## *Control estadístico de los procesos*

Denominamos proceso a una serie de transformaciones destinadas a transformar entradas (materias primas, insumos, información, etc) en salidas (productos elaborados, informe de ingeniería, valor informado de una serie de mediciones) mediante una serie de transformaciones. Estas salidas tienen un valor agregado que les confieren un valor superior a cualquiera de las entradas.

Todos los procesos deben ser controlado en tiempo real, es decir en el mismo momento en que se realizan las transformaciones, con el objetivo de disminuir los productos fuera de especificación, eliminar los retrabados, mejorar la productividad y disminuir la variabilidad entre los productos obtenidos.

Para controlar los procesos en tiempo real, la herramienta de base estadística, más significativa, es la carta de control.

## *Fundamentos estadísticos de la carta de control*.

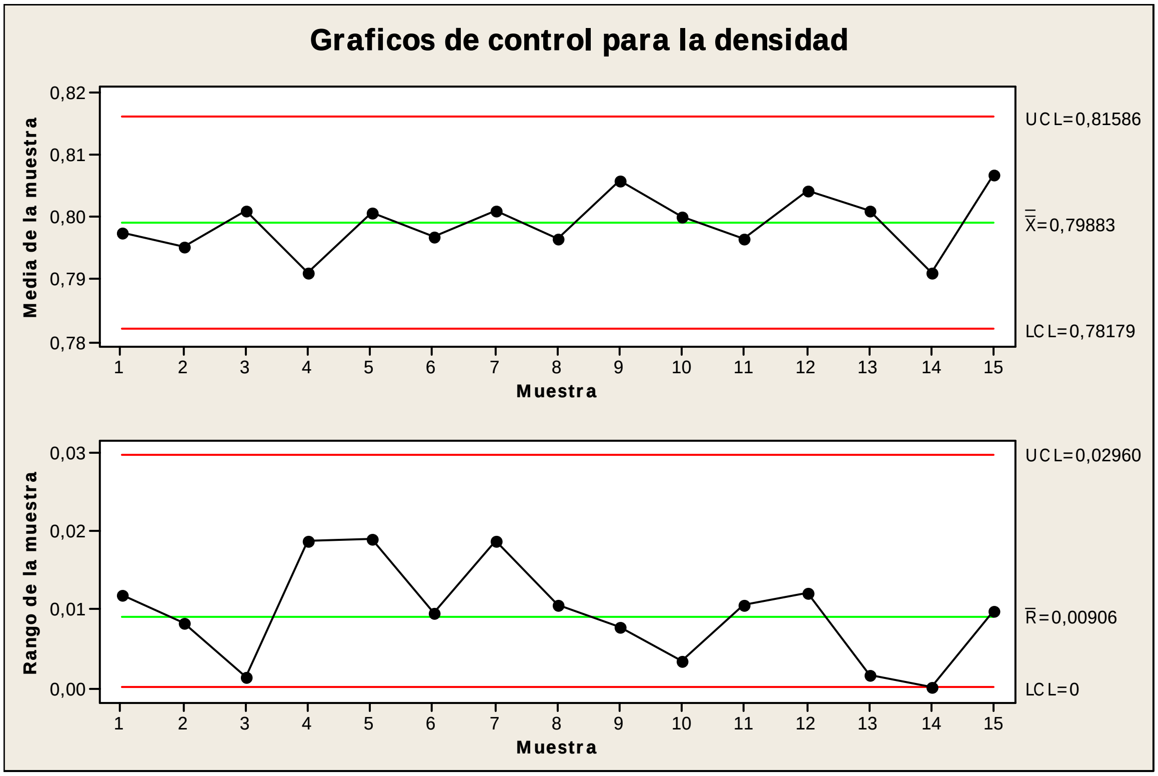
Las cartas de control constituyen la herramienta más potente para controlar en tiempo real un proceso, es decir que es un control en línea, en el mismo momento que se están desarrollando los procesos. Los procesos pueden ser productivos, mediciones y ensayos en laboratorios, desarrollos de consultoría o administrativos.

La carta de control posee tres usos fundamentales:

- Reducción de la variabilidad del proceso.
- Monitoreo y vigilancia del proceso.
- Estimación de los parámetros del proceso.

Una carta de control típica consta de tres líneas. Posee una línea central, que representa el valor promedio de la característica de calidad y que corresponde al estado bajo control. También se observan dos líneas horizontales, llamadas el límite superior de control y el límite inferior de control. Estos límites se eligen de manera tal que si el proceso se halla bajo control estadístico, casi todos los puntos muestrales se localizarán entre ellos. Los puntos muestrales se ubican en función del tiempo, es decir la carta de control es una serie de tiempo. Es costumbre unir los puntos muestrales de la carta de control con segmentos de línea, a fin de facilitar la visualización de la evolución con el tiempo de la secuencia de puntos.

Si todos los puntos graficados se hallan dentro de los límites de control y los mismos aparecen de forma aleatoria, se supone que el proceso se halla dentro de control y no es necesaria ninguna acción correctiva. Decimos que los puntos aparecen en forma aleatoria cuando se ubican uno abajo, seguido de otro arriba de la línea central o viceversa.




Si se localiza un punto fuera de los límites de control, se considera que el proceso se halla fuera de control y esta situación amerita una investigación para hallar la causa atribuible o asignable que produce esta salida de control. Corregida la causa se supone que el proceso volverá a estar dentro de control.

Incluso si todos los puntos graficados se hallan dentro de los límites de control pero no se comportan de manera aleatoria, esta situación puede ser el indicio de que el proceso se halla fuera de control estadístico.

En la carta que se observa arriba, se ven al comienzo puntos consecutivos por debajo de la línea central, lo cual es una indicación de un proceso fuera de control. A partir de la muestra 24, se observa una corrida ascendente, lo cual nos lleva a pensar también en una causa atribuible.

