

# UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

## FACULTAD REGIONAL MENDOZA

### APUNTES DE LA CÁTEDRA DE TEORÍA DE LOS CIRCUITOS I

*Prof. Dr. Ing. S. Enrique Puliafito*

E-mail [epuliafito@frm.utn.edu.ar](mailto:epuliafito@frm.utn.edu.ar)

---

## CAPITULO 6: RESPUESTA A EXCITACIONES ARBITRARIAS

---

### OBJETIVOS GENERALES DE LA ASIGNATURA

1. Proveer los fundamentos de los circuitos lineales e interpretar a éstos en el marco de un sistema lineal comprendiendo y aplicando sus principales propiedades
2. Mostrar cómo el análisis y diseño de circuitos eléctricos están íntimamente relacionados con la capacidad del futuro ingeniero para diseñar complejos sistemas electrónicos de comunicaciones, computación y control.
3. Que el alumno aprenda a resolver circuitos lineales simples.
4. Que el alumno adquiera las habilidades para modelar y resolver sistemas lineales tanto desde el dominio del tiempo como de la frecuencia, y que sea capaz de predecir su comportamiento ante una excitación cualquiera.

### OBJETIVOS DEL CAPÍTULO VI:

- Predecir el comportamiento de los sistemas lineales simples ante una excitación cualquiera tanto desde el dominio del tiempo como de la frecuencia
- Comprender las relaciones que existen entre el teorema de la convolución y la integral de Fourier
- Que el alumno pueda resolver operativamente un circuito lineal simple usando la transformación de Laplace y obtener su respuesta en el dominio del tiempo para cualquier excitación.

#### **TEMA A: Respuesta en el dominio del tiempo a excitaciones arbitrarias:**

6.A.1. Representación de una señal por trenes de impulsos. 6.A.2. Integral de convolución, propiedades de la convolución en el tiempo.

**TEMA B: Respuesta en frecuencia:** 6.B.1. Representación de excitaciones periódicas por serie de Fourier. 6.B.2. Respuesta a excitaciones periódicas: espectro discreto de frecuencia, limitaciones del método de Fourier. 6.B.3. Representación de funciones de excitación no periódicas por integral de Fourier, espectro continuo de Fourier, propiedades de la transformada de Fourier, ejemplos. 6.B.4. Respuesta de sistemas a señales no periódicas, limitación de la transformada de Fourier. 6.B.5. Introducción al análisis en frecuencia compleja, transformada de Laplace. 6.B.6. Propiedades, antitransformación por fracciones

simples. 6.B.7. Método operativo para resolver problemas transitorios. Combinación de estado permanente y transitorio. 6.B.8. Equivalencia de los métodos de convolución, Fourier y Laplace.

## **TIEMPO ESTIMADO DE CURSADO: 3 SEMANAS**

### **TABLA DE CONTENIDO:**

<b>CAPÍTULO VI: RESPUESTA A EXCITACIONES ARBITRARIAS.....</b>	<b>3</b>
<b>1. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES .....</b>	<b>3</b>
<b>2. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.....</b>	<b>3</b>
2.1 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE UN SISTEMA O FUNCIÓN IMPULSIVA .....	4
2.2 LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN.....	4
<b>3. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA... 7</b>	
3.1 SERIE DE FOURIER .....	7
3.2 SERIE EXPONENCIAL COMPLEJA DE FOURIER:.....	10
3.3 INTEGRAL DE FOURIER .....	11
3.3.1 Descripción.....	11
3.3.2 Teoremas y propiedades de la transformada de Fourier. ....	13
3.3.3 Análisis de sistemas usando transformada de Fourier.....	14
3.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	16
3.4.1 Descripción.....	16
3.4.2 Teoremas y propiedades de la Transformada de Laplace.....	18
3.4.3. Resolución de ecuaciones diferenciales usando la Transformada de Laplace .....	19
3.4.4 Antitransformada por fracciones simples.....	20
3.5 RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS POR TRANSFORMADA DE LAPLACE .....	22
3.6 DIAGRAMA EN BLOQUES Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA .....	28
3.7 POLOS Y CEROS DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA .....	30
3.7.1 Gráficos logarítmicos de magnitud y fase .....	31

### **BIBLIOGRAFÍA:**

- R. Scott: “Linear Circuits”, Addison-Wesley Publishing Co., 1960
- Dorf y Svoboda, “Circuitos Eléctricos. Introducción al Análisis y Diseños”, Alfaomega, 2000
- Cunnigham and Stuller: “Basic Circuit Analysis”, 1995
- R. Ziemer, W. Tranter, R. Fannin: “Signal and Systems. Continuous and discrete”, Macmillian Publishing , New York, 1983.
- 3. M. Van Walkenberg: “Análisis de Redes”, Limusa., 1994
- H. Pueyo y C. Marco: “Análisis de modelos circuitales”, Tomos I y II. Arbó, 1985
- W. Hyat and J. Kemmerly: “Análisis de Circuitos en Ingeniería”, Mc Graw Hill., 1985

## CAPÍTULO VI: RESPUESTA A EXCITACIONES ARBITRARIAS

### 1. Análisis de sistemas lineales

El problema del análisis de sistemas es responder a la siguiente pregunta: conocido un sistema y una entrada ¿cuál es su salida? Conocer un sistema significa determinar la respuesta natural del sistema a través de su respuesta impulsiva  $h(t)$ , a través de sus ecuaciones diferenciales, o conociendo su función de transferencia en el dominio de la frecuencia. Si además se conoce la entrada  $x(t)$ , entonces para predecir su salida existen tres opciones de análisis:

1. Obtener la solución a las ecuaciones diferenciales, según los métodos matemáticos normales,
2. Resolver la integral de superposición en el dominio del tiempo, usando la función impulsiva  $h(t)$ ,
3. Resolver las ecuaciones diferenciales en el dominio de la frecuencia, usando transformación de Fourier o Laplace.

El primer método, se supone conocido a través del análisis matemático. En cuanto a los dos métodos restantes, veremos primero la solución de este problema en el dominio del tiempo, y en el tercer método veremos la solución en el dominio de la frecuencia. Entonces a continuación desarrollaremos el método de la *integral de superposición o integral de convolución*.

### 2. Análisis de sistemas lineales en el dominio del tiempo

En el capítulo 3 analizamos la respuesta natural de circuitos de primer y segundo orden para diversas excitaciones típicas. En este punto veremos como obtener la respuesta natural de cualquier circuito, y dada una entrada arbitraria predecir el comportamiento futuro del circuito.

Como lo indicamos en la introducción del capítulo 1, los circuitos lineales, visto en los capítulos precedentes, se consideran sistemas lineales, y que la solución que se desarrolla a continuación es válida no solo para los circuitos sino para todo sistema lineal.

Si se conoce la entrada de un sistema  $x(t)$  y se conoce su función impulsiva  $h(t)$ , (también llamada función característica o respuesta natural), entonces **la integral de superposición o integral de convolución**, relaciona la entrada con la salida (ver 3.6) como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau; \quad -\infty < t < \infty \quad (6.1)$$

por lo tanto esta integral permite calcular la salida para todo tiempo  $t$  siempre que se conozcan su respuesta natural y su entrada. En forma simbólica se escribe como:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (6.2)$$

que demuestran el carácter conmutativo de esta operación.

## 2.1 Función característica de un sistema o función impulsiva

Antes de demostrar este teorema, conviene volver sobre la obtención de la *función característica o impulsiva*  $h(t)$  para un circuito o sistema lineal. Recordemos que esta respuesta se obtiene excitando la entrada del sistema con un impulso  $u_0(t)$ . La respuesta a este impulso  $y(t)=h(t)$ , es la función impulsiva.

Para obtener la  $h(t)$  existen dos posibilidades.

- A) Si el sistema no se conoce, sino sólo como una caja negra, pero puede ensayarse, entonces se aplica un impulso a la entrada ( $x(t)=u_0(t)$ ), y *se mide* la salida  $y(t)=h(t)$ .
- B) Si el sistema se conoce a través de sus ecuaciones diferenciales, entonces se puede *calcular* la  $h(t)$ , aplicando un impulso a la entrada.

En el capítulo 3, punto 2.2 vimos un ejemplo del caso B), es decir, la excitación de un circuito de primer orden mediante una función impulso. Allí escribíamos que la ecuación diferencial de primer orden queda representada por (3.12):

$$u_0(t) = L \frac{di}{dt} + Ri \quad \text{para todo } t \quad (6.3)$$

siendo su solución (3.13)

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad (6.4)$$

donde  $\tau=L/R$ , e  $I_0=I/L$ .

Si consideramos al impulso de tensión  $u_0(t)$  como la entrada  $x(t)$  y la corriente la salida  $y(t)$  del circuito  $y(t)=i(t)$ ; entonces la respuesta impulsiva es la corriente  $i(t)$ , entonces podemos describir (6.4) como:

$$i(t) = h(t) = \frac{1}{L} e^{-t/\tau} \quad (6.5)$$

Por lo tanto hemos obtenido la respuesta impulsiva a partir del conocimiento de la ecuación diferencial del circuito.

## 2.2 La integral de convolución

Una vez ordenado el concepto de función impulsiva, pasemos a la demostración de la integral de convolución.

Se desea obtener la respuesta de un sistema lineal con función impulsiva  $h(t)$  a una función de entrada arbitraria  $x(t)$ , continua en el intervalo  $T_1 \leq t \leq T_2$  y fuera de ese intervalo. La función  $x(t)$  puede aproximarse a una suma de pulsos con intervalo de tiempo constante  $\Delta$ .

$$\hat{x}(t) = \Delta \times x_1(0) \times u_0(t) + \Delta \times x_1(\Delta) \times u_0(t - \Delta) + \Delta \times x_1(2\Delta) \times u_0(t - 2\Delta) + \dots$$

El área de cada pulso se asigna a un impulso  $u_0$  de energía igual al producto  $x(t)\Delta$ . En el límite, cuando  $\Delta \rightarrow 0$ , el pulso tiende al impulso.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \Delta \times x(n\Delta) \times u_0(t - n\Delta) \quad (6.6)$$

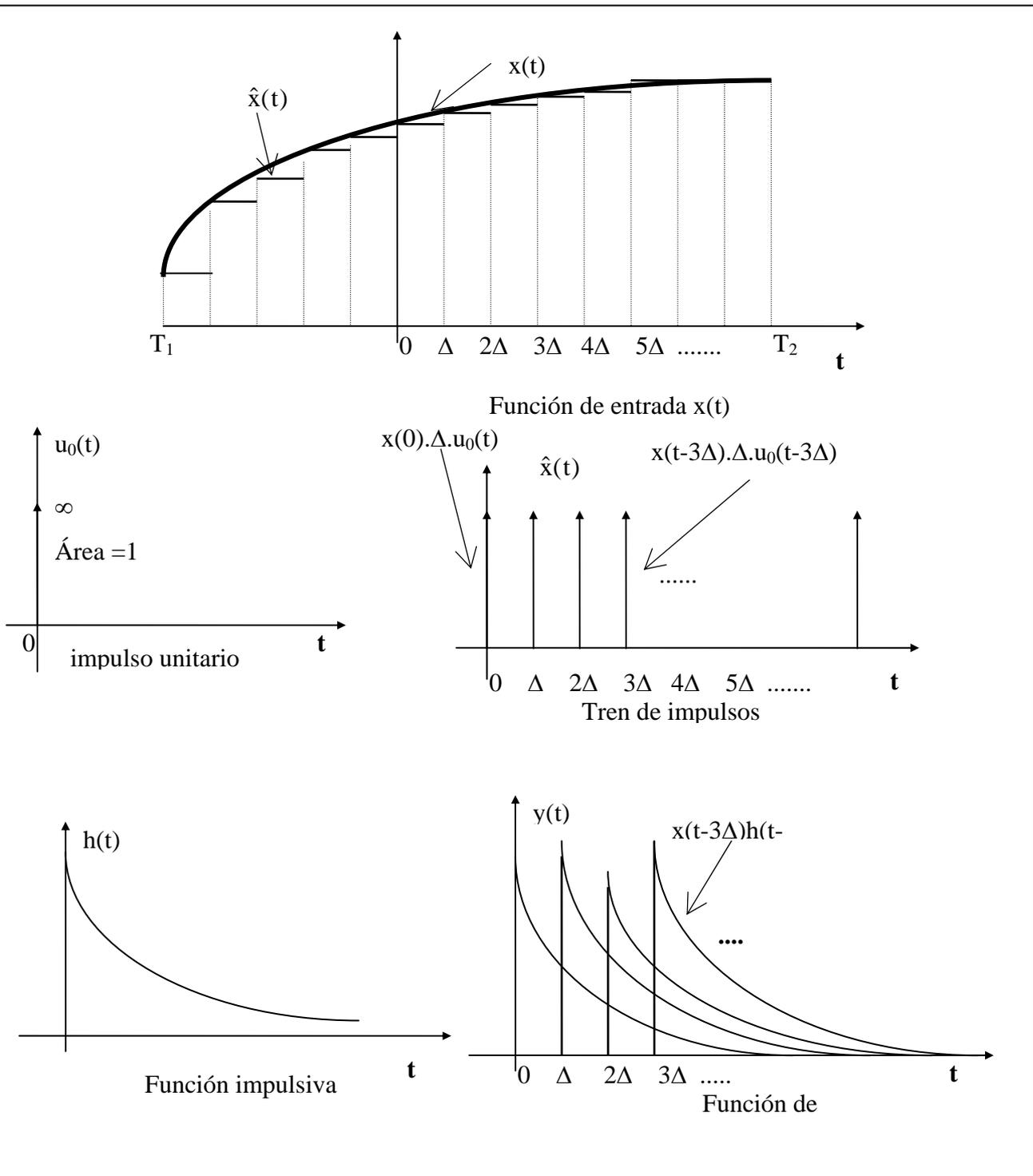


Figura 6.1: Representación de la convolución

Cada entrada impulsiva, genera por respuesta en el sistema su propia función impulsiva  $h(t)$ , por lo tanto la salida será la suma de cada  $h(t)$ , desplazada en el tiempo, a medida que aparece el tren de impulsos de la entrada:

$$\hat{y}(t) = \Delta \times x_1(0) \times h(t) + \Delta \times x_1(\Delta) \times h(t - \Delta) + \Delta \times x_1(2\Delta) \times h(t - 2\Delta) + \dots$$

