-.PROGRAMACION LINEAL.-
Problemas resueltos

EJEMPLO 1.
Un expendio de carnes de la ciudad acostumbra preparar la carne para albondigón con una combinación de carne molida de res y carne molida de cerdo. La carne de res contiene 80% de carne y 20% de grasa, y le cuesta a la tienda 80$ por libra; la carne de cerdo contiene 68% de carne y 32% de grasa, y cuesta 60$ por libra. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplear la tienda en cada libra de albondigón, si se desea minimizar el costo y mantener el contenido de grasa no mayor de 25%?

El objetivo es minimizar el costo (en centavos), z, de una libra de albondigón, donde:
Z = 80 veces el número de libras de carne molida de res, más 60 veces el número de libras de carne molida de cerdo empleadas.

Si se define:

X1 = número de libras de carne molida de res empleadas en cada libra de albondigón .

X2 = número de libras de carne molida de cerdo empleadas en cada libra de albondigón,

el objetivo se expresa como:

$$\textbf{minimícese:}\quad \mathbf{z = 80X1} + \mathit{60X2} \qquad (1)$$

Cada libra de albondigón tendrá 0.20 x_1, libras de grasa provenientes de la carne de res y 0.32 x_2 libras de grasa de la carne de cerdo. El contenido total de grasa de una libra de albondigón no debe ser mayor de 0.25 libras. Entonces:

$$0.20X1 + 0.32X2 <= 0.25 \qquad (2)$$

El número de libras de carne de res y de cerdo empleadas en cada libra de albondigón debe sumar 1; entonces:

$$X1 + X2 = 1 \qquad (3)$$

Finalmente, la tienda no puede usar cantidades negativas de ninguna de las carnes, así que hay dos restricciones de no negatividad: X1>= 0 y X2 >= 0. Combinando estas condiciones con (1), (2) y (3), se tiene:

$$\begin{aligned} &\text{minimícese:} && z = 80X1 + 60X2 \\ &\text{con las condiciones:} && 0.20X1 + 0.32X2 <= 0.25 \qquad (4) \\ & && X1 + X2 = 1 \\ &\text{con:} && \text{con todas las variables no negativas} \end{aligned}$$

El sistema (4) es un programa lineal. Como sólo hay dos variables, se puede dar solución gráfica.

EJEMPLO 2.
Una excursionista planea salir de campamento. Hay cinco artículos que desea llevar consigo, pero entre todos sobrepasan las 60 Ib que considera que puede cargar. Para auxiliarse en la selección, ha asignado un valor a cada articulo en orden ascendente de importancia:

Articulo	1	2	3	4	5
Peso, Ib	52	23	35	15	7
Valor	100	60	70	15	15

¿Qué artículos deberá llevar para maximizar el valor total, sin sobrepasar la restricción de peso?

Haciendo que Xi *(i* = 1, 2, 3, 4, 5) indique la cantidad a llevar del artículo I, se puede plantear el objetivo como:

maximícese: $z = 1OO\ X1 + 60\ X2 + 70\ X3 + 15\ X4 + 15\ X5$ (/)

La restricción de peso es:

$$52X1 + 23X2 + 35X3 + 15X4 + 7X5 <= 60 \qquad (2)$$

Ya que cada artículo se llevará o no se llevará, cada variable debe ser 1 o 0. Estas condiciones se cumplirán, si se pide que cada variable sea no negativa, no mayor que 1 y entera. Combinando estas restricciones con (1) y (2), se tiene el programa matemático:

maximícese: $z = 1OO\ X1 + 60\ X2 + 70\ X3 + 15\ X4 + 15\ X5$

con las condiciones:

$$\begin{array}{llllll} 52X1 & + 23X2 & + 35X3 & + 15X4 & + 7X5 & <= 60 \\ X1 & & & & & <= 1 \\ & X2 & & & & <= 1 \\ & & X3 & & & <= 1 \\ & & & X4 & & <= 1 \\ & & & & X5 & <= 1 \end{array} \qquad (3)$$

con: todas las variables enteras no negativas.

El sistema (3) es un programa entero

EJEMPLO 3.

La Refinería Azteca produce dos tipos de gasolina sin plomo, regular y extra los cuales vende a su cadena de estaciones de servicio en $12 y $14 por barril, respectivamente. Ambos tipos se preparan del inventario de la Azteca de petróleo nacional refinado y de petróleo importado refinado, y deben cumplir con las siguientes especificaciones:

	Presión máxima de vapor	Octanaje minimo	Demanda máxima, barriles/ semana	Entregas j mínimas, barriles/ semana
Regular	23	88	**100000**	**50000**
Extra	23	93	**20000**	**5000**

Las características del inventario de petróleos refinados son las siguientes:

	Presión de vapor	Octanaje	Inventario barriles	Costo S/barril
Nacional	25	87	**40 000**	**8**
Importado	15	98	**60000**	**15**

¿Qué cantidades de los dos petróleos (nacional e importado) deberá mezclar la Azteca en ambas gasolinas, a fin de maximizar la ganancia semanal?