Si la característica de calidad que estamos monitoreando tiene una distribución de probabilidad normal, la probabilidad de que aparezca un punto por debajo o por arriba de la línea central, es 0,5. La probabilidad de que aparezcan cinco puntos consecutivos por encima o por debajo de la línea central es (asumiendo que son independientes) $(0,5)^5$ ; lo que constituye una probabilidad muy baja y no puede ser atribuido al azar. De la misma manera, si de los últimos 20 puntos, aparecen 18 por encima de la línea central aunque debajo del límite superior de control y los otros dos por debajo de la línea central aunque encima del limite inferior de control, esta situación despertaría grandes sospechas de que existe alguna causa asignable que produce éste comportamiento, es decir que no es atribuible al azar.

Existe una estrecha relación entre las cartas de control y una prueba de hipótesis. Al igual que en las pruebas de hipótesis, en las cartas de control pueden cometerse dos tipos de errores. Un error tipo I, que es concluir que el proceso está fuera de control cuando en realidad está dentro de control y un error tipo II que es concluir que el proceso esta dentro de control cuando en realidad está fuera de control.

Para ilustrar los conceptos anteriores, imaginemos un proceso donde se controla la cantidad de un detergente sólido. El contenido se verifica por diferencias de pesadas. El proceso está bajo control con un peso de 800 g y una desviación estándar de 1,1 g. Para controlar el proceso se extraen 5 envases cada hora, se calcula el promedio del peso de los cinco envases y se grafica ese valor en la carta de control. La desviación estándar de la media muestral $\left(\bar{x}\right)$ es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,1}{\sqrt{5}} = 0,49$$

Por lo tanto, si el proceso se halla bajo control con un peso de 800 g, entonces al aplicar el teorema central del límite, dado que la variable aleatoria peso tiene una distribución normal, se espera que 100(1-α)% de los pesos medios destrales se localicen entre $800 + Z_{\alpha/2}(0,49)$ y $800 - Z_{\alpha/2}(0,49)$

Si se escoge arbitrariamente el valor 3 para la constante $Z_{\alpha/2}$, los límites de control son:

$$LSC = 800 + 3(0,49) = 801,47$$

y

$$LIC = 800 - 3(0,49) = 798,53$$

A este diseño se lo llama comúnmente límites de control tres sigmas.

Obsérvese que elegir los límites de control es equivalente a establecer la región crítica para probar la hipótesis

$$H_0 : \mu = 800$$

$$H_1 : \mu \neq 800$$

La carta de control prueba esta hipótesis cada vez que se grafica un punto.

Puede darse un modelo general para una carta de control. Si w es un estadístico muestral que mide alguna característica de calidad de interés y suponemos que la media de w es $\mu_w$ y que la desviación estándar de w es $\sigma_w$, entonces la LC, el LSC y el LIC son:

$$LSC = \mu_W + L.\sigma_W$$
$$LC = \mu_w$$
$$LIC = \mu_W - L.\sigma_W$$

Donde L es la distancia de los límites de control a la línea central, expresada en unidades de desviación estándar. El doctor Walter Shewhart fue el primero en proponer esta teoría general de las cartas de control y las cartas de control desarrolladas según estos principios llevan el nombre de cartas de control de Shewhart.

### *Errores que pueden cometerse en una carta de control*

Dado que una carta de control es una prueba de hipótesis visual, en ella pueden cometerse los dos tipos de errores.

Cuando el proceso está dentro de control existe una pequeña probabilidad de que un punto caiga fuera de los límites. En este caso consideraríamos que el proceso está fuera de control cuando en realidad está dentro de control. Acá estaríamos cometiendo un error tipo I, es decir rechazar la hipótesis nula, cuando es verdadera. Este error también recibe el nombre de riesgo del productor, ya que rechazaríamos el producto cuando en realidad éste está dentro de especificaciones.

También puede ocurrir que se produzca algún cambio en la media del proceso. En nuestro ejemplo del detergente puede ser que en un determinado momento la media del proceso no sea 800 g sino otro valor mayor o menor. Supongamos que el nuevo valor de la media del peso es 798 g. Frente a este cambio en el proceso, nos gustaría advertirlo lo antes posible, para modificar las variables del proceso y volver a los 800 g de media. Sin embargo puede ocurrir que el peso promedio de la muestra que sacamos, nos de un valor que esté dentro de los limites de control. En este caso aceptaríamos la hipótesis nula de que μ= 800 g, con lo que estaríamos cometiendo un error tipo II, es decir aceptar la Hipótesis nula cuando esta es falsa.

Este tipo de error también se denomina riesgo del consumidor, ya que quien compra el producto, adquiere algo que en general no cumple con las especificaciones.

### *Clasificación de las cartas de control*

Pueden clasificarse de dos tipos generales. Si la característica de calidad puede medirse y expresase como un número en una escala de medición continua, suele llamársele una variable. En tales casos, es conveniente describir la característica de calidad con una medición de tendencia central y una medida de variabilidad. La carta $\bar{x}$ es la carta de uso más común para controlar la tendencia central, mientras que las cartas basadas en el rango muestral o en la desviación estándar muestral, son las más adecuadas para controlar la variabilidad.

Muchas características de calidad no se miden en una escala continua o ni siquiera en una escala cuantitativa. En estos casos cada unidad del producto puede clasificarse como conforme o disconforme, según cumpla o no con ciertas especificaciones técnicas establecidas. También pueden contarse los defectos que posee cada unidad de producto. A las cartas de control para estas características de la calidad se les llama cartas de control de atributos.

### *Evaluación de una carta de control*

Una manera de evaluar una carta de control es con la longitud promedio de la corrida (ARL, por sus siglas en ingles). En esencia, la ARL, es el número promedio de puntos que deben graficarse antes de que un punto indique una condición de fuera de control. Como la distribución de probabilidad de la ARL es geométrica, para su cálculo utilizamos la media de esta distribución. Si las observaciones del proceso son independientes una de otra, entonces para cualquier carta de Shewhart, la ARL, puede calcularse como

$$ARL = \frac{1}{p}$$

Donde *p* es la probabilidad de ocurrencia de un éxito, considerando como éxito un punto fuera de los límites.

Como ejemplo, podemos considerar la carta de control tres sigmas. En esta carta p=0,0027, es la probabilidad de que un punto se localice fuera de los limites de control cuando el proceso está bajo control. Por lo tanto, la longitud promedio de la corrida cuando el proceso está bajo control (llamada $ARL_o$) es,

$$ARL_O = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}0027} = 370$$

Es decir, incluso si el proceso se mantiene bajo control, se genera en promedio, una señal de fuera de control cada 370 muestras.