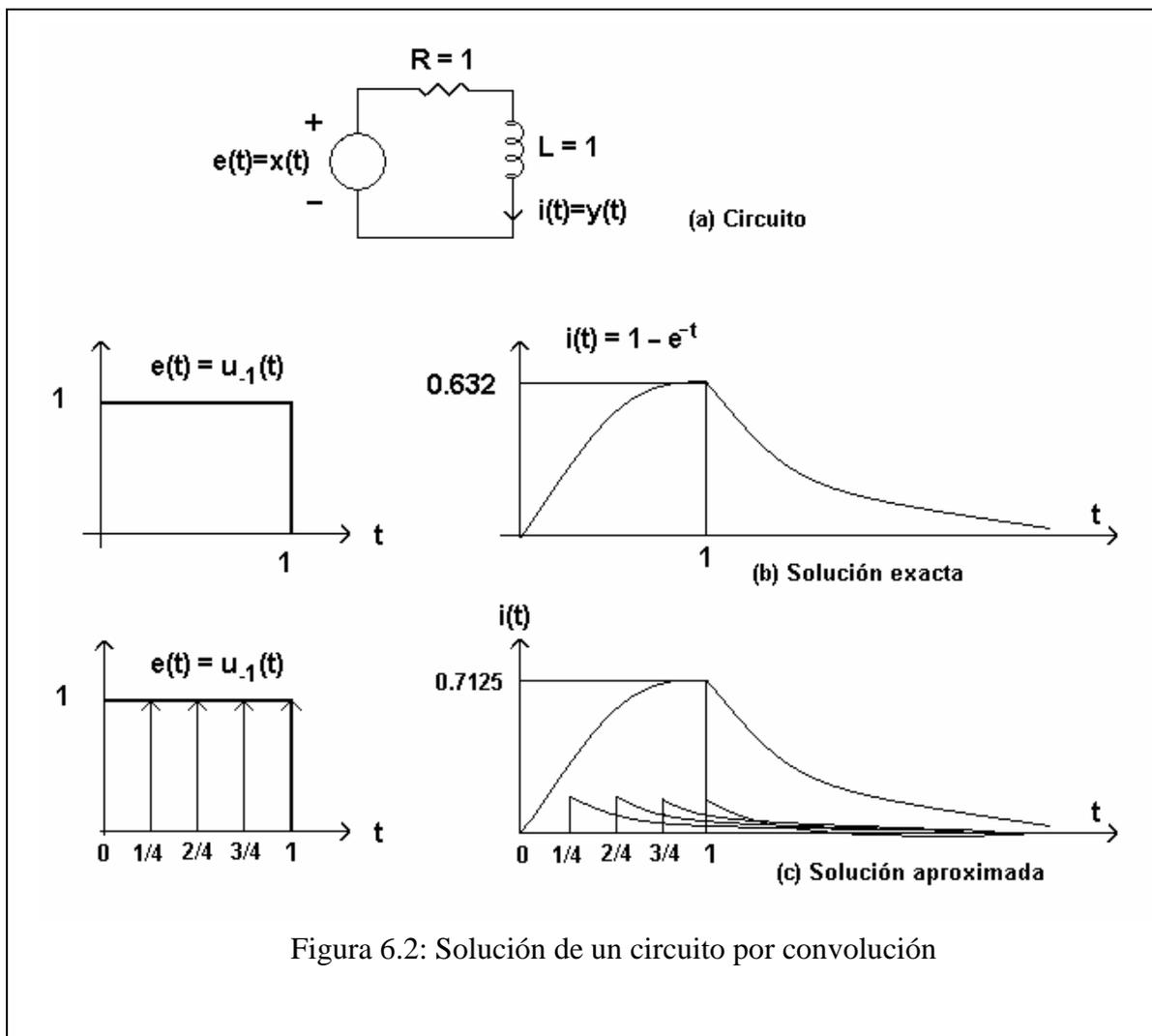
$$\hat{y}(t) = \sum_{n=N1}^{N2} \Delta \times x(n\Delta) \times h(t - n\Delta) \tag{6.7}$$

En el límite, cuando  $\Delta \rightarrow 0$ , entonces la variable discreta  $n\Delta$  se convierte en la variable continua  $\tau$  y el incremento  $\Delta$  en el diferencial  $d\tau$ .

Extendiendo también el intervalo  $(T_1, T_2) \rightarrow (-\infty, \infty)$ , la ecuación anterior se convierte en:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \tag{6.8}$$

En la figura 6.1, se demuestra gráficamente, el desarrollo de este proceso. Esta integral puede resolverse analíticamente, o en forma numérica aplicando (6.7). Resolvamos el ejemplo de la figura 6.2, en forma numérica aproximada y en forma analítica.



Supongamos que la excitación de entrada es un pulso de tensión de amplitud 1 entre  $t = 0$  y

$t=1$ . La respuesta  $h(t)$  del circuito de la figura es la ecuación (6.5); si  $L=1$ , y  $R=1$ , entonces  $h(t)$  es:

$$h(t) = e^{-t}$$

Si se divide el pulso en 4 impulsos, como en figura (6.2 b), cada impulso tendrá contendrá  $\frac{1}{4}$  del área; por lo tanto:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \Delta \times x_1(0) \times h(t) + \Delta \times x_1(\Delta) \times h(t - \Delta) + \Delta \times x_1(2\Delta) \times h(t - 2\Delta) + \dots = \\ &= \frac{1}{4} \times e^{-(t-1/4)} + \frac{1}{4} \times e^{-(t-2/4)} + \frac{1}{4} \times e^{-(t-3/4)} + \frac{1}{4} \times e^{-(t-1)} \\ &= \frac{1}{4} (e^{-(t-1/4)} + e^{-(t-2/4)} + e^{-(t-3/4)} + e^{-(t-1)})\end{aligned}\quad (6.9)$$

Si resolvemos para  $t=1$  queda:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \frac{1}{4} (e^{-3/4} + e^{-2/4} + e^{-1/4} + e^0) = \\ &= \frac{1}{4} (0.47 + 0.60 + 0.78 + 1) = \frac{2.85}{4} = 0.7125\end{aligned}\quad (6.10)$$

En el caso analítico, la integral de convolución en (6.7) queda para este caso, siendo  $h(t) = e^{-t} u_{-1}(t)$ , e  $x(t) = u_{-1}(t)$ :

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \times h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} u_{-1}(\tau) \times e^{-t-\tau} u_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = [e^{-(t-\tau)}]_0^t \\ &= 1 - e^{-t}\end{aligned}\quad (6.11)$$

si hacemos nuevamente  $t = 1$ , la respuesta queda  $y(t) = 1 - e^{-1} = (1 - 0.367) = 0.6321$ . Entonces vemos que nuestra solución aproximada (6.10), para  $t = 1$  da 0.7125 en cambio la respuesta analítica (exacta) (6.11) da 0.6321. Si aumentamos el número de pulsos a  $n = 10$ , la convolución aproximada dará 0.664, para  $n = 50$  pulsos será 0.638; y así a medida que ampliamos el número de pulsos, la respuesta se acercará al cálculo exacto.

### 3. Análisis de sistemas lineales en el dominio de la frecuencia.

#### 3.1 Serie de Fourier

Como ya se describiera en el capítulo 4, existen numerosos sistemas que son excitados con funciones periódicas. La naturaleza ofrece incontables ejemplos de variaciones periódicas del tipo senoidal. Las señales periódicas indican una repetición a período constante de un suceso o fenómeno. Por otra parte, como ya vimos anteriormente, un sistema lineal excitado con una señal senoidal con período  $T_0$ , frecuencia angular  $\omega_0$ , amplitud  $A$  y fase  $\phi$ ,  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$ , da por respuesta otra señal senoidal de idéntica frecuencia, pero con una amplitud y fases distintas.

$$y(t) = y[A \sin(\omega_0 t + \phi)] = B \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Esta propiedad de los sistemas lineales de mantener la frecuencia de la señal de entrada, es la base del análisis en el dominio de la frecuencia. En la figura 6.3 observamos en forma esquemática, la transformación que sufre la función de entrada  $x(t)$  a través del circuito o sistema; dando por resultado la salida  $y(t)$ .

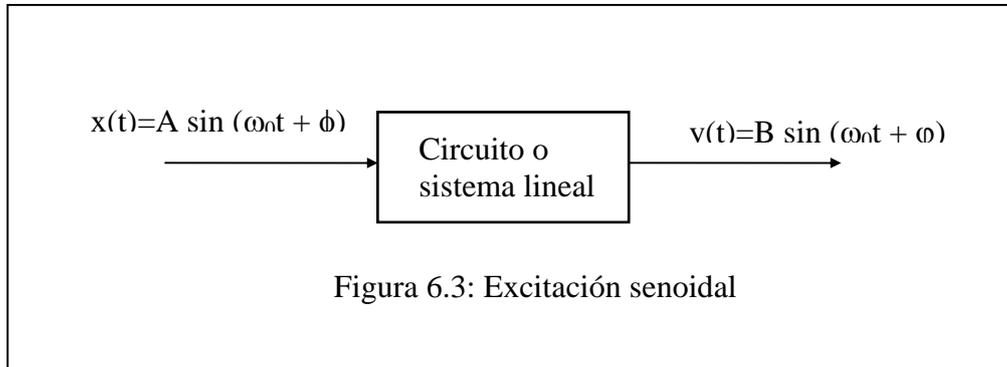


Figura 6.3: Excitación senoidal

De la misma forma que una señal arbitraria  $x(t)$  era descompuesta en una suma de impulsos, permitiendo aplicar la integral de superposición, de igual manera, las señales periódicas pueden aproximarse mediante una suma de funciones senoidales, de manera que la salida  $y(t)$ , será la suma de cada una de las señales senoidales individuales. Otra ventaja importante del análisis de frecuencia, es que permite convertir un sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes y lineales en un sistema de ecuaciones algebraicas.

En 1822 Jean Baptiste Fourier publicó un trabajo sobre “Teoría Analítica del calor”, donde establecía que una función periódica arbitraria podía representarse por una serie infinita de componentes senoidales. Contemporáneamente, tanto Euler como Bernoulli exploraban la misma alternativa; sin embargo recién en 1933 Norbert Wiener dio una demostración matemática completa del trabajo de Fourier.

Sea  $x(t)$  una función periódica, con período  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  (y frecuencia angular  $\omega_0$ ), entonces esta función puede aproximarse por:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots$$

puede compactarse:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (6.12)$$

válido para  $-\infty < t < \infty$ .

El problema consiste en encontrar los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , para una dada función  $x(t)$ .

Haciendo uso de algunas propiedades de las integrales de las funciones senoidales en un período se puede obtener estos coeficientes. Recordando que, si  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , es el período de la fundamental (o primer armónico) y  $m, n$  son enteros:

$$\int_0^{T_0} \sin m\omega_0 t dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{T_0} \cos n\omega_0 t dt = 0$$

$$\int_0^{T_0} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0, m \neq n \\ T_0/2, m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0, m \neq n \\ T_0/2, m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = 0, \text{ para todo } m, n$$

Para la demostración de las integrales arriba expuestas, es útil usar las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin u \sin v &= \frac{1}{2} \cos(u-v) - \frac{1}{2} \cos(u+v) \\ \cos u \cos v &= \frac{1}{2} \cos(u-v) + \frac{1}{2} \cos(u+v) \\ \sin u \cos v &= \frac{1}{2} \sin(u-v) + \frac{1}{2} \sin(u+v) \end{aligned}$$

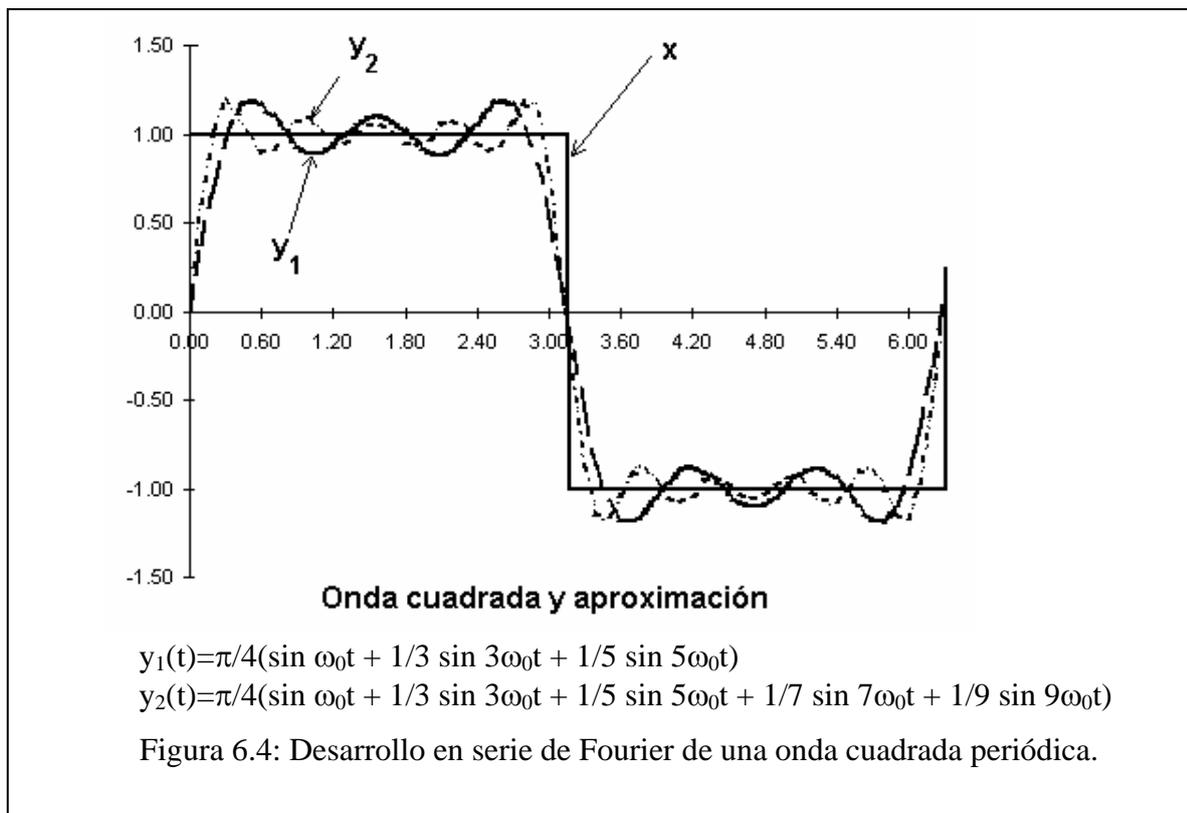
Usando estas integrales, se pueden calcular los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , como sigue:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (6.13)$$

$a_0$ , representa el valor medio de la función o su componente de continua.

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos m\omega_0 t dt, m \neq 0 \quad (6.14)$$

$$b_m = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin m\omega_0 t dt \quad (6.15)$$



Si una señal es periódica, continua y suave (o derivable) en el período  $(t_0, t_0+T_0)$ , entonces la serie de Fourier requerirá sólo unos pocos términos para quedar perfectamente definida. En cambio una función que contiene discontinuidades en algunos puntos, por ejemplo la onda cuadrada de la figura 6.4, requerirá de infinitos términos para representarla adecuadamente. La pregunta inmediata, luego de establecer estas igualdades, es saber si para toda función  $x(t)$  periódica siempre existirán los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . La primera condición es que  $x(t)$  sea integrable en el período. Dirichlet en 1829 establecía que las condiciones suficientes son 1) que  $x(t)$  esté definida y limitada en el rango  $(t_0, t_0+T_0)$  y 2) que tenga un número finito de máximos y mínimos y un número finito de discontinuidades en este rango. No se discutirá el alcance matemático de esta definición, pero sí se dará algunas consideraciones para entender las implicancias de esta definición.

