}\right|\left|I_{ef}\right|\angle(\phi_1 - \phi_2) = \left|E_{ef}\right|\left|I_{ef}\right|\angle\theta \tag{5.45}$$

Siendo θ el mismo ángulo que forman los fasores corriente y tensión entre sí de la Figura 5.15. Si hubiésemos multiplicado directamente las corriente y tensión eficaz, la fase resultante sería la suma de ($\phi_1 + \phi_2$).

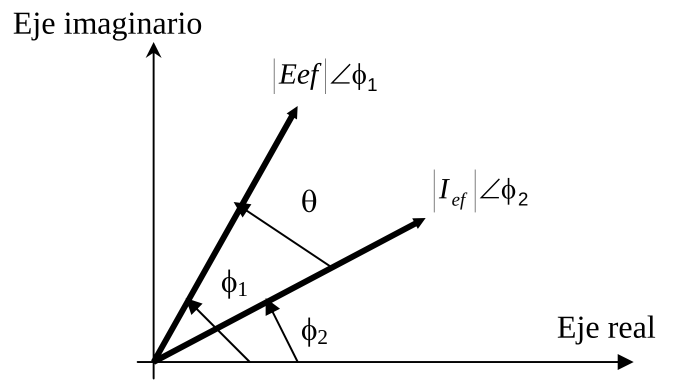

Figura 5.15 Fasores tensión y corriente eficaz

La ecuación 5.45 puede expresarse en notación compleja como:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ef} \times \vec{I}_{ef}^{\,*} &= \left|E_{ef}\right|\left|I_{ef}\right|\angle\theta = \left|E_{ef}\right|\left|I_{ef}\right| \cos\theta + j\left|E_{ef}\right|\left|I_{ef}\right| \sin\theta \\ &= P + jQ \end{aligned} \tag{5.46}$$

Por lo tanto se demuestra que se puede definir un fasor potencia aparente *S* cuyas parte real es *P* la potencia pormedio activa, y cuya parte imaginaria es la potencia pico reactiva *Q*:

$$S = P + jQ = \vec{E}_{ef} \times \vec{I}_{ef}^{\,*} \tag{5.47}$$

Es decir, multiplicando el vector tensión eficaz por el conjugado de la corriente eficaz, obtenemos un vector potencia aparente *S* cuyas partes reales e imaginarias son las potencia activa *P* y rectiva *Q*. Si retomamos la ecuación (5.40) de la potencia instantánea en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned} p = e \times i &= E_{ef} I_{ef} \cos\theta + E_{ef} I_{ef} \cos\theta \cos 2\omega t + E_{ef} I_{ef} \sin\theta \sin 2\omega t \\ &= |P|(1 + \cos 2\omega t) + |Q| \sin 2\omega t \end{aligned} \tag{5.48}$$

encontramos la forma de obtener la potencia instantánea en el dominio del tiempo. Esto es , podemos volver al dominio del tiempo aplicando la ecuación (5.48).

Con estos vectores de potencia podemos formar un triángulo rectángulo, siendo el ángulo entre la potencia aparente y la activa, el mismo ángulo θ formado entre los vectores corriente y tensión (ver figura 5.16).

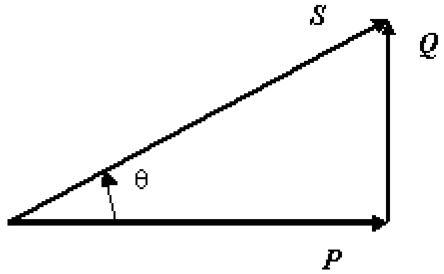

Figura 5.16 Triángulo de potencia

Las potencia aparente *S* se mide en VA (volt-ampere), la potencia aparente en VAR (volt-ampere reactivos) y la potencia activa *P* en watts. Si multiplicamos *S* por el *cos* θ obtenemos la potencia activa *P*, es por ello que a *cos* θ, se lo denomina factor de potencia (ver 5.41). Este triángulo tambien nos permite entender el problema de la distribución de energía eléctrica. Para que pueda aprovecharse la potencia activa P en una carga (por ejemplo, iluminación domiciliaria, motores industriales, etc), el generador debe entregar una potencia *S*. La potencia *Q* reactiva es la que se entretiene en la líneas de distribución eléctrica, transformadores de reducción y distribución y elementos reactivos de la propia carga. En general la política tarifaria, establece que el usuario paga sólo la potencia activa, pero el generador debe proveer la potencia aparente *S*. Es por ello que al generador le interesa que el factor de potencia *cos* θ sea lo más cercano a uno posible. Se establece que si una carga es muy inductiva *cos* θ < 0.8 el usuario debe compensar esta carga. Para ello se agregan capacitores con el fin de reducir la potencia reactiva *Q*. Por otro lado el proveedor de energía eléctrica compensa la parte reactiva inductiva de las líneas con grandes capacitores en las estaciones transformadoras. En breve veremos esto con más detalles.