Esto también se denomina una falsa alarma, ya que al tener un punto fuera de los límites de control, se buscará una causa atribuible pero ésta no existe ya que el proceso se halla dentro de control.

El uso de la longitud promedio de corrida para describir el desempeño de las cartas de control ha sido objeto de críticas los últimos años. Las razones de ello surgen porque la distribución de la longitud de corrida para una carta de control de Shewhart es una distribución geométrica. Por consiguiente, hay dos preocupaciones con la ARL: 1) la desviación estándar de la longitud de la corrida es muy grande, y 2) la distribución geométrica tiene un sesgo muy pronunciado, por lo que la media de la distribución (la ARL) no es necesariamente un valor muy típico de la longitud de corrida.

Se puede calcular y llegar a la conclusión que con p=0,0027, la desviación estándar de la distribución geométrica es igual a su media. Como resultado, la $ARL_o$ real observada en la práctica para la carta de control $\bar{x}$ de Shewhart posiblemente presentará variaciones considerables. Además, para la distribución geométrica con p=0,0027, el décimo y el quincuagésimo percentil de la distribución son 38 y 256, respectivamente. Esto significa, que cerca del 10 % del tiempo la longitud de la corrida bajo control será menor o igual a 38 muestras, y que el 50 % de las veces será menor o igual a 256 muestras, Esto ocurre porque la distribución geométrica con p= 0,0027 tiene un sesgo a la derecha muy pronunciado.

También se puede calcular la longitud promedio de corrida cuando el proceso está fuera de control.

$$ARL_1 = \frac{1}{p}$$

donde $p$ es la probabilidad de que se detecte el corrimiento de la media, en el caso de carta $\bar{x}$. Si $\beta$ representa la probabilidad de que no se detecte el cambio de la media del proceso, (1 - $\beta$ ) representa la probabilidad de que sí se detecte.
Por lo tanto

$$ARL_1 = \frac{1}{p} = \frac{1}{1-\beta}$$

Por ejemplo, si $\beta = 0{,}6$ , entonces $ARL_1 = \frac{1}{1-0{,}6} = 2{,}5$

Es decir que se necesitan en promedio 2,5 muestras para detectar el cambio en el proceso.

Su se considera que este valor es inaceptable porque se tiene demasiada producción fuera de especificaciones, se puede aumentar el tamaño de la muestra para tener un menor error tipo II.

***Reglas de sensibilización para cartas de control***

Es posible aplicar varias reglas para determinar si un proceso está fuera de control. Es decir que además que se presente un punto fuera de los límites, existen otros comportamientos que ameritan pensar en una salida de control.

Estas reglas se emplean para aumentar la sensibilidad de las cartas para detectar situaciones de fuera de control.
a) Un punto por fuera de los límites de control tres sigmas
b) dos de tres puntos consecutivos entre los límites dos y tres sigmas.
c) cinco puntos consecutivos por encima o por debajo de la línea central.
d) Seis puntos consecutivos que se incrementan o se decrementan de manera sostenida.
e) un patrón no aleatorio en los datos.

La desventaja de la aplicación de varias reglas de sensibilización está en el hecho de que cada una de éstas introduce un determinado error tipo I y se van potenciando una a otra. Para calcular el efecto total, se puede aplicar:

$$\alpha = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha)$$

Siempre que la totalidad de las k reglas de decisión sean independientes.

## CARTAS DE CONTROL PARA VARIABLES

### Introducción

Muchas características de calidad pueden expresarse en términos de una medición numérica. Por ejemplo el diámetro de un rodamiento, la viscosidad de un polímero o la concentración de un contaminante en la fabricación de un producto químico. A una característica de calidad susceptible de medición se le llama variable. Las cartas de control para variables son de uso generalizado.

Cuando se trata con una característica de calidad que es una variable, por lo general es conveniente monitorear tanto el valor medio de la característica de calidad como su variabilidad. El control del promedio se hace con la carta de media o carta $\bar{x}$. La variabilidad del proceso puede monitorearse con una carta de control para la desviación estándar, llamada carta S o bien con una carta de control para el rango, llamada carta R. La carta R es adecuada cuando los tamaños de la muestra son iguales o menores que 7. En otro caso, pierde eficiencia y se usa la carta S.

### Cartas de control para $\bar{x}$ y R

Supongamos que una característica de calidad tiene una distribución normal con media $\mu$ y desviación estándar $\sigma$, donde ambas son conocidas. Si $x_1,\ x_2,\dots x_n$ es una muestra de tamaño *n*, entonces el promedio de esta muestra es

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n}$$

A partir del Teorema Central del Límite, se conoce que $\bar{x}$ sigue una distribución normal con media $\mu$ y desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Además la probabilidad es de $1-\alpha$ para que cualquier media muestral se localice entre

$$\mu + Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}} = \mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (2.1)$$

y

$$\mu - Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}} = \mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (2.2)$$

Por lo tanto, si $\mu$ y $\sigma$ son conocidas, las ecuaciones 2.1 y 2.2 podrían usarse como límites de control superior e inferior en una carta de control para las medias muestrales. Se acostumbra sustituir $Z_{\alpha/2}$ por el valor 3, a fin de trabajar con límites tres sigmas. Si la media de una muestra se localiza fuera de estos limites, se trata de un indicio de que la media del proceso ha dejado de ser igual a $\mu$.

En la práctica generalmente no se conocen los valores de $\mu$ y $\sigma$. Por lo tanto, deben estimarse a partir de la muestra o subgrupos preliminares tomados cuando se considera que el proceso está bajo control. En general estas estimaciones deben basarse en al menos 20 0 25 muestras.

Supongamos que contamos con *m* muestras, cada una de las cuales tiene el mismo tamaño muestral *n* .Sean $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ... \bar{x}_m$ los promedios de cada muestra. Entonces el mejor estimador de $\mu$, el promedio de la población, es el gran promedio, $\bar{\bar{x}}$.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ...\bar{x}m}{m}$$

Por lo tanto $\bar{\bar{x}}$ se usará como la línea central de la carta $\bar{x}$

Para construir los límites de control, es necesaria una estimación de la desviación estándar $\sigma$. Esto puede hacerse a partir de las desviaciones estándar o bien de los rangos de las muestras. Cuando los tamaños muestrales son menores que 8, el método del rango proporciona una buena estimación. Para tamaños muestrales mayores que 8, se reemplazará por el método de las desviaciones estándar.