La serie  $y_1(t)$  se ha desarrollado con 3 términos, mientras que la serie  $y_2(t)$ , se han usado 5 términos. Ambas funciones sólo representan aproximadamente la onda original, que tiene dos indeterminaciones en  $0, \pi, 2\pi, \dots$

La serie trigonométrica de Fourier puede expresarse en función de los cosenos solamente, incorporando la información de la fase. Recordando que

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (6.16)$$

donde

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

Usando la ecuación (6.16), la serie de Fourier puede expresarse como:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (6.17)$$

donde  $A_0 = a_0$

### 3.2 Serie exponencial compleja de Fourier:

Existe una tercera forma de expresar la serie de Fourier usando funciones exponenciales de argumento complejo. Si se reemplaza

$$\cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{1}{2} e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + \frac{1}{2} e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}$$

entonces la serie (6.17) puede escribirse como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad (6.18)$$

siendo los coeficientes de la serie exponencial  $X_n$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (6.19)$$

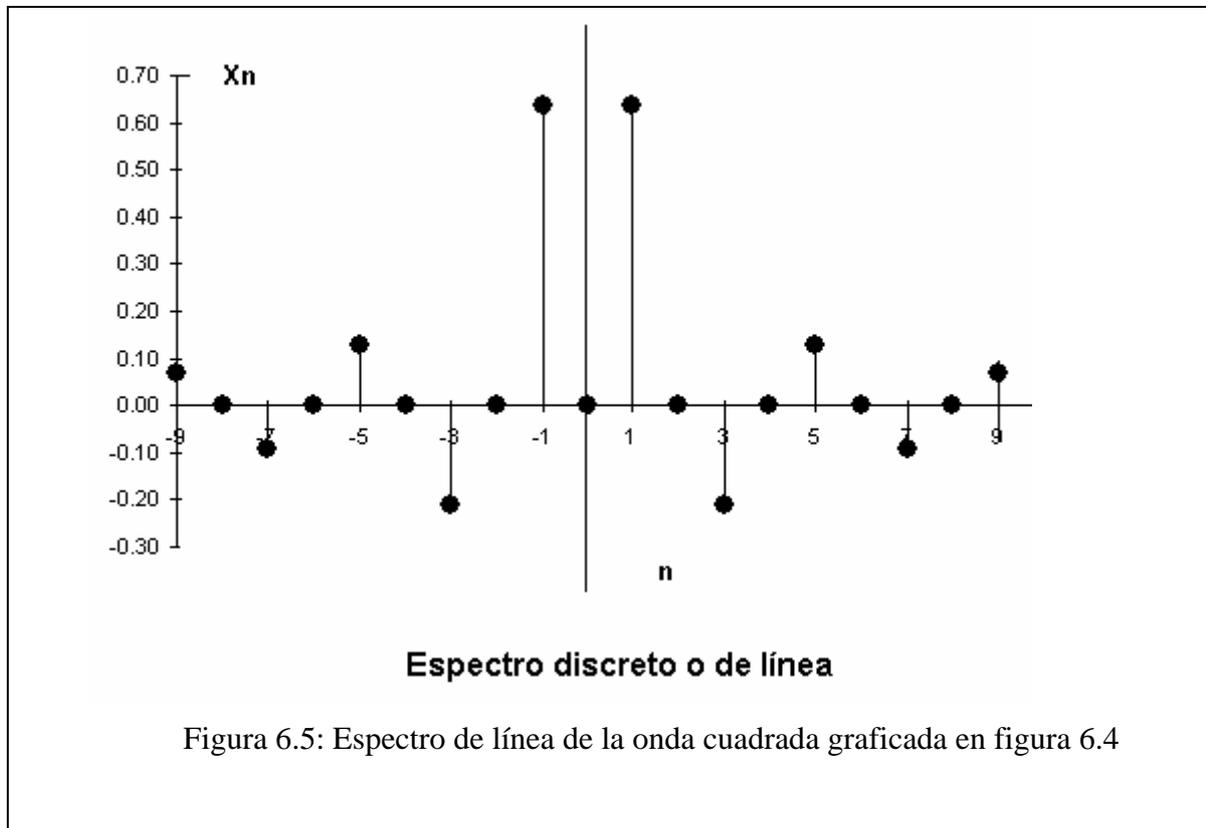
si relacionamos (6.16) con (6.18) tendremos que

$$\begin{cases} A_n = 2|X_n| \\ \theta_n = \angle X_n = -\tan^{-1} \frac{\Im(X_n)}{\Re(X_n)} \end{cases}$$

Al ser  $X_n$ , en general, un número complejo, éste tendrá su parte real  $[\Re(X_n)]$  y una parte imaginaria  $[\Im(X_n)]$ . También puede expresarse como amplitud  $|X_n|$  y fase  $\angle X_n$ . A la representación de una función  $x(t)$  en su forma exponencial de amplitud y fase se la denomina

*espectro de frecuencia*. Los valores  $|X_n|$  se presentan como líneas para la frecuencia  $n\omega_0$ .

Las funciones periódicas generan un *espectro de frecuencia discreto*, también llamado *espectro de línea*. La siguiente figura (6.5) muestra el módulo de  $X_n$  para la serie de la figura 6.4. (una onda cuadrada desarrollada para los términos  $n$  (-9,9)).



### 3.3 Integral de Fourier

#### 3.3.1 Descripción

Hasta aquí hemos tratado el desarrollo de funciones periódicas a través de algunas de las tres opciones de la serie de Fourier. Este desarrollo puede extenderse aún a funciones no periódicas. Si observamos el espectro de línea de la figura, observamos que la distancia entre líneas es la inversa del período, esto es  $1/T_0$ . A medida que el período de la señal se agranda, las líneas tienden a acercarse. En el límite, cuando el período  $T_0$  tienda a infinito, (es decir, una función periódica pasa a ser no periódica), entonces la variable discreta  $n\omega_0$ , se transforma en la variable continua  $\omega$ .

$$X(\omega) = X_n \cdot T_0 = \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\omega)}{T_0} e^{jn\omega_0 t}$$

En el límite, haciendo  $T_0 \rightarrow \infty$ , entonces:

$$\omega_0 = 2\pi/T \rightarrow \Delta\omega \rightarrow d\omega$$

$$n\Delta\omega \rightarrow \omega$$

Las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.20)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.21)$$

A las ecuaciones (6.20) y (6.21), se las conoce como **Transformada de Fourier**. Por la primera, se obtiene los componentes armónicos, o componentes de frecuencia. La segunda ecuación (6.21), expresa a la función del tiempo como una suma infinita de armónicos infinitesimales. La ecuación (6.20) que permite calcular las componentes de frecuencia se la reconoce como *transformada directa de Fourier*, y la (6.21) como *transformada inversa de Fourier*. En notación abreviada:

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$$

donde se lee “X(ω) es la transformada de Fourier de x(t)” y

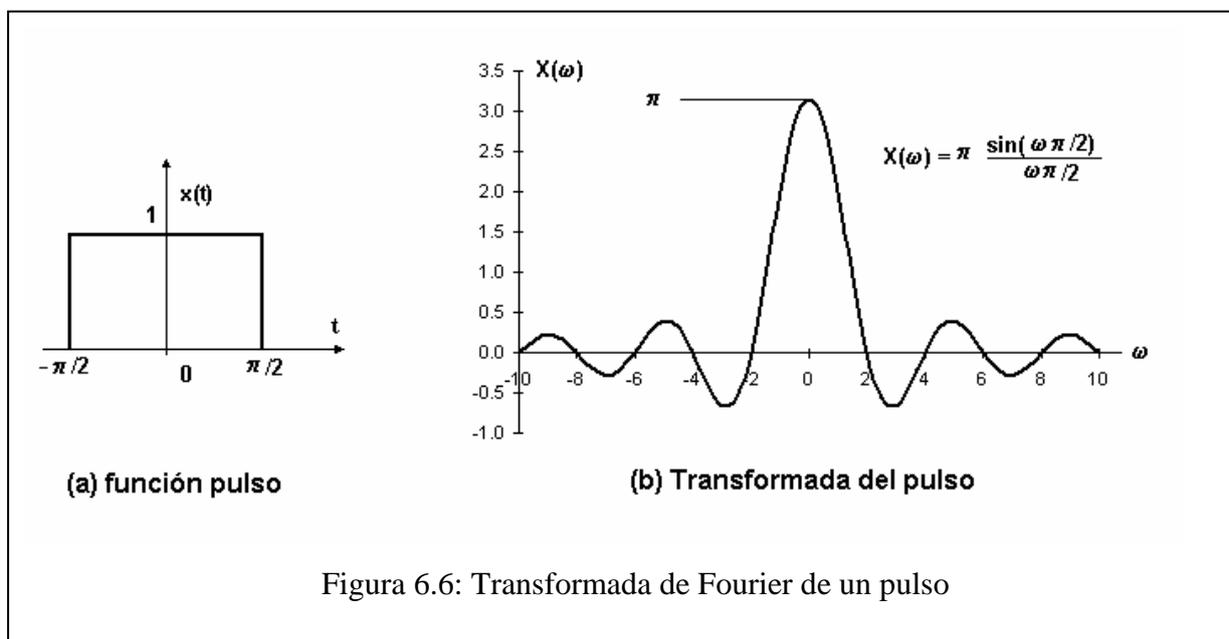
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$$

se leerá “x(t) es la transformada inversa de X(ω)”.

La transformada directa de Fourier permite hallar las componentes de frecuencias para funciones periódicas y más específicamente para funciones no periódicas. La única limitación, es que la función sea convergente o con energía finita, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt < \infty, \text{ o } |x(t)|^2 < \infty$$

Por ejemplo, calculemos las componentes de Fourier (o componentes de frecuencia) de una función pulso de la figura 6.6 (a).



Ejemplo de resolución, para el pulso de la figura.

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{e^{j\omega\pi/2} - e^{-j\omega\pi/2}}{j\omega} = 2 \frac{\sin(\omega\pi/2)}{\omega} = \pi \frac{\sin(\omega\pi/2)}{\omega\pi/2}
 \end{aligned}$$

El par de transformación de Fourier también puede expresarse en función de la frecuencia  $f$ , recordando que  $\omega=2\pi f$ . Reemplazando en

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.22)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (6.23)$$

### 3.3.2 Teoremas y propiedades de la transformada de Fourier.

Existe una serie de teoremas que sintetizan las propiedades de la transformada de Fourier. Se revisarán algunos más importantes:

**1. Teorema de la linealidad o de superposición.** Una propiedad muy importante, que surge de la operación lineal de integración de la transformada.

$$f[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)] = a_1X_1(f) + a_2X_2(f) \quad (6.24)$$

**2. Teorema del retardo de tiempo.** Si reemplaza  $x(t)$  por  $x(t-t_0)$ . Cambiando la variable tiempo  $t$  por  $t = \tau+t_0$ , entonces en la transformada, el factor  $\exp(-j2\pi ft_0)$  sale de la integral.

$$f[x(t - t_0)] = X(f) e^{-j2\pi ft_0} \quad (6.24)$$

**3. Teorema del cambio de escala.** Reemplazando  $t$  por  $\tau = at$ .

$$f[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (6.25)$$

El módulo de  $a$  aparece para contemplar ambos casos, en que  $a>0$  y  $a<0$ .

Para el caso particular en que  $a=-1$ , se lo denomina inversión del tiempo ( $t \rightarrow -t$ ), entonces

$$f[x(-t)] = X(-f) = X^*(f) \quad (6.26)$$

donde  $X^*(f)$  es el complejo conjugado de  $X(f)$

**4. Teorema de la dualidad o similitud.** Esta relación surge de la similitud entre las relaciones directa e inversa de Fourier. Si a una función  $x(t)$ , le corresponde una  $X(f)$  [ $x(t) \rightarrow X(f)$ ], entonces si la función del tiempo es  $X(t)$ , su transformada será la  $x(-f)$

$$f[x(t)] = X(f) ; f[X(t)] = x(-f) \quad (6.27)$$

**5. Teorema de la traslación de frecuencia.** Este teorema es el dual del teorema del retardo de tiempo.

$$f[x(t) e^{(j2\pi f_0 t)}] = X(f-f_0) \quad (6.28)$$

Una versión parcial es el *teorema de la modulación*, que puede demostrarse usando la igualdad de Euler :  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$ .

$$f[x(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0) \quad (6.29)$$

**6. Teoremas de la integración y diferenciación.** Si se conoce la transformada de una función  $x(t)$ , y se reemplaza por  $dx/dt$  en la transformada, entonces se obtiene:

$$f[dx(t)/dt] = X(f) (j2\pi f) \quad (6.30)$$

en general para la derivada enésima:

$$f[d^n x(t)/dt^n] = (j2\pi f)^n X(f)$$

De igual manera, para la integración se demuestra que.

$$f\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = (j2\pi f)^{-1} X(f) + \frac{1}{2} X(0)u_0(f) \quad (6.31)$$

**7. Teorema de la convolución.** La transformada del producto de convolución entre  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , surge de reemplazar la función desplazada en el tiempo  $(t-t')$  por su antitransformada:

$$f[x_1 * x_2] = f\left[\int_{-\infty}^t x_1(t') x_2(t-t') dt'\right] = X_1(f) \cdot X_2(f) \quad (6.32)$$

Esta propiedad es muy importante para el análisis de los sistemas, pues relaciona la integral de convolución con la integral de Fourier. De este teorema se desprende que mientras que en el dominio del tiempo es producto de convolución entre señales, en el dominio del tiempo es producto simple de funciones. Su inversa también es cierta como se ve en el próximo teorema.

**8. Teorema de la multiplicación.** Este es el dual de la convolución. Se desea saber la transformada del producto simple de funciones  $x_1 \cdot x_2$

$$f[x_1 \cdot x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f') X_2(f-f') df' = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f-f') X_2(f') df' \quad (6.33)$$

### 3.3.3 Análisis de sistemas usando transformada de Fourier

Dado un sistema lineal, si se conoce la respuesta impulsiva  $h(t)$ , entonces según lo expresado en el análisis de sistemas en el dominio del tiempo, la relación entre la entrada  $x(t)$  y la salida  $y(t)$ , queda definida por la integral de convolución (Ec. 6.8):

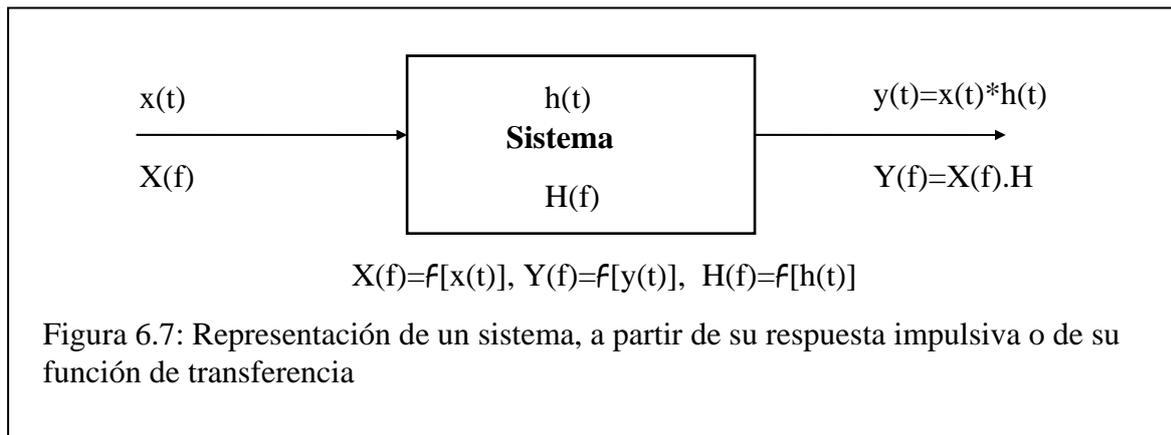
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t) = x(t) * h(t) \quad (6.34)$$

recordando que la  $h(t)$  era la respuesta del sistema a una entrada impulsiva  $u_0(t)$ .