2.3.2 Cálculo de la potencia a partir de la carga Z

Un cálculo típico de potencia, consiste en determinar la potencia en una carga conociendo la impedancia *Z*. En general una impendancia de carga representa la impendacia equivalente del circuito y está formada por una parte real R y una parte reactiva X:

$$\vec{Z} = R + jX \tag{5.49}$$

Este vector impedancia Z puede representarse también por un triángulo como se muestra en la figura 5.17, similar al de potencia de la figura 5.16:

Recordemos que el ángulo θ, se puede calcular como:

$$\theta = tg^{-1}\frac{X}{R}; \quad \text{y} \quad cos\,\theta = \frac{R}{Z}$$

Si multiplicamos la ecuación (5.49) por el vector corriente *I* tendremos:

$$\begin{aligned}\vec{I} \times \vec{Z} &= \vec{I}R + j\vec{I}X \\ \vec{E} &= \vec{E}_R + j\vec{E}_X\end{aligned} \tag{5.50}$$

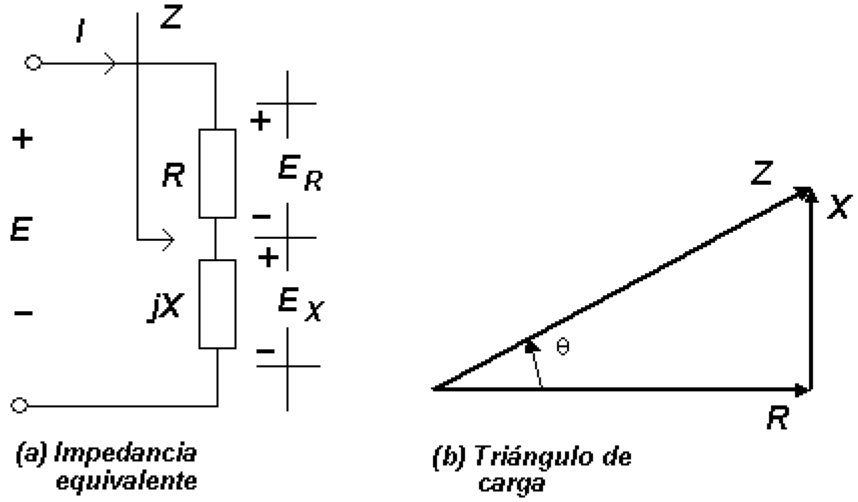

Figura 5.17: Impedancia de carga

Obteniendo el vector tensión, que también puede representarse por un triángulo (figura 5.18).También podemos multiplicar a (5.49) por la corriente eficaz al cuadrado y tendremos:

$$
\begin{aligned}
\left|I_{ef}\right|^2 Z &= \left|I_{ef}\right|^2 R + j\left|I_{ef}\right|^2 X \\
&= \left|I_{ef}\right|^2 |Z| \cos\theta + j\left|I_{ef}\right|^2 |Z| \sin\theta \\
&= \left|I_{ef}\right|\left|E_{ef}\right| \cos\theta + j\left|I_{ef}\right|\left|E_{ef}\right| \sin\theta \\
S &= P + jQ
\end{aligned} \tag{5.51}
$$

Es decir, a través del triángulo de la carga, se puede obtnere el triángulo de potencia de la figura 5.16. Estas equivalencias se muestran esquemáticamente en la figura 5.18.