Si $x_1, x_2, ...x_n$ es una muestra de tamaño *n,* entonces el rango de la muestra es la diferencia entre las observaciones menor y mayor; es decir

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Sean $R_1, R_2, ...R_m$ los rangos de las *m* muestras. El rango promedio es:

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + ...R_m}{m}$$

Existe una relación bien conocida entre el rango de una muestra y la desviación estándar de esa distribución. A la variable aleatoria $W = R/\sigma$ se le llama rango relativo. Los parámetros de la distribución de *W* son función del tamaño de la muestra. La media de *W* es $d_2$, que es una constante que depende del tamaño de la muestra. Por lo tanto un estimador de $\sigma$ es $\hat{\sigma} = R/d_2$. Si $\overline{R}$ es el rango promedio de las m muestras preliminares, puede usarse

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$$

para estimar $\sigma$. Se trata de un estimador insesgado de $\sigma$.
Nota: se dice que un estimador es insesgado cuando la esperanza del mismo coincide con el parámetro que desea estimar

Podemos calcular los límites de control como:

$$LSC = \overline{\overline{x}} + 3\sigma_{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} + 3\frac{\overline{R}}{d_2\sqrt{n}}$$

$$LIC = \overline{\overline{x}} - 3\sigma_{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} - 3\frac{\overline{R}}{d_2\sqrt{n}}$$

Si se define

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

La expresión de los límites y la línea central queda

$$
\begin{aligned}
LSC &= \overline{\overline{x}} + A_2 \overline{R} \\
LC &= \overline{\overline{x}} \qquad (2.3) \\
LIC &= \overline{\overline{x}} - A_2 \overline{R}
\end{aligned}
$$

**Límites de control de la carta R**

La línea central de la carta R es el rango medio $\overline{R}$.

El Límite Superior de Control es:

$$LSC = \overline{R} + 3\sigma_R$$

Se sabe que $\sigma_R = d_3\sigma$ donde $d_3$ es una constante que depende del tamaño de la muestra

$$LSC = \overline{R} + 3\sigma_R = \overline{R} + 3d_3\sigma = \overline{R} + 3d_3\frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R}\left(1 + \frac{3d_3}{d_2}\right)$$

Si llamamos $D_4 = 1 + \frac{3d_3}{d_2}$

$LSC = \overline{R}D_4$

Para el Limite Inferior de Control

$$LIC = \overline{R} - 3\sigma_R = \overline{R} - 3d_3\sigma = \overline{R} - 3d_3\frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R}\left(1 - \frac{3d_3}{d_2}\right)$$

Si hacemos $D_3 = 1 - \frac{3d_3}{d_2}$

$LIC = \overline{R}D_3$

Resumiendo:

$$
\begin{aligned}
LSC &= \overline{R}D_4 \\
LC &= \overline{R} \qquad (2.4) \\
LIC &= \overline{R}D_3
\end{aligned}
$$

***Límites de control de prueba***

Cuando se utilizan muestras preliminares para construir las cartas de control $\bar{x}$ y *R*, se acostumbra tratar los límites de control obtenidos con las ecuaciones 2.3 y 2.4 como **límites de control de prueba.** Permiten determinar si el proceso se encontraba bajo control cuando se seleccionaron la m muestras iniciales. Para probar la hipótesis del control pasado, se grafican los valores de $\bar{x}$ y R de cada muestra en las cartas y se analiza la representación resultante. Si todos los puntos se localizan dentro de los límites de control y no es evidente ningún comportamiento aleatorio, se concluye entonces que el proceso se encontraba bajo control en el pasado y los límites de control de prueba son apropiados para controlar la producción actual o futura.

***Uno o más de los valores de $\bar{x}$ o de R se localizan fuera de los límites***

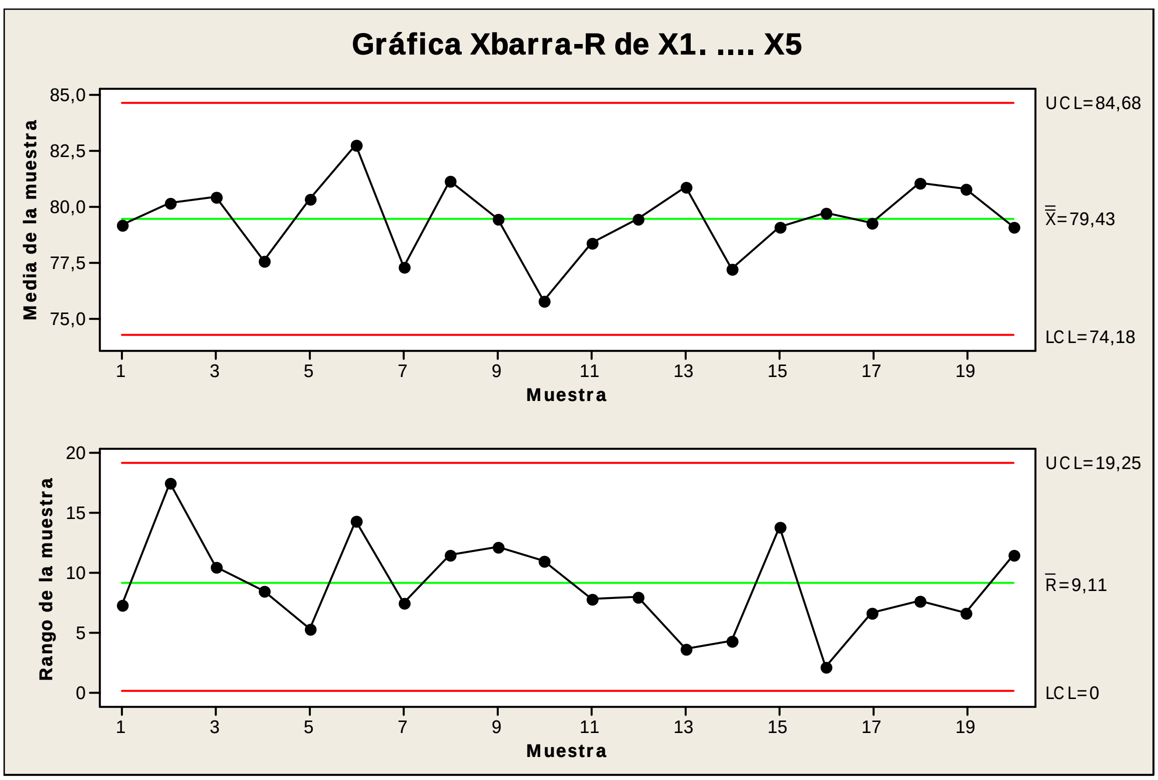
Para cado uno de los puntos que quedan fuera de los límites de control es necesario buscar una causa atribuible o asignable. Si se encuentra la causa asignable, se soluciona y se supone que no va a producirse en el futuro. Luego hay que recalcular los límites de control y observar si otro punto ha salido de control ya que generalmente luego de eliminar un punto fuera de control, los límites serán más estrechos. Si otro punto sale de control, se vuelve a analizar si hay una causa asignable. Esto se realiza hasta que todos lo puntos estén dentro de control. Si no se halla una causa asignable, el punto se descarta y los límites de control se recalculan hasta que todos los puntos estén dentro control.