Usando las propiedades de la transformada de Fourier, para la convolución (6.32), queda:

$$Y(f) = H(f) X(f) \quad (6.35)$$

donde  $X(f) = f[x(t)]$ ,  $Y(f) = f[y(t)]$ ,  $H(f) = f[h(t)]$



Así como se denomina a la  $h(t)$  como *función impulsiva o característica*, a la  $H(f)$  se la llama *función de transferencia* de un sistema lineal o respuesta en frecuencia. La respuesta en frecuencia suele aparecer como  $H(\omega)$ , siendo  $\omega=f/2\pi$ . Tanto la  $h(t)$  como la  $H(f)$  son igualmente buenas caracterizaciones de un sistema lineal.

De estas relaciones surge inmediatamente, que si se conoce la  $x(t)$  y la  $y(t)$ , se puede calcular la  $h(t)$ , a través de la antitransformada de la  $H(f)$ . Esto es, conocidas  $x(t)$  e  $y(t)$ , entonces  $X(f)=f[x(t)]$  e  $Y(f)=f[y(t)]$ , luego

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}, \quad (6.36)$$

que es la función de transferencia. Conocida la función de transferencia, la respuesta impulsiva  $h(t)$  será la transformada inversa de  $H(f)$ :

$$h(t)=f^{-1}[H(f)]$$

En general la  $H(f)$  es un número complejo, que se escriben función de su amplitud y fase:

$$H(f)=|H(f)| e^{j\angle H(f)}, \text{ o simplemente } H(f)=|H(f)| \angle H(f).$$

En el capítulo 3, vimos la respuesta de un circuito RC a una entrada impulsiva (figura 3.8 y ecuación 3.11). La ecuación diferencial de ese circuito RC, puede describirse como

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t) \quad \text{para } -\infty < t < \infty$$

donde  $x(t)$  es la entrada impulsiva,  $y(t)$  es la corriente del circuito serie  $i(t)$ . Aplicando los principios de superposición y diferenciación, la transformada de Fourier de la ecuación diferencial será:

$$(j2\pi f RC + 1) Y(f) = X(f)$$

o sea

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf} = \frac{1}{1 + j(f/f_3)}$$

$$H(f) = |H(f)| \angle H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_3)^2}} e^{-j(\tan^{-1}(f/f_3))}$$

donde  $f_3=1/2\pi RC$ . La antitransformada de  $H(f)$  será:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1 + j2\pi f RC}\right]$$

Llamando  $\alpha = 1/RC$ ,  $H(f) = \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi f}$

cuya antitransformada será, para  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} h(t) &= \alpha \times \exp(-\alpha t) \times u_{-1}(t) \\ &= \frac{1}{RC} \times \exp(-t/RC) \times u_{-1}(t) \end{aligned}$$

Debe notarse que el método aplicado es similar al del dominio de la frecuencia, sólo que en aquel caso, no calculábamos la respuesta natural, sino su respuesta permanente a una entrada senoidal.

### 3.4 Transformada de Laplace

#### 3.4.1 Descripción

La transformada de Fourier es una herramienta adecuada para analizar señales en el estado permanente, es decir, señales que ya están establecidas en el sistema, habiendo pasado un tiempo suficiente luego de una transición. El análisis de las señales transitorias, se analizan en el dominio del tiempo. La mayoría de las señales realizables, pueden transformarse por Fourier. Existen sin embargo algunas funciones singulares que no pueden transformarse, ya que no convergen (tiene energía infinita, no tienden a desaparecer para el tiempo infinito.). Un ejemplo importante es la función escalón  $u_{-1}(t)$ . Esta función no sólo no converge, sino que representa una transición (on-off) para  $t=0$ . La transformada de Laplace permite trabajar con todo tipo de señales, inclusive determinar la respuesta transitoria de un sistema. Como se verá enseguida, además la transformada de Laplace permite convertir las ecuaciones diferenciales de un sistema en ecuaciones algebraicas, simplificando enormemente la solución de un sistema.

Dada una función  $x(t)$ , (por ejemplo la  $u_{-1}(t)$ , que no converge), el método consiste en forzar la convergencia multiplicando a la función  $x(t)$  por un factor exponencial y luego realizar la transformada de Fourier del producto. Si la función  $x(t)$  es  $=0$  para  $t < 0$ , entonces el factor apropiado es  $e^{-\sigma t}$ , donde  $\sigma$  es positivo. Entonces la transformada de Fourier será:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \quad (6.37)$$

si llamamos  $s = \sigma + j\omega$ , la ecuación (6.37) se re escribe como:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (6.38)$$

A esta función  $\mathcal{L}[\cdot]$  se la llama *transformada directa de Laplace*. La operación inversa, es decir, conocida la  $X(s)$ , obtener la  $x(t)$  se la denomina antitransformación o transformada de Laplace inversa, y se la simboliza  $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ .

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (6.39)$$

En resumen, el uso de la transformada de Laplace en el análisis de sistemas es muy conveniente por los siguientes motivos:

1. La resolución de las ecuaciones diferenciales se realizan sistemáticamente e implican sólo operaciones algebraicas.
2. Se obtiene la solución total, la solución homogénea o impulsiva o transitoria, y la particular o permanente.
3. Las condiciones de contorno o condiciones iniciales se incluyen automáticamente en las ecuaciones.

Si bien es relativamente simple encontrar la transformada directa de Laplace, el proceso inverso, resulta a veces complicado. Existen algunos métodos de antitransformación que simplifican el problema, y finalmente, el uso de tablas de pares de funciones transformada y antitransformada ayudan a resolver el problema.

Queda aún discutir la región de convergencia de la transformada de Laplace. Pero previamente, calcularemos la transformada de Laplace del escalón unitario  $u_{-1}(t)$ . Recordando que esta función es 0 para  $t < 0$  y 1 para  $t > 0$ , entonces,

$$X(s) = \int_0^{\infty} u_{-1}(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt$$

$$X(s) = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \left. \frac{e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}}{-s} \right|_0^{\infty} = -\frac{e^{-\sigma t}}{s} (\cos\omega t - j\sin\omega t) \Big|_0^{\infty}$$

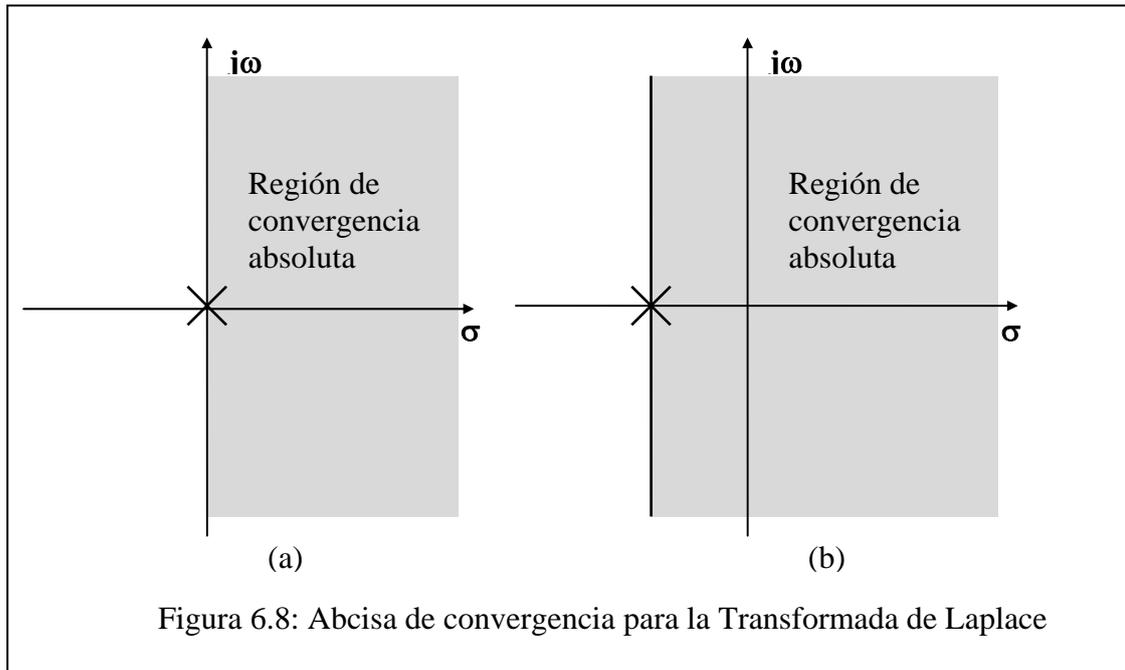
En el límite,  $\mathcal{L}[u_{-1}(t)] = 1/s$  para  $\sigma > 0$

Es evidente que, al multiplicar la función por una exponencial del tipo  $\exp(-\sigma t)$ , converge hacia las  $t$  positivas, pero diverge para las  $t$  negativas. Es por ello que la existencia de la transformada de Laplace sólo se asegura entre 0 e infinito. Al mínimo valor de  $\sigma$ , capaz de asegurar la convergencia de la función  $x(t)$  (para  $t > 0$ ), se lo denomina *abcisa de convergencia absoluta*  $c$ . Para el ejemplo anterior, la abcisa de convergencia es  $c=0$ , ver figura 6.8 (a). Por ejemplo, calculemos la transformada de Laplace de la función  $x(t) = \exp(-\alpha t)u_{-1}(t)$

$$\mathcal{L}[\exp(-\alpha t)u_{-1}(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} u_{-1}(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt$$

$$X(s) = \left. -\frac{e^{-(s+\alpha)t} e^{-j\omega t}}{(s+\alpha)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{(s+\alpha)}$$

Esta función converge si  $\sigma$  (la parte real de  $s$ )  $\geq \alpha$  (la parte real de  $\alpha$ ,  $s$  es complejo). La abcisa de convergencia será  $c = -\text{Re}(\alpha)$  (Ver figura 6.8 b)



### 3.4.2 Teoremas y propiedades de la Transformada de Laplace

En general las propiedades son similares para la transformada de Fourier. Sin embargo destacaremos algunas muy importantes.

**1. Teorema de la linealidad :** Dado que la transformada es una operación lineal, se aplica el principio de superposición:

$$\mathcal{L}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1X_1(s) + a_2X_2(s) \quad (6.40)$$

**2. Transformada de las derivadas:** La transformada de Laplace de la derivada de una función  $x(t)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt,$$

que integrando por partes y haciendo  $u = \exp(-st)$ ,  $dv = dx(t)$ ,  $du = -s \exp(-st)$ ,  $v = x(t)$ , entonces:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = e^{-st}x(t)\Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-) \quad (6.41)$$

donde  $x(0^-)$  significa el valor inicial de  $x(t)$  para  $t=0$ , pero desde el límite inferior. (Un momento infinitesimal antes de  $t=0$ ). Generalizando para un derivada de orden  $n$ :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2} \frac{dx(0^-)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1}x(0^-)}{dt^{n-1}}$$

Por ejemplo para una derivada segunda será  $\mathcal{L}[d^2x(t)/dt^2] = s^2X(s) - sx(0^-) - dx(0^-)/dt$

**3. Transformada de la integral:** La transformada de la integral de  $x(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t)dt, \text{ es}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(t)dt\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s} \quad (6.42)$$

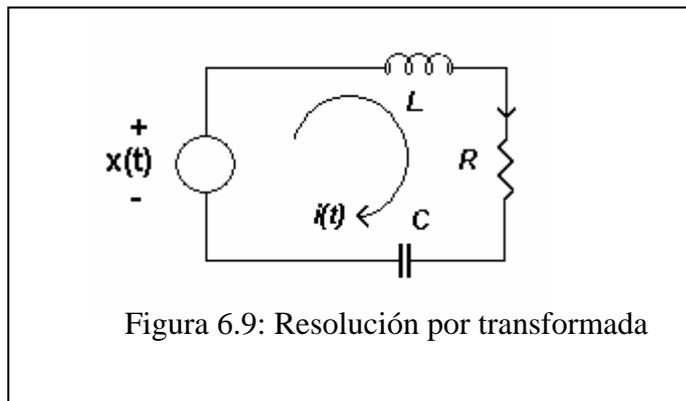
donde  $y(0^-)$  es una notación abreviada de la integral entre  $t=-\infty$  y  $t=0^-$

$$y(0^-) = \int_{-\infty}^0 x(\lambda)d\lambda \Big|_{t=0^-}$$

Este valor no es otra cosa que la carga inicial (o memoria) almacenada en el sistema.

### 3.4.3. Resolución de ecuaciones diferenciales usando la Transformada de Laplace

Supongamos un sistema lineal que responde a la siguiente ecuación diferencial, donde se desea saber la variación de  $i(t)$  a distintas entradas  $x(t)$ .



$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\lambda)d\lambda = x(t)$$

y supongamos que el sistema no está cargado inicialmente. Transformado esta expresión:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = X(s)$$

Luego, se puede obtener  $I(s)$  despejando

$$I(s) = \frac{sX(s)}{L[s^2 + (R/L)s + 1/LC]} = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (6.43)$$

Antitransformando  $I(s)$  se obtiene se vuelve al dominio del tiempo, obteniendo la función  $i(t)$  buscada. La operación  $\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i(t)$ , puede, en general ser más o menos complicada. Afortunadamente para la mayoría de las señales más frecuentes, se conoce su antitransformada.

**Tabla 6.1: Tabla de algunas transformadas de Laplace más comunes**

N.	Señal $x(t)$	Transformada de Laplace $X(s)$
1	impulso $u_0(t)$	$s$
2	cte 1 o escalón $u_{-1}(t)$	$1/s$
3	$\frac{t^n \exp(-\alpha t) u_{-1}(t)}{n!}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$
4	$\cos \omega_0 t u_{-1}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
5	$\sin \omega_0 t u_{-1}(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
6	$\exp(-\alpha t) \cos \omega_0 t u_{-1}(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
7	$\exp(-\alpha t) \sin \omega_0 t u_{-1}(t)$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
8	$(\omega_0 t \sin \omega_0 t) u_{-1}(t)$	$\frac{2\omega_0^2 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
9	$\omega_0 t \exp(-\alpha t) \sin \omega_0 t u_{-1}(t)$	$\frac{2\omega_0^2 (s + \alpha)}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2}$

### 3.4.4 Antitransformada por fracciones simples

Un método común de antitransformación se lo conoce como desarrollo en fracciones simples. La  $I(s)$  en (6.43) quedó conformada por un cociente entre dos polinomios en  $s$ . Este método consiste en transformar funciones racionales (el polinomio del numerador  $P(s)$  es al menos un orden inferior al del polinomio del denominador  $Q(s)$ ) en una suma de fracciones de menor grado, de manera de aplicar la antitransformada de una suma.