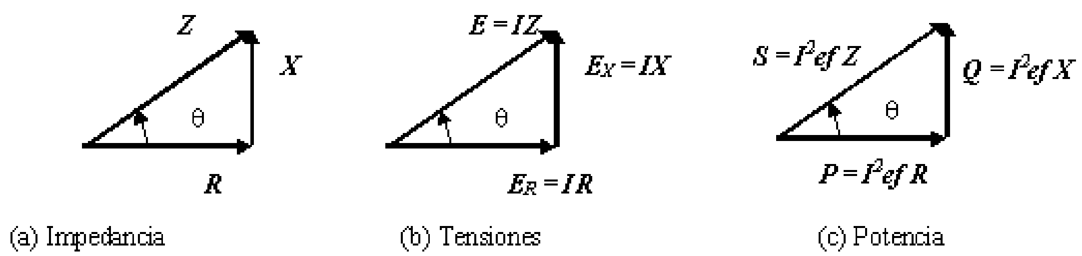

Figura 5.18: Triángulos de impedancia, tensión y potencia en una carga

En el siguiente ejemplo calculemos el balance de potencia a partir del circuito equivalente de la figura 5.19; si el cos θ es < a 0.8 compensar con un capacitor, de manera de llevar el factor de potencia a 0.95.

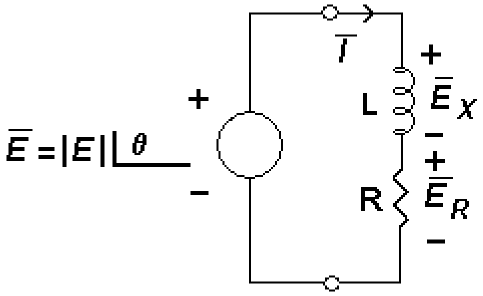

Figura 5.19 . Cálculo de la potencia en una carga

Supongamos que R= 8 Ω, L= 0.15 Hy y E = 100 cos 50 t V.

Solución.

1°) Calculamos la impedancia en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} Z &= R + jX = R + j\omega L \\ &= 8 + j(50 \times 0.15) = 8 + j7.5 \end{aligned}$$

ponemos la impedancia en función de módulo y fase:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{64 + 56.25} = 10.96$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{X}{R} = tg^{-1}\frac{7.5}{8} = 43.15°$$

$$cos\,\theta = cos(43.15°) = 0.73$$

2°) Calculamos el fasor tensión eficaz y corriente eficaz del circuito serie:

$$\vec{E}_{ef} = \frac{|E|}{\sqrt{2}} = \frac{100}{1.4142} = 70.71 \quad \text{V}$$

$$\vec{I}_{ef} = \frac{|E_{ef}|\angle\phi}{\vec{Z}} = \frac{70.71\angle 0°}{8 + j7.5} = \frac{70.71\angle 0°}{10.96\angle 43.15°} = 6.45\angle(-43.15°)$$

3°) Calculamos el vector de potencia :

$$S = E_{ef}\, I_{ef}^{*} = (70.71\angle 0°)(6.45\angle 43.15) = 456.20\angle 43.15$$

$$S = P + jQ = |I_{ef}|^2 (R + jX) = |I_{ef}|^2 R + j|I_{ef}|^2 X$$

$$= 6.45^2 \times 8 + j\, 6.45^2 \times 7.5 = 332.82 + j\, 312.01$$

entonces la potencia aparente S = 456.20 VA, la potencia activa P = 332.82 W, y la potencia reactiva Q = 312.01 VAR. El factor de potencia es 0.73 < 0.8; por lo tanto se debe compensar.

Para compensar colocamos un capacitor C en paralelo con la carga, de acuerdo al siguiente circuito:

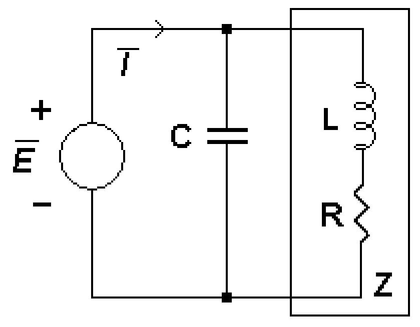

Figura 5.20. Compensación con un capacitor en paralelo a la carga

El problema, entonces consiste en encontrar el valor de C, tal que el factor de potencia sea igual a 0.95.