Ocasionalmente cuando los valores muestrales iniciales de $\bar{x}$ y R se grafican contra los limites de control de prueba, muchos puntos se localizarán fuera de control. En este caso no es muy práctico buscar las causas asignables de todos los puntos fuera de los límites. En este caso es más lógico buscar un patrón de comportamiento que esté generando esta salida masiva de control. La eliminación de este problema da como resultado una mejora notable en el proceso.

**Ejemplo:**
Unas piezas de polipropileno manufacturadas por un proceso de moldeo de inyección se someten a una prueba de resistencia a la compresión. Se colectan 20 muestras de cinco partes cada una y las resistencias a la compresión (en psi) se presentan en la tabla siguiente:

| Mue. | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $\bar{x}_i$ | $R_i$ | $S_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 83,0 | 81,2 | 78,7 | 75,7 | 77,0 | 79,1 | 7,3 | 2,98948 |
| 2 | 88,6 | 78,3 | 78,8 | 71,0 | 84,2 | 80,2 | 17,6 | 6,64771 |
| 3 | 85,7 | 75,8 | 84,3 | 75,2 | 81,0 | 80,4 | 10,5 | 4,79218 |
| 4 | 80,8 | 74,4 | 82,5 | 74,1 | 75,7 | 77,5 | 8,4 | 3,88265 |
| 5 | 83,4 | 78,4 | 82,6 | 78,2 | 78,9 | 80,3 | 5,2 | 2,49399 |
| 6 | 75,3 | 79,9 | 87,3 | 89,7 | 81,8 | 82,8 | 14,4 | 5,77754 |
| 7 | 74,5 | 78,0 | 80,8 | 73,4 | 79,7 | 77,3 | 7,4 | 3,22289 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 79,2 | 84,4 | 81,5 | 86,0 | 74,5 | 81,1 | 11,5 | 4,53398 |
| 9 | 80,5 | 86,2 | 76,2 | 74,1 | 80,2 | 77,4 | 22,1 | 4,64790 |
| 10 | 75,7 | 75,2 | 71,1 | 82,1 | 74,3 | 75,7 | 11,0 | 4,01024 |
| 11 | 80,0 | 81,5 | 78,4 | 73,8 | 78,1 | 78,4 | 7,7 | 2,89016 |
| 12 | 80,6 | 81,8 | 79,3 | 73,8 | 81,7 | 79,4 | 8,0 | 3,31104 |
| 13 | 82,7 | 81,3 | 79,1 | 82,0 | 79,5 | 80,9 | 3,6 | 1,56589 |
| 14 | 79,2 | 74,9 | 78,6 | 77,7 | 75,3 | 77,1 | 4,3 | 1,94242 |
| 15 | 85,5 | 82,1 | 82,8 | 73,4 | 71,7 | 79,1 | 13,8 | 6,14207 |
| 16 | 78,8 | 79,6 | 80,2 | 79,1 | 80,8 | 79,7 | 2,0 | 0,81240 |
| 17 | 82,1 | 78,2 | 75,5 | 78,2 | 82,1 | 79,2 | 6,6 | 2,85079 |
| 18 | 84,5 | 76,9 | 83,5 | 81,2 | 79,2 | 81,1 | 7,6 | 3,10532 |
| 19 | 79,0 | 77,8 | 81,2 | 84,4 | 81,6 | 80,8 | 6,6 | 2,54951 |
| 20 | 84,5 | 73,1 | 78,6 | 78,7 | 80,6 | 79,1 | 11,4 | 4,11764 |




En la grafica de arriba, se observa que la línea central, es decir, $\bar{\bar{x}}$, es 79,43 psi. Los puntos graficados son los $\bar{x}_i$, que corresponden a las medias de cada una de las muestras.

El proceso parece estar dentro de control estadístico tanto en la media del mismo como en su variabilidad.

**Estimación de la capacidad del proceso**

A partir de los datos de la carta de control puede estimarse la llamada capacidad del proceso y la proporción de elementos defectuosos que este proceso puede producir. De la carta R podemos obtener el Rango medio y a partir de este estimar la desviación estándar de la población

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{9{,}11}{2{,}326} = 3{,}92 \qquad \bar{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{9{,}11}{2{,}326} = 3{,}92$$

El índice de capacidad del proceso se define como:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (2.1)$$

Los límites especificados por diseño son 88 y 70 psi

Para este caso $$Cp = \frac{88-70}{6.3{,}92} = 0{,}76$$

Generalmente se recomienda para la $C_p$ un valor de 1,33 o más, con la finalidad de no tener muchos elementos defectuosos en la población. El valor obtenido es muy bajo, con lo cual se debe trabajar sobre el proceso con la finalidad de disminuir la variabilidad y aumentar la capacidad del proceso.