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - s_n} \quad (6.44)$$

donde  $s_1, s_2, \dots, s_n$  son las raíces de  $Q(s)$ .

Existen en general tres tipos de raíces:

1. raíces reales y simples
2. raíces reales y múltiples
3. raíces complejas conjugadas.

Veremos con un ejemplo el uso de la antitransformación por fracciones simples.

### 1. Raíces reales y simples

Dado  $I(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$ , primeramente debe factorarse el denominador:

$$I(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Para calcular  $K_1$ , multiplico m.a.m. por  $(s+1)$

$$I(s) = \frac{(2s+3)(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1(s+1)}{(s+1)} + \frac{K_2(s+1)}{(s+2)}$$

$$\frac{(2s+3)}{(s+2)} = K_1 + K_2 \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

dando a la variable  $s$  el valor del polo  $s=-1$ , y reemplazando en la expresión anterior:

$$K_1 = \left. \frac{(2s+3)}{(s+2)} \right|_{s=-1} = 1$$

De igual manera que para  $K_1$ , para calcular  $K_2$ , multiplico m.a.m. por  $(s+2)$ , y reemplazo la variable  $s$  por el valor del polo  $s=-2$ , quedando entonces

$$K_2 = \left. \frac{(2s+3)}{(s+1)} \right|_{s=-2} = 1$$

Por lo tanto, la descomposición de  $I(s)$  en fracciones simples queda:

$$I(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)}$$

la antitransformada de  $I(s)$  será la suma de las antitransformada de las dos fracciones:

$$L^{-1}[I(s)] = L^{-1}[1/(s+1)] + L^{-1}[1/(s+2)]$$

$$i(t) = e^{-t} + e^{-2t}$$

### 2. Raíces reales y múltiples

Supongamos el siguiente ejemplo:

$$I(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

Esta expresión puede desarrollarse en fracciones simples como sigue:

$$I(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{(s+1)} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

1. Cálculo de  $K_{12}$ . Se empieza calculando el coeficiente de la fracción con el mayor exponente ( $n$ ), de igual manera que en el caso de las raíces simples y reales. Esto es multiplico m.a.m. por  $(s+1)^2$ , la expresión quedará:

$$(s+2) = (s+1) K_{11} + K_{12} \quad (\text{Ec. a})$$

luego se calcula el valor de  $s$  para el polo,  $s=-1$ . Reemplazando en la Ec. (a) queda  $K_{12}=1$

2. Cálculo de  $K_{11}$ . Una vez calculado el coeficiente de mayor exponente se continúa con el

coeficiente de la fracción del exponente inmediatamente inferior (n-1), en este caso como sólo hay dos, se sigue con  $K^{11}$ . En este caso no se puede seguir con el procedimiento anterior, es decir multiplicar a  $I(s)$  con  $(s+1)$ , pues al reemplazar por el valor del polo  $s=-1$ , queda indeterminado

$$I(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}(s+1)}{(s+1)} + \frac{K_{12}(s+1)}{(s+1)^2} = K_{11} + \frac{K_{12}}{(s+1)}$$

En cambio se deriva la Ec. (a) del paso 1, con respecto a  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [(s+2)] &= (s+1)K_{11} + K_{12} & \Rightarrow K_{11} &= 1 \\ 1+0 &= K_{11} + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando en la expresión original  $I(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}$

Su antitransformada será:  $i(t) = \mathcal{L}^{-1}[1/(s+1)] + \mathcal{L}^{-1}[1/(s+1)^2]$ , que puede obtenerse de las tablas.

$$i(t) = e^{-t} + t e^{-t} u_{-1}(t) = e^{-t} (1+t) u_{-1}(t)$$

### 3. Raíces complejas y conjugadas.

Supongamos el siguiente caso:

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

El polinomio del denominador tiene dos raíces complejas conjugadas en  $(s=-1+2j)$  y  $s^*=-1-2j$ , luego puede desarrollarse en fracciones parciales como sigue:

$$I(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 5)} = \frac{K_1}{(s+1-2j)} + \frac{K_1^*}{(s+1+2j)}$$

Donde  $K_1$  y  $K_1^*$  son complejos conjugados. Para calcular  $K_1$ , al igual que en los casos anteriores, se multiplica m.a.m por  $(s+1-2j)$ , y se da valores a la variable  $s=-1+2j$ . Entonces

$$K_1 = j \frac{1}{4} \text{ y } K_1^* = -j \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto nos da

$$I(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 5)} = \frac{j \frac{1}{4}}{(s+1-2j)} + \frac{-j \frac{1}{4}}{(s+1+2j)}.$$

Su antitransformada se halla en las tablas. El polinomio denominador también puede expresarse como  $(s+1)^2+2^2$ . Multiplicando y dividiendo por 2: La  $i(t)$  será

$$I(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2},$$

cuya antitransformada  $i(t)$  puede hallarse en tablas, siendo

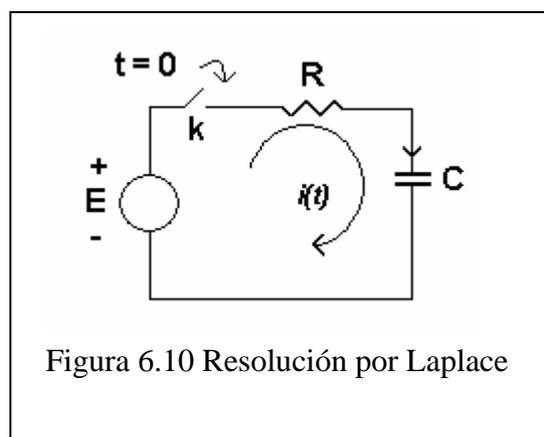
$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) u_{-1}(t)$$

### 3.5 Resolución de circuitos por Transformada de Laplace

Una vez desarrollado los métodos de transformación y antitransformación, resolvamos varios circuitos a fin de dominar prácticamente este método de resolución. La Tabla 6.2 presenta una síntesis de la relaciones volt-ampere para cada elemento y su transformada de Laplace equivalente. Nótese la similitud con el método del dominio de la frecuencia, solo que en vez de el factor  $j\omega L$  ó  $1/j\omega C$  se reemplaza por  $sL$  ó  $1/sC$ ; siempre que la inductancia o el capacitor estén descargados. Si éstos están cargados, debe aplicarse la transformada de la integral, que incorpora las condiciones iniciales. Así una inductancia cargada con una corriente inicial  $I_0$ , se representa en el circuito equivalente como  $sL(\cdot) - LI_0$ ; mientras que la capacidad cargada con una  $E_0$ , se convierte a  $1/sC(\cdot) + E_0/s$ .

Analicemos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo N°1:** Supongamos un circuito RC excitado con una función escalón de amplitud  $E$ . El interruptor  $k$  se cierra para  $t = 0$ ; como se muestra en la figura 6.10.



La ecuación diferencial del circuito será:

$$R \times i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = E \times u_{-1}(t) \quad (6.45)$$

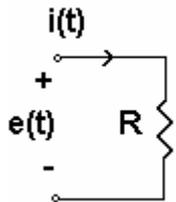
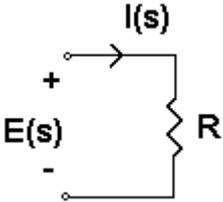
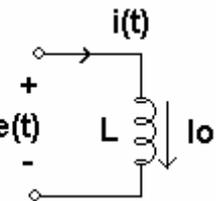
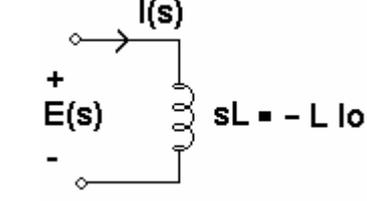
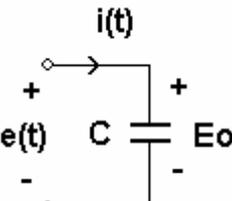
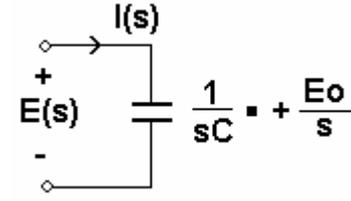
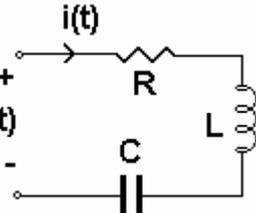
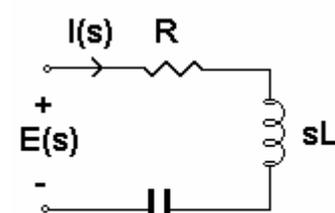
Su transformada será:

$$R \times I(s) + \frac{1}{C} \left[ \frac{I(s)}{s} + \frac{q(0)}{s} \right] = \frac{E}{s} \quad (6.46)$$

$$R \times I(s) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{E_0}{s} = \frac{E}{s}$$

En la ecuación (6.46) hemos aplicado la transformada de la integral (6.42) donde  $q(0)$  representa la carga inicial del capacitor. El cociente  $q(0)/C$  es la tensión inicial del capacitor. El generador de tensión con un interruptor es el circuito equivalente de un escalón de tensión  $E u_{-1}(t)$ , cuya transformada es  $E/s$ .

**Tabla 6.2:** Transformación por Laplace de las principales relaciones volt-ampere para los elementos pasivos.

Dominio del tiempo	Transformada de Laplace
 <p><math>e = iR</math> <math>i = \frac{e}{R}</math></p>	 <p><math>E(s) = R \times I(s)</math></p>
 <p><math>e = L \frac{di}{dt}</math></p>	 <p><math>E(s) = sL \times I(s) - Li(0)</math> <math>= sL \times I(s) - LI_0</math></p>
 <p><math>i = C \frac{de}{dt}</math> <math>e = \frac{1}{C} \int_0^t idt + E_0</math></p>	 <p><math>E(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{E_0}{s}</math></p>
 <p><math>e = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt</math></p>	 <p><math>E(s) = I(s) \left[ R + sL + \frac{1}{sC} \right]</math></p>

Si suponemos que el capacitor está descargado, la (6.46) queda:

$$I(s) \left( R + \frac{1}{sC} \right) = \frac{E}{s}$$

y la corriente  $I(s)$  será:

$$I(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{\left( R + \frac{1}{sC} \right)} = \frac{E}{R} \frac{1}{\left( s + \frac{1}{RC} \right)} \quad (6.47)$$

Cuya anti transformada será:

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp(-t/RC) \quad (6.48)$$

válido para  $t \geq 0$ .

**Ejemplo N°2:** Supongamos un circuito RL excitado también con una función escalón de amplitud  $E$ . El interruptor  $k$  se cierra para  $t = 0$ ; como se muestra en la figura 6.11.

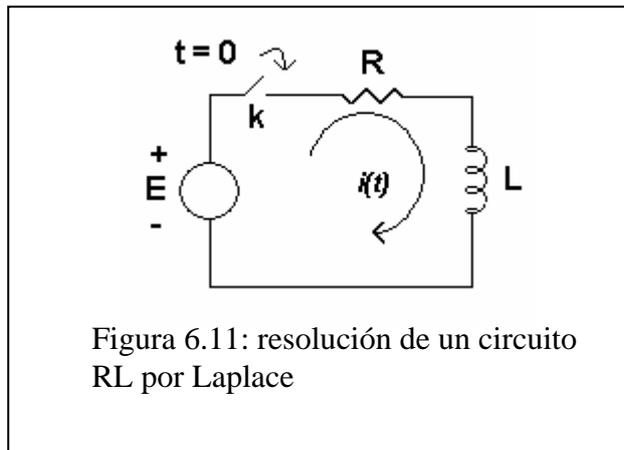


Figura 6.11: resolución de un circuito RL por Laplace

La ecuación diferencial de este circuito de primer orden es:

$$R \times i(t) + L \frac{di}{dt} = E \times u_{-1}(t) \quad (6.49)$$

Primeramente debemos transformar la ecuación diferencial (6.49):

$$R \times I(s) + L[s \times I(s) - i(0)] = \frac{E}{s} \quad (6.50)$$

nuevamente, en forma similar al ejemplo anterior, el escalón es transformado por  $E / s$ ; en cambio se aplica la transformada de una derivada (6.41), donde  $i(0) = I_0$  es la corriente inicial de la inductancia, si estuviera cargada. Suponiendo que no está cargada, la (6.50) se puede reescribir como:

$$I(s)[R + sL] = \frac{E}{s} \quad (6.51)$$

entonces, la corriente será:

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s \left( s + \frac{R}{L} \right)} \quad (6.52)$$

Para antitransformar (6.52) conviene hacerlo por fracciones simples (o por tablas); entonces aplicando el método de fracciones simples será:

$$\frac{E/L}{s\left[s + \frac{R}{L}\right]} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + \frac{R}{L}}$$

por lo tanto debemos hallar los valores de  $K_0$  y  $K_1$  a fin de convertir (6.51) en una suma de dos fracciones simples.

$$\frac{E/L}{s\left[s + \frac{R}{L}\right]} = \frac{K_0\left(s + \frac{R}{L}\right) + K_1 \times s}{s\left[s + \frac{R}{L}\right]}$$

$$\frac{E}{L} = K_0\left(s + \frac{R}{L}\right) + K_1 \times s$$

$$\frac{E}{L} = K_0 \frac{R}{L} + s \times (K_0 + K_1)$$

de allí podemos ver

$$\begin{cases} \frac{E}{L} = K_0 \frac{R}{L} \\ K_0 + K_1 = 0 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} K_0 = \frac{E}{R} \\ K_1 = -\frac{E}{R} \end{cases}$$

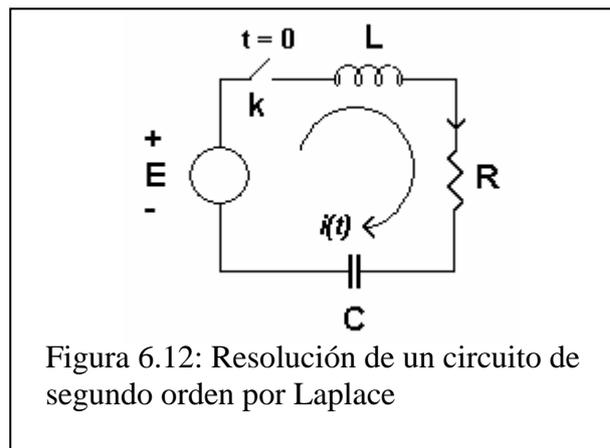
Entonces la (6.52) se describe como:

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{E}{R} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right] \quad (6.53)$$

Ahora sí se puede anti transformar cada fracción:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[ 1 - \exp\left(-t \frac{R}{L}\right) \right] \quad (6.54)$$

Ejemplo N°3: Resolvamos el circuito de segundo orden RLC de la figura 6.12.