Solución:

1°) Debemos calcular la impedancia del paralelo *Zp* o a través de la admitancia del paralelo *Yp* entre la carga *Z* y el capacitor *C*. La admitancia Y de la carga será la inversa de Z:

$$
\begin{aligned}
Y = \frac{1}{Z} &= G + jB = \frac{1}{R + jX} \\
&= \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} \\
&= \frac{8}{8^2 + 7.5^2} - j\frac{7.5}{8^2 + 7.5^2} \\
&= \frac{8}{120.25} - j\frac{7.5}{120.25} = 0.0665 - j0.06237
\end{aligned}
$$

Esta admitancia forma un triángulo similar al de Z pero con el signo de la parte imaginaria negativo. Sin embargo el factor de potencia es el mismo (cos θ= cos(-θ)) si el triángulo se dibuja a partir de la Z o de la Y (ver figura 5.21):

El problema de la compensación se ve claramente en la figura 5.21 (c). Este consiste en reducir la parte imaginaria *B* a *Bp* de tal forma que el cos θp = 0.95, sea el valor solicitado. El ángulo necesario para el nuevo factor de potencia es el arco coseno del mismo:

$$\theta p = cos^{-1}(0.95) = 18.19°$$

De esta figura se puede demostrar las siguientes relaciones:

$$tg(\theta p) = \frac{G}{Bp};$$

$$Bp = G \times tg(\theta p) = 0.0665 \times tg(18.19°) = 0.0218$$

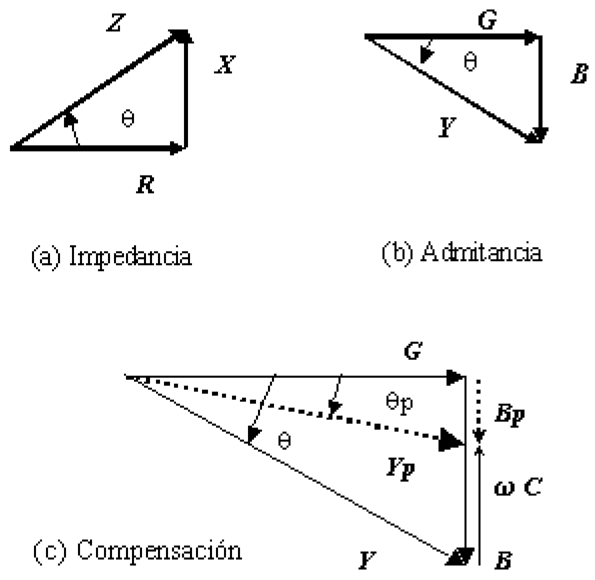

Figura 5.21: Compensación del factor de potencia en una carga

La admitancia paralelo será:

$$\begin{aligned} Y_p &= Y + j\omega C = G - jB + j\omega C \\ &= G - j(B - \omega C) = G - jB_p \end{aligned}$$

Las susceptancias *B* y *Bp* son generalmente inductivas, por lo tanto su signo es negativo e indican que los vectores son hacia abajo, en cambio ωC es hacia arriba. (ver figura 5.21 (b)). De aquí se puede calcular:

$$\begin{aligned} B_p &= B - \omega C \\ \omega C &= B - B_p \\ C &= \frac{B - B_p}{\omega} = \frac{0.06237 - 0.0218}{50} = 811.4\ \mu\text{F} \end{aligned}$$

Finalmente se obtuvo el capacitor necesario para llevar el factor de potencia de su valor original de 0.73 al valor de 0.95 exigido.

2.4 Máxima transferencia de energía

Se desea investigar en que caso se transmite la máxima energía entre un generador y su carga. Primero supondremos un generador real de tensión conectado a una resistencia de carga R_C, y luego veremos el caso de conectarse a una impedancia de carga.

2.4.1. Máxima transferencia en c.c.

La figura 5.22 muestra la disposición circuital. En ésta se ha conectado un generador de tensión continua *Eg* con una resistencia interna *Rg* y una carga variable *Rc*.

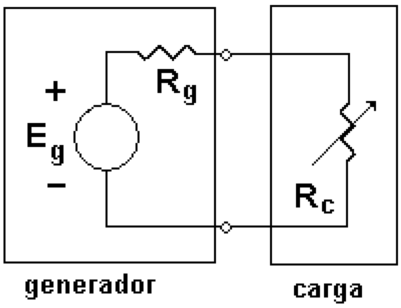

Figura 5.22 Máxima transferencia de energía

La potencia entregada a la carga será:

$$p_{RC} = i^2 R_C = \frac{E_G^2}{(R_G + R_C)^2} \times R_C \qquad (5.52)$$

Se desea encontrar para qué valor de la R_C se obtiene el máximo valor de la potencia P_{RC}. Para ello debemos derivar la potencia en la carga respecto de la carga e igualar a cero:

$$\frac{dp_{RC}}{R_C} = E_G^2 \frac{(R_G + R_C)^2 - 2R_C(R_G + R_C)}{(R_G + R_C)^4} = 0 \qquad (5.53)$$