**Proporción de elementos defectuosos**

También se puede calcular la proporción de elementos defectuosos, si se considera que la distribución de resistencia a la compresión de la pieza es normal. La media de la resistencia se obtiene de la carta X. Supongamos que μ= 9,43 psi y σ= 3,93 psi

Si p es la proporción de elementos fuera de especificación,

$$p = P(x \pi 70\,psi) + P(x \phi 88\,psi)$$
$$p = P(\frac{x-\mu}{\sigma} \pi \frac{70-79{,}43}{3{,}93}) + P(\frac{x-\mu}{\sigma} \phi \frac{88-79{,}43}{3{,}93})$$

$$p = P(Z \ \pi \ -2{,}4) + P(Z \ \phi \ 2{,}18)$$

$$p = 0{,}00714 + 0{,}0146 = 0{,}021$$

Cada 1000 piezas, 21 estarán fuera de especificación.

**Limites de control, limites de especificación y limites de tolerancia natural**

Se debe tener claro que no existe relación entre los límites de control de la carta $\bar{x}$ y R y los límites especificados del producto. Los primeros surgen de las condiciones reales del proceso y los segundos provienen de fuera del proceso (diseño, clientes, normas, costos, etc)

Los límites de tolerancia natural son los límites determinados por 3σ arriba y debajo de la media del proceso. Estos son los limites que se obtienen cuando el proceso ha manifestado encontrarse totalmente dentro de control y existe una buena estimación de σ. Los límites de control están regidos por la variabilidad de la media muestral ya que se hallan $3\sigma_{\bar{x}}$ arriba y abajo de la media del proceso.

Los límites de especificación nunca deben usarse en cartas de control. Únicamente cuando se grafiquen las mediciones individuales, integrantes de la muestra, se deberá colocar en la carta los límites especificados.

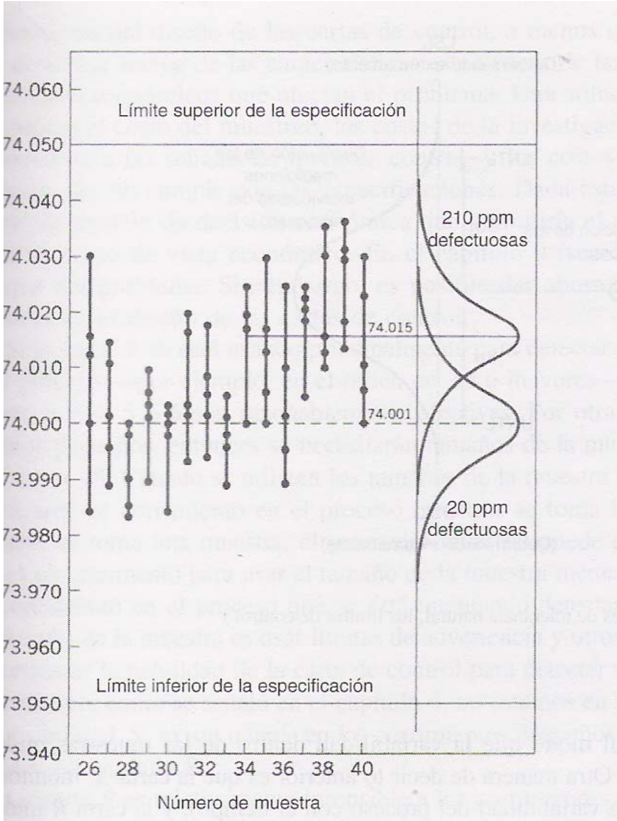



Diagrama de hileras para el control del diámetro de pistones. Se observa un aumento en la media del proceso, generándose dos distribuciones de salida.

### Cartas de control de $\bar{x}$ y S

Si bien la utilización de las cartas $\bar{x}$ y R se ha vuelto muy popular a través de los años, en ciertos procesos es deseable estimar la variabilidad del proceso a través de la desviación estándar del mismo, en vez de hacerlo más elementalmente a través del rango. En general se justifica el uso de las cartas $\bar{x}$ y S cuando:

a) el tamaño de las muestras es mayor que 7
b) el tamaño de la muestra es variable

Si $\sigma^2$ es la varianza desconocida de la distribución de probabilidad, entonces un estimador insesgado de élla es la varianza muestral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

Sin embargo, la desviación estándar muestral S no es un estimador insesgado de $\sigma$.

Cuando no hay un valor estándar dado para $\sigma$, entonces debe estimarse analizando datos pasados. Si se cuenta con muestras preliminares, cada una de tamaño *n*, y sea $S_i$, la desviación estándar de la i-ésima muestra. El promedio de las *m* (cantidad de muestras) desviaciones estándar es:

$$\overline{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i$$

La línea central de la carta es $\overline{S}$
El límite superior es: $\overline{S} + 3\sigma_{\overline{S}}$

La desviación estándar de $\bar{S}$ es $\sigma\sqrt{1-c_4^2}$ donde $c_4$ es una constante que depende del tamaño de la muestra.

Reemplazando en el límite superior de control queda

$$LSC = \overline{S} + 3\sigma_{\overline{S}} = \overline{S} + 3\sigma\sqrt{1-c_4^2}$$

Un estimador insesgado de $\sigma$ es $S/c_4$

$$LSC = \overline{S} + 3\sigma_{\overline{S}} = \overline{S} + 3\sigma\sqrt{1-c_4^2} = \overline{S} + 3\frac{\overline{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

$$LIC = \overline{S} - 3\sigma_{\overline{S}} = \overline{S} - 3\sigma\sqrt{1-c_4^2} = \overline{S} - 3\frac{\overline{S}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

Generalmente se definen las constantes

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

$$B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

Por lo tanto los parámetros de la carta *S* pueden escribirse como

$$\boxed{\begin{aligned} LSC &= B_4\overline{S} \\ LC &= \overline{S} \qquad \text{(2.5)} \\ LIC &= B_3\overline{S} \end{aligned}}$$

Para calcular los límites de control de la carta $\bar{x}$ hay que tener en cuenta que $S/c_4$ es un estimador insesgado de $\sigma$.