La ecuación diferencial del circuito de la figura 6.12, es:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = E \times u_{-1}(t) \quad (6.55)$$

Si suponemos condiciones iniciales nulas su transformada será:

$$L \times sI(s) + R \times I(s) + \frac{I(s)}{sC} = \frac{E}{s}$$

Luego, se puede obtener  $I(s)$  despejando

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{[s^2 + s(R/L) + 1/LC]} = \frac{E}{L} \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \quad (6.56)$$

donde  $\frac{R}{2L} = \alpha$  es el factor de amortiguación, y  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ; siendo  $\omega_0$  la frecuencia natural, como ya se explicó en el capítulo 3. Las raíces del polinomio denominador serán, (ver 3.42):

$$s_{1,2} = \left[ -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \right],$$

por lo tanto, dependiendo de la diferencia entre  $\alpha$  y  $\omega_0$ . Entonces  $\alpha > \omega_0$ , las raíces son reales y distintas, si  $\alpha < \omega_0$ , las raíces son complejas conjugadas y si  $\alpha = \omega_0$ , las raíces son iguales y reales. De aquí que este sistema puede dar tres tipos de respuestas en el tiempo (Comparar con Cap. 3).

**Caso a)**  $\alpha > \omega_0$ , también llamado *sobreamortiguado*.

Por ejemplo,  $2\alpha=10$ ;  $\omega_0^2=16$ . Por lo tanto,  $\omega_0=4$  y  $\alpha=5$ . La raíces del polinomio serán:  $s_1=-2$  y  $s_2=-8$ , por lo tanto la  $I(s)$  será:

$$I(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 16} = \frac{10}{(s+2)(s+8)} = \frac{5}{3} \left( \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+8} \right)$$

cuya antitransformada será:

$$i(t) = 5/3 (e^{-2t} - e^{-8t}) u_{-1}(t)$$

**Caso b)**  $\alpha = \omega_0$ , también llamado *amortiguamiento crítico, o críticamente amortiguado*

Por ejemplo,  $2\alpha=8$ ;  $\omega_0^2=16$ . Por lo tanto,  $\omega_0=4$  y  $\alpha=4$ . La raíces del polinomio serán:  $s_{1,2}=-4$ , por lo tanto la  $I(s)$  será:

$$I(s) = \frac{8}{s^2 + 8s + 16} = \frac{8}{(s+4)^2},$$

cuya antitransformada será:

$$i(t) = 8t \times \exp(-4t) \times u_{-1}(t)$$

**Caso c)**  $\alpha < \omega_0$ , también llamado *subamortiguado*

Por ejemplo,  $2\alpha=4$ ;  $\omega_0^2=16$ . Por lo tanto,  $\omega_0=4$  y  $\alpha=2$ . La raíces del polinomio serán:

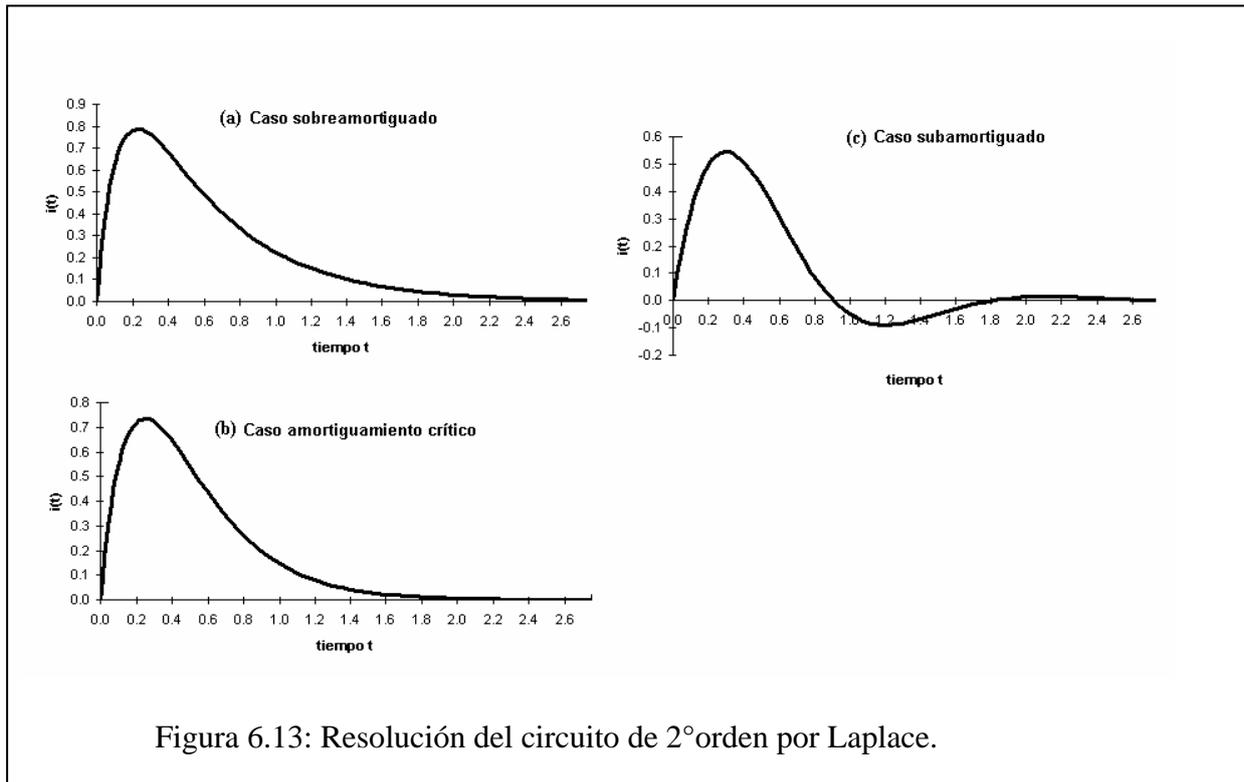
$$s_1 = -2 + j(3)^{1/2} \text{ y } s_1^* = -2 - j(3)^{1/2},$$

por lo tanto la  $I(s)$  será:

$$I(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 16} = \frac{4}{\sqrt{12}} \frac{\sqrt{12}}{(s+2)^2 + 12} = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\sqrt{12}}{(s+2)^2 + 12},$$

cuya antitransformada será:

$$i(t) = \sqrt{\frac{4}{3}} e^{-2t} \sin(\sqrt{12}t) u_{-1}(t)$$



Con este ejemplo se ha ilustrado el uso de la transformada de Laplace y el cálculo de su inversa, usando el desarrollo de fracciones simples y tablas de antitransformación.

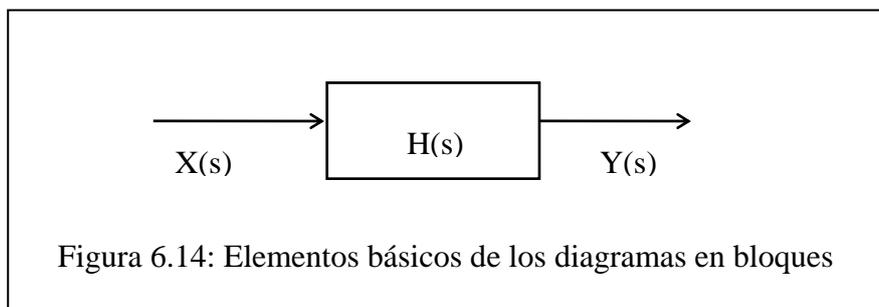
### 3.6 Diagrama en bloques y función de transferencia

Una ventaja importante de la Transformada de Laplace lo constituye el análisis de sistemas por diagrama de bloques. Un sistema complejo puede analizarse conociendo las funciones de transferencia de los subsistemas. Dados una señal de entrada  $X(s)$ , una función de transferencia  $H(s)$  y la salida del sistema  $Y(s)$ , por la propiedad de la transformada que relaciona la entrada con la salida, queda:

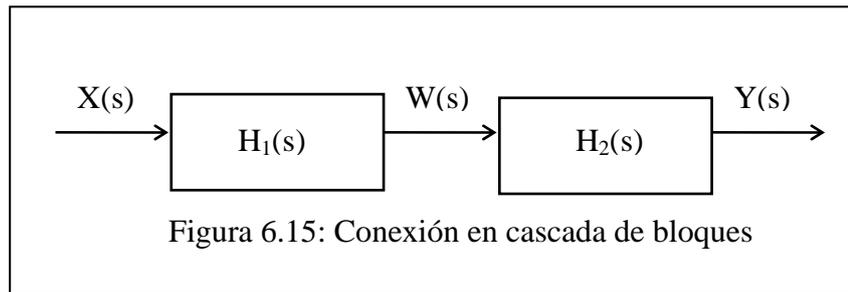
$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \tag{6.57}$$

donde  $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$ ,  $X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$  y  $H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$ .

La figura 6.14 expresa esta relación en *diagramas en bloques*.



Si tuviéramos una cascada de bloques como en la figura 6.15:



Las relaciones funcionales de los bloques será;  $Y(s) = H_2(s) \cdot W(s)$  ;  $W(s) = H_1(s) X(s)$  ;  
La función de transferencia total será:

$$Y(s) = H_2(s) H_1(s) X(s) = H(s) X(s); \quad (6.58)$$

entonces

$$H(s) = H_2(s) \cdot H_1(s); \quad (6.59)$$

esto es si tenemos varios sistemas conectados en cascada, la función de transferencia del conjunto será el producto de las funciones de transferencias particulares.

Veamos, ahora en la figura 6.16 un sistema simple con realimentación. Calculemos la función de transferencia del conjunto, partiendo de la información de los bloques individuales.

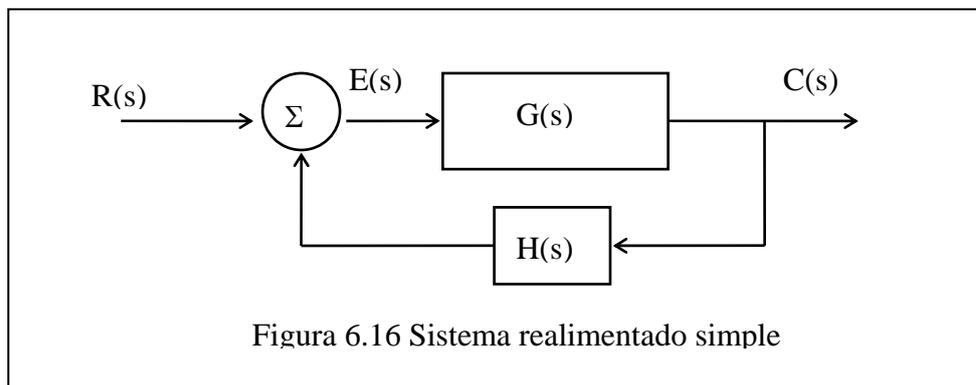
$$C(s) = G(s) E(s) \quad (6.60)$$

La señal que llega al sumador será:

$$E(s) = R(s) - H(s) C(s)$$

Reemplazando  $E(s)$  en (6.60):

$$C(s) = G(s) R(s) - G(s) H(s) C(s) \quad (6.61)$$



Finalmente, sacando factor común  $C(s)$ :

$$C(s) [1 + G(s) H(s)] = G(s) R(s)$$

entonces la función de transferencia del sistema total será

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6.62)$$

### 3.7 Polos y ceros de la función de transferencia

La función de transferencia, que representa al sistema bajo estudio, en general se presenta como un cociente de dos polinomios en  $s$  (ver 6.43 y 6.44), esto es:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\sum_m b_i s^i}{\sum_n a_i s^i} = \frac{(s-s_1)(s-s_3)\cdots(s-s_m)}{(s-s_2)(s-s_4)\cdots(s-s_n)}; \quad \text{en general } m < n \quad (6.63)$$

donde  $s_1, s_3, \dots, s_m$  son los ceros y  $s_2, s_4, \dots, s_n$  son los polos de la función de transferencia  $H(s)$  o a veces también denominada  $G(s)$  o función ganancia del sistema. Los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  de los polinomios denominador y numerador son reales y positivos, por lo tanto los ceros como los polos serán reales o complejos conjugados. Los polos también pueden interpretarse como frecuencias particulares del circuito.

La interpretación de la posición de los polos y ceros de una función de transferencia nos permite predecir el comportamiento del circuito o sistema. Por ejemplo obtener las curvas de ganancia y fase en función de la frecuencia, o determinar la estabilidad del sistema (saber si la respuesta tendrá oscilaciones, etc.).

Existen diversos métodos para analizar la función de transferencia: a) métodos directos, b) métodos en el plano  $s$  y c) gráficos logarítmicos de magnitud y fase. Veremos brevemente cada uno de ellos.

#### *El método directo*

Este método es un tanto obvio, pues consiste simplemente en dar valores a la variable  $s$  y graficar el módulo de  $|H(s)|$  y la fase de  $(H(s))$ . Recordemos que la variable  $s = \sigma + j\omega$ ; donde  $\sigma$  es un factor de amortiguación y  $\omega = 2\pi f$  es la frecuencia angular, y  $f$  es la frecuencia. Habrá que darle valores a  $f$  manteniendo  $\sigma$  como parámetro. (ver figura 6.8). Este tipo de gráficos se realizan en el dominio de la frecuencia simple, es decir para excitaciones senoidales, como veíamos en el capítulo 4. Por lo tanto sólo se dan valores a  $\omega$ , y  $\sigma$  desaparece.

#### *El método del plano $s$*

Existen otros métodos que permiten visualizar rápidamente la respuesta del sistema y detectar sus puntos críticos (ceros y polos). Una forma rápida es dibujar sobre el plano  $s$  ( $s = \sigma + j\omega$ ) los polos y ceros de la función. Sobre el eje  $j\omega$  se marca una frecuencia  $\omega^*$  particular, a la cual se desea calcular su ganancia (módulo) y fase. Se dibuja un vector entre los ceros y polos de la función y el punto  $\omega^*$ . La longitud del vector es el módulo para ese polo o cero y el ángulo que forma con la horizontal es la fase de cada polo o cero (ver figura 6.17).

El módulo total será el producto del módulo de los ceros dividido el módulo de los polos y la fase total será la suma de las fases de los ceros menos las fases de los polos. Veamos un ejemplo. Supongamos que la función de transferencia del circuito es:

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 16}$$

Esta función puede factorizarse como:

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 16} = \frac{2(s-s_1)}{(s-s_2)(s-s_4)}$$

donde  $s_1 = 0$ ;  $s_2 = -2 + j\sqrt{3}$ ;  $s_4 = s_2^* = -2 - j\sqrt{3}$

El módulo y fase de  $H(s)$  será:

$$|H(s)| = \frac{|2(s - s_1)|}{|(s - s_2)(s - s_4)|} \quad (6.64)$$

$$\angle H(s) = \angle(s - s_1) - \angle(s - s_2) - \angle(s - s_4) = 90^\circ - \beta_1 - \beta_2$$

Gráficamente, marcamos los ceros con un pequeño círculo (en este caso  $s_1=0$ ), con cruces los polos, en este caso son dos polos complejos conjugados.  $\alpha$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son las fases del cero y los polos.