Buscamos en que condición el numerador se hace cero:

$$\begin{aligned}
(R_G + R_C)^2 - 2R_C(R_G + R_C) &= 0 \\
(R_G + R_C)^2 &= 2R_C(R_G + R_C) \\
R_G^2 + 2R_G^2 R_C + R_C^2 &= 2R_G^2 R_C + 2R_C^2 \\
R_G^2 &= R_C^2 \\
R_G &= R_C
\end{aligned} \qquad (5.53)$$

La condición de máxima se cumple cuando la resistencia de la carga es igual a la resistencia del generador. En ese caso, la potencia máxima disponible será cuando R_C=R_G:

$$\begin{aligned}
p_{MAX} &= \frac{E_G^2}{(R_G + R_C)^2} R_C \\
&= \frac{E_G^2}{4R_G}
\end{aligned} \qquad (5.54)$$

2.4.2. Máxima transferencia de potencia en c. a.

Estudiemos ahora el caso de un generador real con excitación senoidal y una carga con una impedancia *Z*. En general la impedancia que ve la carga hacia el generador será una impedancia de tipo inductiva, que representa los generadores y la línea de transmisión. A su vez las cargas también son generalmente inductivas. La figura 5.23 representa la configuración típica.

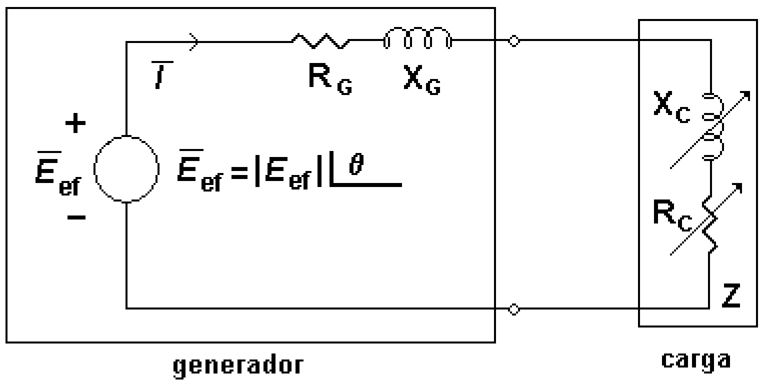

Figura 5.23: Máxima transferencia en c.a.

Las impedancias del generador y la carga serán:

$$\begin{aligned} Z_G &= R_G + jX_G \\ Z_C &= R_C + jX_C \end{aligned} \tag{5.55}$$

Suponemos que el generador está alimentando la carga con una excitación senoidal:

$$\vec{E}_{ef} = \left|E_{ef}\right| \angle \theta$$

La corriente eficaz del circuito será:

$$\vec{I}_{ef} = \frac{\vec{E}_{ef}}{(R_C + jX_C) + (R_G + jX_G)} = \frac{\vec{E}_{ef}}{(R_C + R_G) + j(X_C + X_G)} \tag{5.56}$$

La potencia en la carga será:

$$P_C = \left|I_{ef}\right|^2 R_C = \frac{E_{ef}^2 R_C}{(R_C + R_G)^2 + (X_C + X_G)^2} \tag{5.57}$$

Al igual que en el caso de c.c., para averiguar la máxima transferencia de energía, debemos derivar la potencia respecto de la carga; primero respecto de X_C e igualar a cero:

$$\frac{dP_C}{dX_C} = E_{ef}^2 R_C \left[\frac{-2(X_G + X_C)}{(R_G + R_C)^2 + (X_G + X_C)^2} \right] = 0 \tag{5.56}$$

la condición para que (5.56) sea cero es que el numerador sea cero, descontando el caso que le generador sea cero, entonces:

$$X_C = -X_G \tag{5.57}$$

Esto significa que la carga deberá ser igual y opuesta a la reactancia del generador, o sea deberá ser capacitiva. En este caso, estamos en resonancia. Por lo tanto la potencia en la carga se reduce a:

$$P_C = \frac{E_{ef}^2 R_C}{\left(R_G + R_C\right)} \tag{5.58}$$

Con lo cual volvemos al caso de corriente continua (5.52) y (5.54). Entonces para que se de la máxima transferencia de energía, también debe cumplirse que la resistencia en la carga sea igual a la resistencia interna del generador. Por lo tanto en corriente alterna se debe cumplir dos condiciones:

$$\begin{cases} R_C = R_G \\ X_C = -X_G \end{cases} \tag{5.59}$$