Línea central: $\bar{\bar{x}}$

$$LSC = \bar{\bar{x}} + 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}$$

Considerando la constante $A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$, los parámetros de la carta $\bar{x}$ quedan

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{S}$$
$$LC = \bar{\bar{x}}$$
$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{S}$$

(2.6)

| Muestra | $S_i$ |
|---|---|
| 1 | 2,98948 |
| 2 | 6,64771 |
| 3 | 4,79218 |
| 4 | 3,88265 |
| 5 | 2,49399 |
| 6 | 5,77754 |
| 7 | 3,22289 |
| 8 | 4,53398 |
| 9 | 4,64790 |
| 10 | 4,01024 |
| 11 | 2,89016 |
| 12 | 3,31104 |
| 13 | 1,56589 |
| 14 | 1,94242 |
| 15 | 6,14207 |
| 16 | 0,81240 |
| 17 | 2,85079 |
| 18 | 3,10532 |
| 19 | 2,54951 |
| 20 | 4,11764 |

$$\overline{S} = \frac{\sum Si}{m} = 3{,}68$$

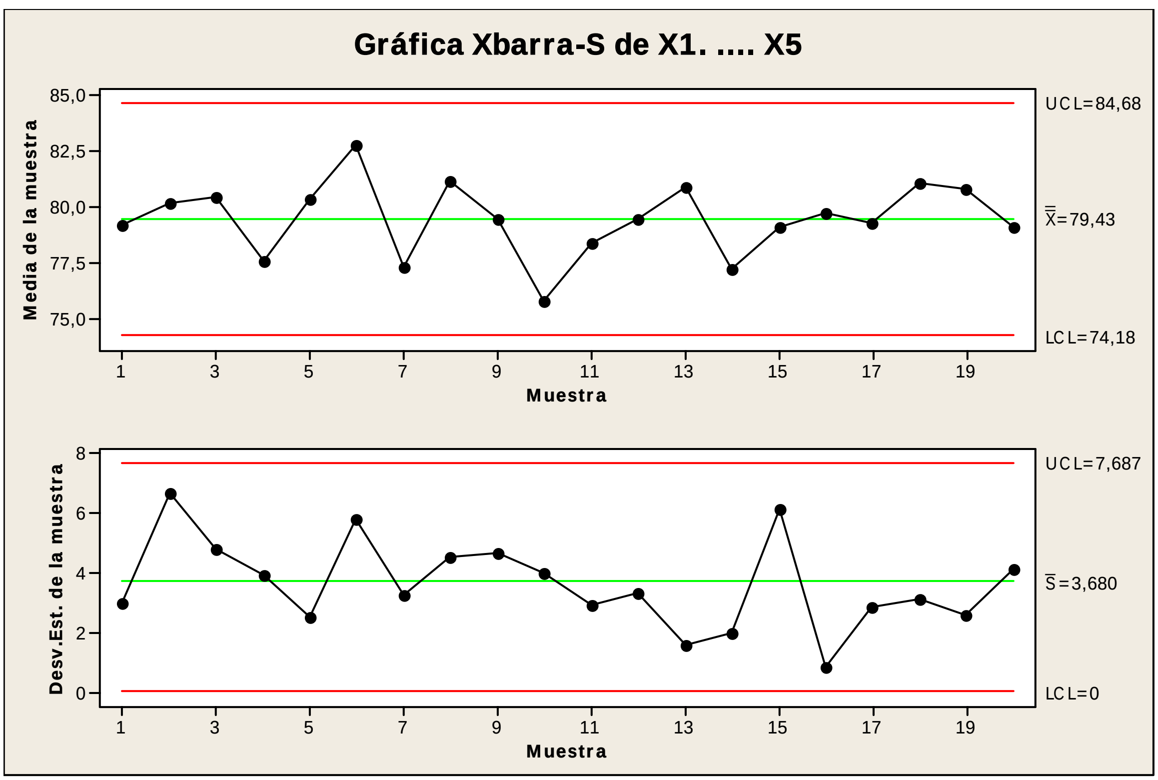
$$LSC = \overline{S}B_4 = 3{,}68.2{,}089 = 7{,}687$$

$$LIC = \overline{S}B_3 = 3{,}68.0 = 0$$

$$LSC = \overline{\overline{x}} + A_3\overline{S} = 79{,}43 + 1{,}427.3{,}68 = 84{,}68$$

$$LC = \overline{\overline{x}} = \frac{\sum x_i}{m} = 79{,}43$$

$$LIC = \overline{\overline{x}} - A_3\overline{S} = 79{,}43 - 1{,}427.3{,}68 = 74{,}18$$



Si se comparan los gráficos de R y de S se observará que los puntos se siguen unos a otros, lo que indica que el método del rango es efectivo cuando el tamaño muestral es pequeño.

### Fortalezas y debilidades de las cartas de control tres sigmas

Estas cartas de control fueron las primeras en diseñarse y se han mantenido en uso a través del tiempo por haber demostrado que pueden controlar un proceso en tiempo real y en forma bastante sencilla.

Deben usarse siempre que la característica de calidad tenga una distribución de probabilidad normal y que las muestras no presenten un comportamiento correlacionado, es decir que sean independientes unas de otras. Cualquier alejamiento de estas condiciones, provocará que las cartas de control tres sigmas presenten anomalías en su desarrollo.

Estas cartas son eficientes para detectar cambios en la media del orden de 1,5 $\sigma$ o más pero son ineficientes para detectar cambios en la media menores a esa magnitud. Por otro lado tienen un longitud media de corrida de 370, es decir que tendremos una falsa alarma cada 370 puntos graficados.