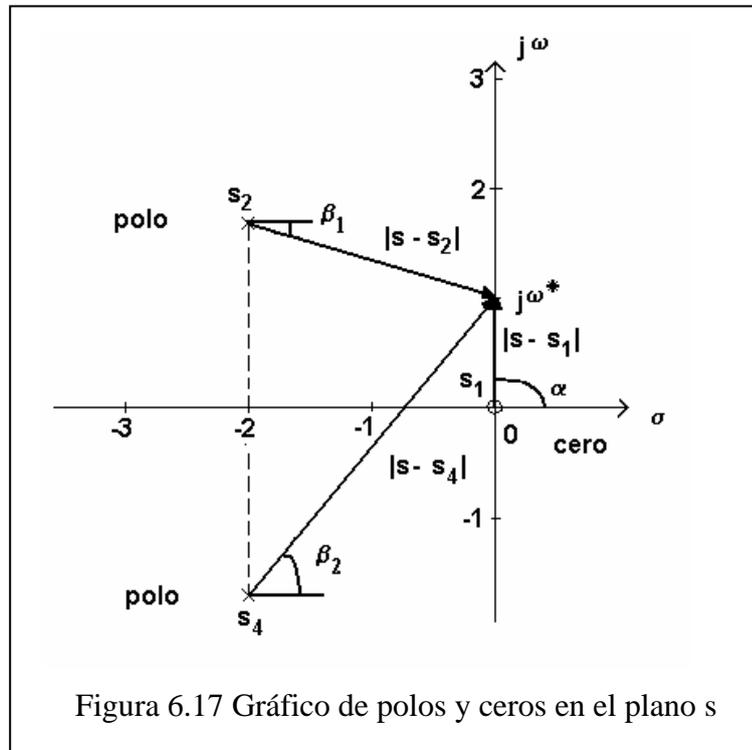


Figura 6.17 Gráfico de polos y ceros en el plano s

La distancia entre los polos y ceros y  $j\omega^*$  (es decir la longitud del vector) es el módulo de cada uno. Midiendo estas distancias y sus ángulos podemos calcular gráficamente la respuesta del circuito a esa frecuencia particular  $j\omega^*$ , de acuerdo la ecuación (6.64).

### 3.7.1 Gráficos logarítmicos de magnitud y fase

La función de transferencia  $|H(s)|$  es como vimos un número complejo, que se expresa en forma de módulo y fase:

$$H(s) = |H(s)| \times e^{j\phi(s)} \quad (6.65)$$

Si tomamos logaritmo natural a (6.65) queda:

$$\begin{aligned} \ln[T(s)] &= \ln|T(s)| + j\phi(s) \\ &= G + j\phi \end{aligned} \quad (6.66)$$

donde el logaritmo natural del módulo se lo denomina función ganancia  $G$  y  $\phi$  es la fase y se mide en radianes. Normalmente  $G$  se calcula en decibeles [dB] y su conversión será

$$G[\text{dB}] = 20 \log_{10} |T(s)|$$

$$G[\text{dB}] = 8.685 \times \ln |T(s)|; \quad \text{donde } 20 \log_{10}(e) = 8.685$$

Recordemos que los decibeles miden relaciones de salida versus entrada; esto es; 20 veces el logaritmo decimal de la relación entre la tensión de salida sobre la tensión (o corriente) de

entrada de un dispositivo, o en forma de potencias es 10 veces el logaritmo de la potencia de salida sobre la potencia de entrada:

$$1\text{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{V_s}{V_e} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{P_s}{P_e} \right)$$

La fase  $\phi$  se puede medir en radianes o en grados; su conversión será:

$$\phi[\text{grados}] = 57.3 \times \phi[\text{radianes}] ; \text{ donde } 57.3[\text{°/rad}] = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Una vez definidos las unidades de la ganancia y sus conversiones, volvamos a la graficación de la ecuación (6.65). Retomemos la (6.63):

$$H(s) = A \frac{(s - s_1)(s - s_3) \cdots (s - s_m)}{(s - s_2)(s - s_4) \cdots (s - s_n)} ; \text{ en general } m < n \quad (6.67)$$

y definamos los ceros y polos como:

$$s_1 = -\frac{1}{T_1} ; \quad s_2 = -\frac{1}{T_2} \quad s_3 = -\frac{1}{T_3} \quad \cdots$$

por lo tanto (6.67) se convierte en

$$H(s) = \frac{AT_2T_4 \cdots}{T_1T_3 \cdots} \times \frac{(1 + T_1s)(1 + T_3s) \cdots}{(1 + T_2s)(1 + T_4s) \cdots} \quad (6.68)$$

calculamos la función ganancia  $G$  (en dB) sobre (6.68), donde queda:

$$G = 20 \log_{10} \frac{AT_2T_4 \cdots}{T_1T_3 \cdots} + 20 \log_{10} |1 + T_1s| + \cdots - 20 \log_{10} |1 + T_2s| - \cdots \quad (6.69)$$

y su fase será:

$$\phi = 57.3 \angle(1 + T_1s) + \cdots - 57.3 \angle(1 + T_2s) - \cdots \quad (6.70)$$

vemos en (6.69) que la función ganancia está compuesto por un primer término que es el logaritmo del producto de varias constantes, y por lo tanto otra constante, más la suma o resta del 20 logaritmo decimal de los módulos  $|1 + T_i s|$ . De aquí se aprecian varios elementos interesantes: todos los términos son iguales en forma, sumándose los ceros y restándose los polos. Lo mismo ocurre en la fase; se suman las fases de los ceros y se restan las fases de los polos. Esta propiedad viene justamente del logaritmo, donde los productos se suman y los cocientes se restan. Lo más interesante de la forma logarítmica de la función ganancia es que su respuesta será una superposición de los efectos de cada polo o cero. Estudiando la forma de uno de ellos, sabremos graficar cualquier polo o cero. Veamos esto en detalle.

El método de los gráficos logarítmicos de ganancia en fase consiste en un dibujo aproximado que retiene los efectos más importantes de la función ganancia, es decir resalta aquellas frecuencias donde aparecen los polos y ceros de la función. Normalmente este tipo de gráficos se realizan en el dominio de la frecuencia simple, es decir hacemos  $s = j\omega$ . El gráfico consiste en encontrar dos asíntotas, la de baja frecuencia y la de alta frecuencia. La curva real será una curva que transitará entre una y otra asíntota.

### **Gráfico de un polo o cero simple**

La ganancia para un polo o cero (haciendo  $s = j\omega$ ) será :

$$G(\text{dB}) = 20 \log_{10} |1 + j\omega T| = 10 \log_{10} (1 + \omega^2 T^2)$$

- A) *Asíntota de baja frecuencia*: para valores bajos de  $\omega$ , la cantidad  $\omega^2 T^2$  es despreciable comparando con 1. Por lo tanto G es:

$$\omega^2 T^2 \ll 1$$

$$G = 10 \log_{10} = 0 \text{ dB}$$

Es decir la ganancia tiende a 0 a medida que la frecuencia tiende a cero.

- B) *Asíntota de alta frecuencia*: para valores altos de  $\omega$  la cantidad  $\omega^2 T^2$  es grande comparado con 1. por lo tanto

$$\omega^2 T^2 \gg 1$$

$$\begin{aligned} G &= 10 \log_{10} (\omega^2 T^2) \\ &= 20 \log_{10} (\omega T) \\ &= 20 \log_{10} T + 20 \log_{10} \omega \end{aligned}$$

Si consideramos la ganancia G como una recta

$$y = mx + b ; m = 20 ; x = \log_{10} \omega ; b = 20 \log_{10} T.$$

Si duplicamos la frecuencia:

$$\begin{aligned} \Delta G &= 20 \log_{10} 2\omega - 20 \log_{10} \omega \\ &= 20 [\log_{10} (2\omega/\omega)] \\ &= 20 \log_{10} 2 = 6 \text{ dB} \end{aligned}$$

Esto significa que la ganancia para frecuencias altas aumenta 6dB cada vez que se duplica la frecuencia, es decir, la asíntota tiene una pendiente de 6dB por octava.

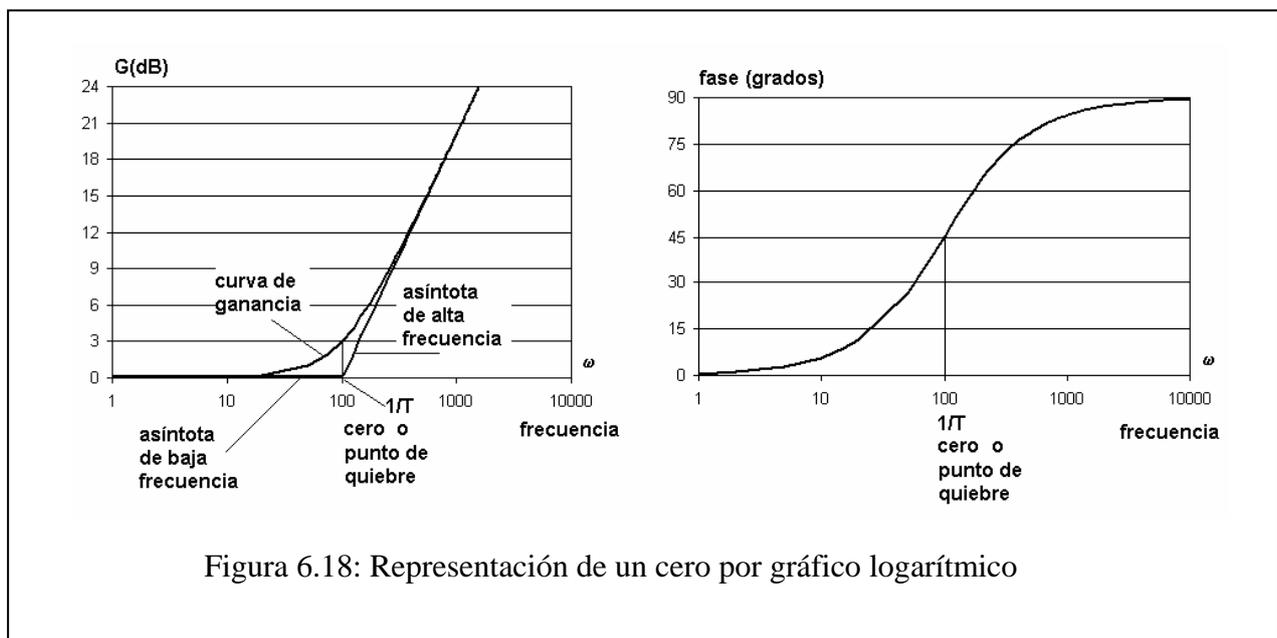


Figura 6.18: Representación de un cero por gráfico logarítmico

Esta pendiente también es de 20 dB por década.

- C) *Punto de quiebre*: la intersección de ambas asíntotas se produce en el punto de quiebre, esto es en el cero o el polo; la asíntota de alta frecuencia es cero:

$$G = 20 \log_{10} (\omega T) = 0 \quad \text{por lo tanto } \omega T = 1; \text{ y } \omega = 1/T$$

La ganancia y la fase de la curva real para el punto de quiebre será:

$$G = 20 \log_{10} |1 + j \omega T| = 20 \log_{10} |1 + j| = 10 \log_{10} 2 = 3 \text{ dB}$$

En la figura 6.18 hemos representado un cero, de haber sido un polo, la única diferencia es que la pendiente es negativa, es decir tiende a valores negativos de ganancia. La curva real de ganancia vemos que para el punto de quiebre está 3dB por encima del punto de quiebre.

La curva de fase vemos que para valores pequeños de frecuencia, la fase tiende a cero, en cambio para valores alto la frecuencia tiende a 90°. En el punto de quiebre la fase será:

$$\phi = 57.3 \angle(1 + j\omega T) = 57.3 \times \text{tg}^{-1} \frac{\omega T}{1} = 57.3 \times \text{tg}^{-1} \frac{1}{1} = 45^\circ$$

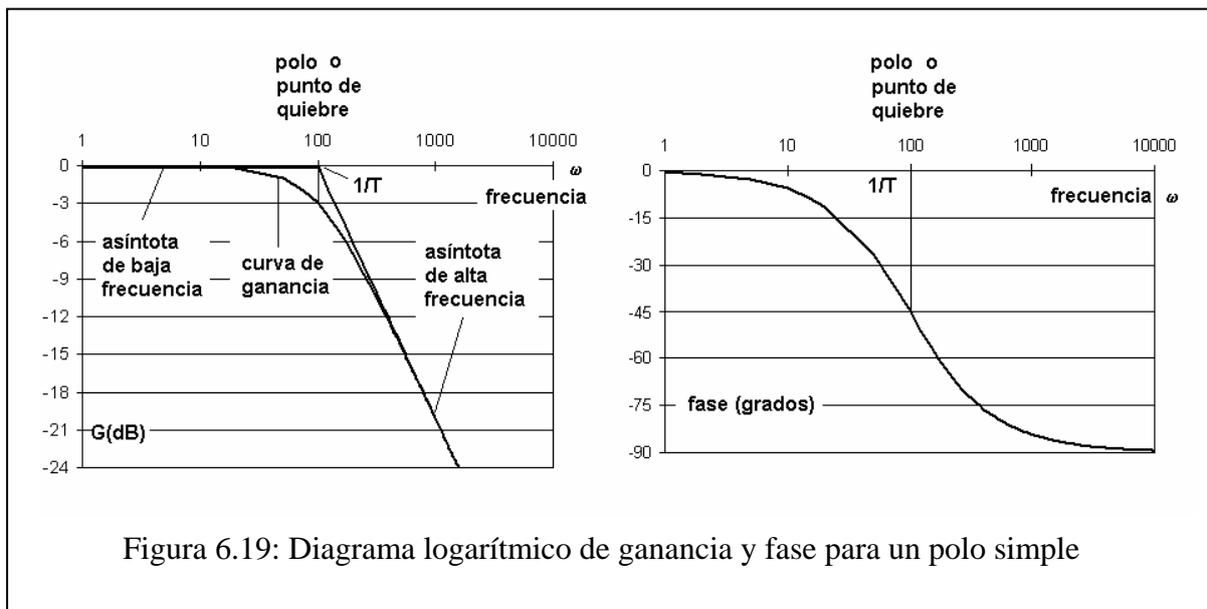


Figura 6.19: Diagrama logarítmico de ganancia y fase para un polo simple

En la figura 6.19 se grafica la ganancia y fase para un polo simple. Como ya se anticipó, la pendiente de la asíntota de alta frecuencia es negativa -6dB por octava o -20dB por década. La fase varía de 0 para las bajas frecuencias a -90° para las altas frecuencias. En el punto de quiebre la ganancia es ahora -3dB y su fase -45°.

Ejemplo: Resolvamos el siguiente caso, obteniendo la curva de logarítmica de ganancia y fase de la función H(s):

$$H(s) = \frac{5 \times s}{(s + 1)(s + 10)} \tag{6.71}$$

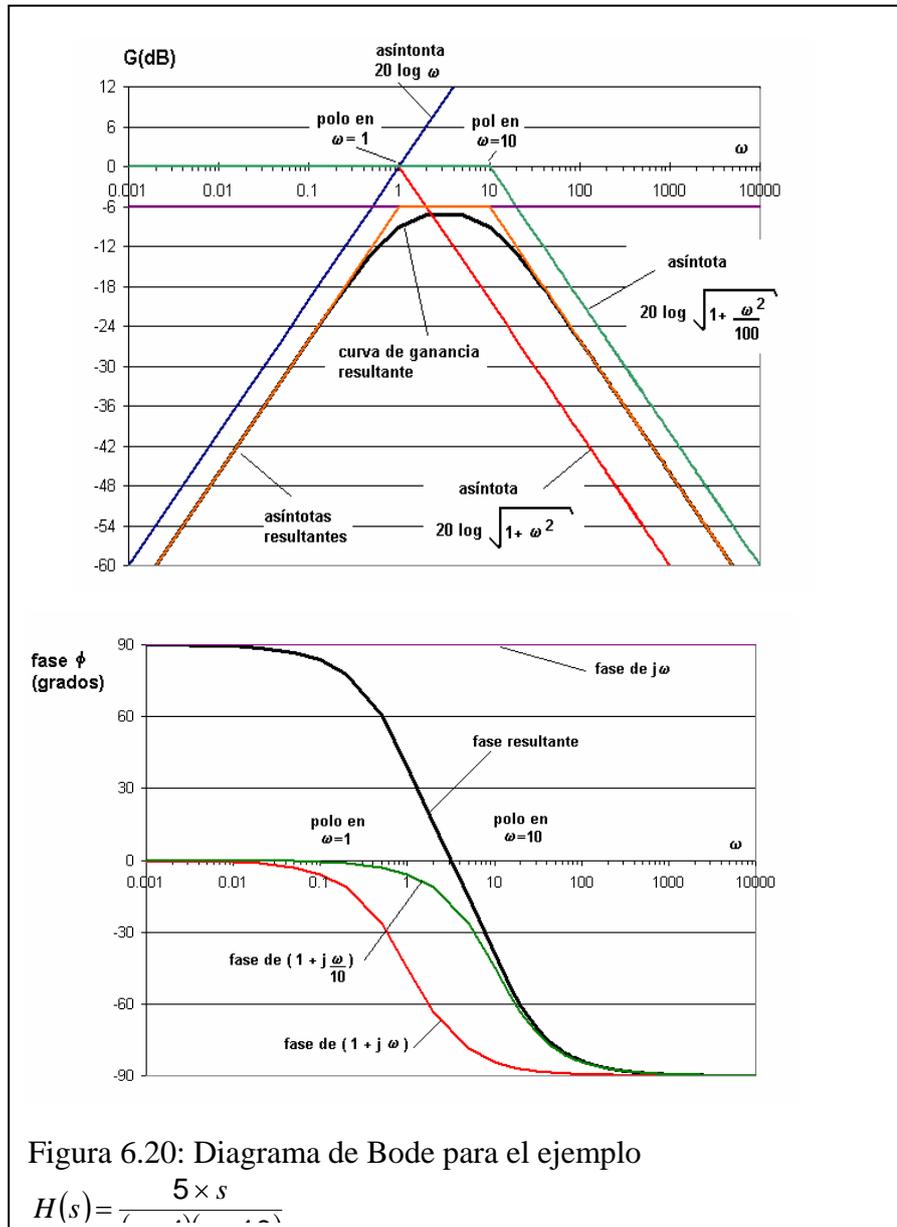
Primero debemos rescribir (6.71) de la forma de (6.68). En esta expresión tenemos un cero simple en  $s_1=0$ , un polo simple en  $s_2=1$  y otro polo simple en  $s_3=10$ :

$$T_2 = -\frac{1}{(-1)} = 1; \quad T_3 = -\frac{1}{(-10)} = \frac{1}{10}$$

$$H(s) = 5 \times T_2 \times T_3 \frac{s}{(1 + s)\left(1 + \frac{s}{10}\right)} = \frac{5}{10} \frac{s}{(1 + s)\left(1 + \frac{s}{10}\right)} = \frac{1}{2} \frac{s}{(1 + s)\left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

La función ganancia G[dB] se obtiene, cambiando  $s=j\omega$  y sacando 20 logaritmo del módulo:

$$G = \underbrace{20 \log_{10} \left( \frac{1}{2} \right)}_{\text{constante } -6\text{dB}} + \underbrace{20 \log_{10} \omega}_{\text{recta de } 6\text{dB/octava}} - \underbrace{20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2}}_{\text{polo con P. quiebre en } \omega = 1} - \underbrace{20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^2}}}_{\text{polo con P. quiebre en } \omega = 10}$$



La función fase será (figura 6.20 parte inferior):

$$\phi = 90^\circ - \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

**Polo o cero múltiple**

La ganancia para un polo o cero múltiple se resuelve de igual manera que los polos o ceros simples. O bien se consideran como dos o más polos o ceros superpuestos, o bien se calcula la pendiente de la asíntota de alta frecuencia multiplicando la pendiente de polo o cero simple por el orden del polo o cero múltiple. Por ejemplo si el polo es doble, entonces la pendiente de la asíntota será  $-6\text{dB/oct} \times 2 = 12 \text{ dB por octava}$ ; o  $-20\text{dB/dec} \times 2 = 40 \text{ dB por década}$ . De igual forma la fase de un polo múltiple será un múltiplo de la fase de los polos o ceros

simples. Así un polo doble tendrá una fase que varíe de  $0^\circ$  para las bajas frecuencias a  $-90^\circ \times 2 = 180^\circ$  para las frecuencias altas. En el punto de quiebre la fase será de  $-45^\circ \times 2 = -90^\circ$ .

***Polo o cero complejo conjugado.***

Las polos o ceros de la función de transferencia  $H(s)$  pueden ser pares de complejos conjugados:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{(s-s_1)(s-s_3)\cdots(s-s_m)}{(s-s_2)(s-s_2^*)(s-s_4)\cdots(s-s_n)}; \quad \text{en general } m < n \quad (6.72)$$

suponiendo que  $s_2$  y  $s_2^*$  son raíces complejas conjugadas, el producto de ambos será:

$$(s-s_2)(s-s_2^*) = s^2 + as + \frac{1}{T^2} = \frac{1}{T^2}(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1) \quad (6.73)$$

Por ejemplo  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$ ;

El polinomio del denominador tiene dos raíces complejas conjugadas en  $(s=-1+2j)$  y  $s^*=-1-2j$ , Para este caso  $a=2$  y  $1/T^2=5$ , entonces se puede describir como:

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \zeta = \frac{a}{2T} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

La expresión (6.73) también puede expresarse como:

$$s^2 + as + \frac{1}{T^2} = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 \quad (6.74)$$

siendo  $\alpha$  el factor de amortiguación y  $\omega_0$  la frecuencia natural que veíamos en un circuito de segundo orden RLC. Por lo tanto, comparando (6.73) y (6.74):

$$T = \frac{1}{\omega_0} \quad \zeta = \frac{\alpha}{\omega_0}; \quad \text{es decir el factor nuevamente expresa la frecuencia del polo, que es la}$$

frecuencia natural de un circuito RLC,  $\zeta$  es el *factor de amortiguación normalizado* por la frecuencia natural. De allí que

$\alpha > \omega_0$  entonces  $\zeta > 1$  la solución es sobre amortiguada: las raíces son reales y distintas.

$\alpha = \omega_0$  entonces  $\zeta = 1$  la solución es críticamente amortiguada; las raíces son reales y múltiples.

$\alpha < \omega_0$  entonces  $\zeta < 1$  la solución es sub amortiguada; las raíces son compleja conjugadas.

Este último es el caso que estamos tratando. Para calcular los gráficos de ganancia en dB para los términos cuadrático complejos conjugados, usamos la expresión  $(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)$ , y hacemos  $s = j\omega$ :

$$G(\text{dB}) = 20 \log_{10} |(1 - \omega^2 T^2 + j2\zeta T\omega)|$$

$$G(\text{dB}) = 20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2} \quad (6.75)$$

Nuevamente debemos definir, una asíntota de baja frecuencia, una asíntota de alta frecuencia y un punto de quiebre. Para frecuencias bajas tendremos  $1 \gg \omega$ , por lo tanto la *asíntota de baja frecuencia* es:

$$G(\text{dB}) = 20 \log_{10}|1| = 0 \text{ dB}$$

Para altas frecuencias el término  $\omega^2 T^2$  es mayor que los otros términos de (6.75):

$$G(\text{dB}) = 20 \log_{10} \sqrt{(\omega^2 T^2)^2} = 20 \log_{10} (\omega^2 T^2) = 40 \log_{10} \omega T$$

Esto significa que la *asíntota de alta frecuencia* tiene una pendiente de 40 dB por década o 12 dB/octava, de igual forma que los polos dobles. Si se trata de un par de polos complejos conjugados, la pendiente será  $-40$  dB/dec., en cambio si son un par de ceros complejos conjugados, la pendiente de la asíntota de alta frecuencia será  $+40$  dB/dec.

El *punto de quiebre*, igual que en los anteriores casos es  $\omega = \frac{1}{T}$

La diferencia entre el polo (o cero) doble, y el polo (o cero) complejo conjugado, está en que el trazado de la curva real dependerá del factor de amortiguación  $\zeta$ . Para el punto de quiebre, la ganancia será, usando (6.75):

$$G(\text{dB}) = 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{T^2} T^2\right)^2 + \left(2\zeta T \frac{1}{T}\right)^2} = 20 \log_{10} 2\zeta$$

Esto significa que el valor de la curva para el punto de quiebre dependerá del valor de amortiguación elegida.

La fase se calcula como:

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{2\omega\zeta T}{1 - \omega^2 T^2} \quad (6.76)$$

En general la fase para frecuencias bajas tenderá a  $0^\circ$  y para frecuencias altas tenderá a  $180^\circ$ , como los polos (o ceros) dobles. En cambio para el punto de quiebre la fase será de  $90^\circ$ :

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{2\zeta T}{1-1} = 90^\circ$$

Pero dependiendo de los valores del factor de amortiguación  $\zeta$  el cambio de fase de  $0$  a  $180^\circ$  será más abrupto o más suave. Para  $\zeta=0$  el cambio se realiza justamente en el punto de quiebre siguiendo una función escalón.

En conclusión, la ventaja de este método es proveer una idea rápida y general del comportamiento de la ganancia y fase de un circuito en función de la frecuencia, ya que los puntos singulares (polos o ceros) quedan perfectamente determinados como puntos de quiebre. Este método permite analizar la curva de ganancia usando solamente las asíntotas. Sin embargo la desventaja de este método se presenta para los polos complejos conjugados; que para valores de  $\zeta$  muy pequeños (entre  $0$  y  $0.2$  aproximadamente) la curva real se aparta mucho de las asíntotas, en especial cerca del punto de quiebre (ver figura 6.21).

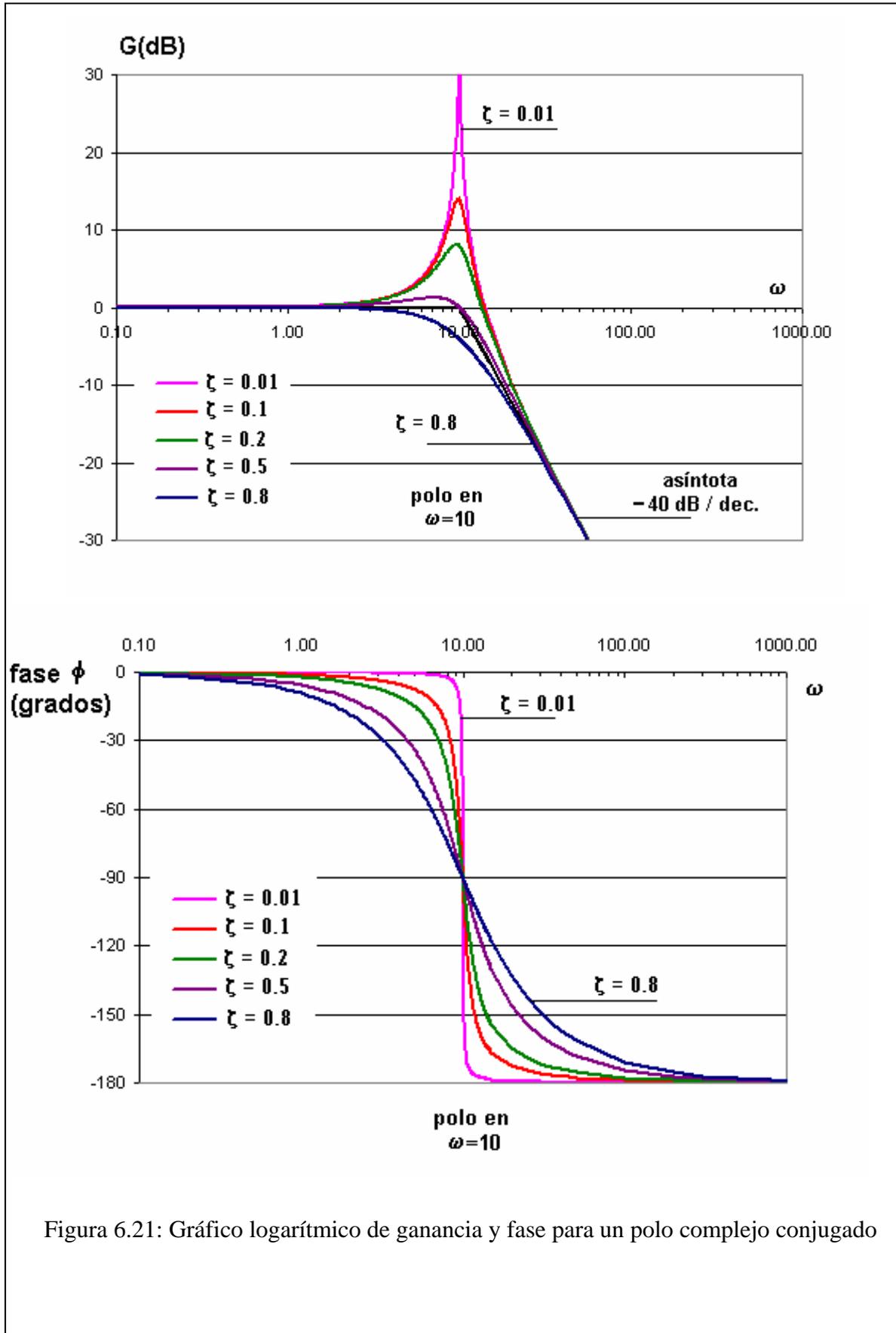


Figura 6.21: Gráfico logarítmico de ganancia y fase para un polo complejo conjugado