## Apéndice VI Factores para construir cartas de control para variables

| Observaciones en la muestra, | Carta de promedios | | | Carta para desviaciones estándar | | | | | | Carta para rangos | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Factores para los límites de control | | | Factores para la línea central | | Factores para los límites de control | | | | Factores para la línea central | | Factores para los límites de control | | | | |
| $n$ | $A$ | $A_2$ | $A_3$ | $c_4$ | $1/c_4$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $d_2$ | $1/d_2$ | $d_3$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
| 2 | 2.121 | 1.880 | 2.659 | 0.7979 | 1.2533 | 0 | 3.267 | 0 | 2.606 | 1.128 | 0.8865 | 0.853 | 0 | 3.686 | 0 | 3.267 |
| 3 | 1.732 | 1.023 | 1.954 | 0.8862 | 1.1284 | 0 | 2.568 | 0 | 2.276 | 1.693 | 0.5907 | 0.888 | 0 | 4.358 | 0 | 2.575 |
| 4 | 1.500 | 0.729 | 1.628 | 0.9213 | 1.0854 | 0 | 2.266 | 0 | 2.088 | 2.059 | 0.4857 | 0.880 | 0 | 4.698 | 0 | 2.282 |
| 5 | 1.342 | 0.577 | 1.427 | 0.9400 | 1.0638 | 0 | 2.089 | 0 | 1.964 | 2.326 | 0.4299 | 0.864 | 0 | 4.918 | 0 | 2.115 |
| 6 | 1.225 | 0.483 | 1.287 | 0.9515 | 1.0510 | 0.030 | 1.970 | 0.029 | 1.874 | 2.534 | 0.3946 | 0.848 | 0 | 5.078 | 0 | 2.004 |
| 7 | 1.134 | 0.419 | 1.182 | 0.9594 | 1.0423 | 0.118 | 1.882 | 0.113 | 1.806 | 2.704 | 0.3698 | 0.833 | 0.204 | 5.204 | 0.076 | 1.924 |
| 8 | 1.061 | 0.373 | 1.099 | 0.9650 | 1.0363 | 0.185 | 1.815 | 0.179 | 1.751 | 2.847 | 0.3512 | 0.820 | 0.388 | 5.306 | 0.136 | 1.864 |
| 9 | 1.000 | 0.337 | 1.032 | 0.9693 | 1.0317 | 0.239 | 1.761 | 0.232 | 1.707 | 2.970 | 0.3367 | 0.808 | 0.547 | 5.393 | 0.184 | 1.816 |
| 10 | 0.949 | 0.308 | 0.975 | 0.9727 | 1.0281 | 0.284 | 1.716 | 0.276 | 1.669 | 3.078 | 0.3249 | 0.797 | 0.687 | 5.469 | 0.223 | 1.777 |
| 11 | 0.905 | 0.285 | 0.927 | 0.9754 | 1.0252 | 0.321 | 1.679 | 0.313 | 1.637 | 3.173 | 0.3152 | 0.787 | 0.811 | 5.535 | 0.256 | 1.744 |
| 12 | 0.866 | 0.266 | 0.886 | 0.9776 | 1.0229 | 0.354 | 1.646 | 0.346 | 1.610 | 3.258 | 0.3069 | 0.778 | 0.922 | 5.594 | 0.283 | 1.717 |
| 13 | 0.832 | 0.249 | 0.850 | 0.9794 | 1.0210 | 0.382 | 1.618 | 0.374 | 1.585 | 3.336 | 0.2998 | 0.770 | 1.025 | 5.647 | 0.307 | 1.693 |
| 14 | 0.802 | 0.235 | 0.817 | 0.9810 | 1.0194 | 0.406 | 1.594 | 0.399 | 1.563 | 3.407 | 0.2935 | 0.763 | 1.118 | 5.696 | 0.328 | 1.672 |
| 15 | 0.775 | 0.223 | 0.789 | 0.9823 | 1.0180 | 0.428 | 1.572 | 0.421 | 1.544 | 3.472 | 0.2880 | 0.756 | 1.203 | 5.741 | 0.347 | 1.653 |
| 16 | 0.750 | 0.212 | 0.763 | 0.9835 | 1.0168 | 0.448 | 1.552 | 0.440 | 1.526 | 3.532 | 0.2831 | 0.750 | 1.282 | 5.782 | 0.363 | 1.637 |
| 17 | 0.728 | 0.203 | 0.739 | 0.9845 | 1.0157 | 0.466 | 1.534 | 0.458 | 1.511 | 3.588 | 0.2787 | 0.744 | 1.356 | 5.820 | 0.378 | 1.622 |
| 18 | 0.707 | 0.194 | 0.718 | 0.9854 | 1.0148 | 0.482 | 1.518 | 0.475 | 1.496 | 3.640 | 0.2747 | 0.739 | 1.424 | 5.856 | 0.391 | 1.608 |
| 19 | 0.688 | 0.187 | 0.698 | 0.9862 | 1.0140 | 0.497 | 1.503 | 0.490 | 1.483 | 3.689 | 0.2711 | 0.734 | 1.487 | 5.891 | 0.403 | 1.597 |
| 20 | 0.671 | 0.180 | 0.680 | 0.9869 | 1.0133 | 0.510 | 1.490 | 0.504 | 1.470 | 3.735 | 0.2677 | 0.729 | 1.549 | 5.921 | 0.415 | 1.585 |
| 21 | 0.655 | 0.173 | 0.663 | 0.9876 | 1.0126 | 0.523 | 1.477 | 0.516 | 1.459 | 3.778 | 0.2647 | 0.724 | 1.605 | 5.951 | 0.425 | 1.575 |
| 22 | 0.640 | 0.167 | 0.647 | 0.9882 | 1.0119 | 0.534 | 1.466 | 0.528 | 1.448 | 3.819 | 0.2618 | 0.720 | 1.659 | 5.979 | 0.434 | 1.566 |
| 23 | 0.626 | 0.162 | 0.633 | 0.9887 | 1.0114 | 0.545 | 1.455 | 0.539 | 1.438 | 3.858 | 0.2592 | 0.716 | 1.710 | 6.006 | 0.443 | 1.557 |
| 24 | 0.612 | 0.157 | 0.619 | 0.9892 | 1.0109 | 0.555 | 1.445 | 0.549 | 1.429 | 3.895 | 0.2567 | 0.712 | 1.759 | 6.031 | 0.451 | 1.548 |
| 25 | 0.600 | 0.153 | 0.606 | 0.9896 | 1.0105 | 0.565 | 1.435 | 0.559 | 1.420 | 3.931 | 0.2544 | 0.708 | 1.806 | 6.056 | 0.459 | 1.541 |

Para $n > 25$.

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \qquad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \qquad c_4 \simeq \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}} \qquad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$$

$$B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$