Haciendo:

X1 barriles de petróleo nacional mezclado en la regular

X2 barriles de petróleo importado mezclado en la regular

X3 barriles de petróleo nacional mezclado en la extra

X4 barriles de petróleo importado mezclado en la extra

Se producirá una cantidad X1 + X2 de gasolina regular y generará un ingreso de 12(X1 + X2), se producirá una cantidad X3 + X4 de extra y generará un ingreso de 14(X1 + X2). Se usará una cantidad X1 + X3 de petróleo nacional, a un costo de 8(X1 + X3); se usará una cantidad X2 + X4 de importado, a un costo de 15(X1 + X3). La ganancia total, z, es el ingreso menos el costo:

maximícese: $z = 12(X1 + X2) + 14(X3 + X4) - 8(X1 + X3) - 15(X2 + X4)$
$= 4X1 - 3X2 + 6X3 - X4$ *(1)*

Hay limitaciones impuestas a la producción por la demanda, la disponibilidad de suministros y las especificaciones de la mezcla. Se tiene de las demandas:

X1 + X2 <= 100 000 (demanda máxima de regular) (2)
X3 + X4 <= 20000 (demanda máxima de extra) *(3)*
X1 + X2 >= 50000 (requerimiento máximo regular) *(4)*
X3 + X4 >= 5000 (requerimiento mínimo de extra) (5)

De la disponibilidad:

X1 + X3 <= 40000 (nacional) (6)
X2 + X4 <= 60000 (importado) (7)

Los componentes de una mezcla contribuyen al octanaje general, según sus porcentajes por peso; asimismo para la presión de vapor. Entonces, el octanaje de la regular es:

$87 X1/(X1+X2) + 98 X2/(X1+X2)$

y el requerimiento de que éste sea de por lo menos 88, lleva a:

X1 – 10X2 <= 0 *(8)*

Igualmente, se obtiene:

6X3 – 5X4 <= 0 (restricción de octanaje de la extra) *(9)*
2X1-8X2 <= 0 (restricción de presión de vapor regular) *(10)*
2X3-8X4 <= 0 (restricción depresión de vapor extra) *(11)*

Combinando de (1) hasta (11) con las cuatro restricciones de no negatividad de las cuatro variables, se obtiene el programa matemático

EJEMPLO 4.

Minas Universal opera tres minas en West Virginia. El meneral de cada una se separa, antes de embarcarse, en dos garados. La capacidad diaria de producción de las mismas así, como sus costos diarios de operación son los siguientes:

	Mineral de grado alto, ton/dia	Mineral de grado bajo, ton/dia	Costo de operación, $1 000/dia
Mina I	4	4	20
Mina II	6	4	22
Mina III	1	6	18

La Universal se comprometió a entregar 54 toneladas de mineral de grado alto y 65 toneladas de mineral de grado bajo para fines de la siguiente semana. Además, tiene contratos de trabajo que garantizan a los trabajadores de ambas minas el pago del día completo por cada día o fracción de día que la mina esté abierta. Determínese el número de días que cada mina debería operar durante la siguiente semana, si Minas Universal ha de cumplir su compromiso a un costo total mínimo.

Denótense con X1, X2 y X3, respectivamente, el número de días qué las minas I, II y III habrán de operar durante la semana venidera. Entonces, el objetivo(expresado en $1000) es:

$$\text{minimícese:} \quad z = 20X1 + 22X2 + 18X3 \qquad (1)$$

La demanda de mineral de grado alto es:

$$4X1 + 6X2 + X3 >= 54 \qquad (2)$$

y la demanda de mineral de grado bajo es:

$$4X1 + 4X2 + 6X3 >= 65 \qquad (3)$$

Como ninguna mina puede operar un número negativo de días, tres restricciones de no negatividad son X1 >= 0, X2 >= 0 y X3 >= 0. Por otro lado, como ninguna mina puede operar más de 7 días a la semana, otras tres restricciones son X1 <= 7, X2 <= 7 y X3<= 7. Finalmente, debido a los contratos laborales, Minas Universal no tiene nada qué ganar al operar una mina parte de un día; en consecuencia, X1, X2 y X3 deben ser enteros. Combinando las restricciones con (1), (2) y (3), se obtiene el programa matemático:

minimícese: $z = 20X1 + 22X2 + 18X3$

con las condiciones:

$$\begin{aligned} 4X1 + 6X2 + X3 &>= 54 \\ 4X1 + 4X2 + 6X3 &>= 65 \\ X1 \qquad\qquad &<= 7 \qquad\qquad (4) \\ X2 \qquad &<= 7 \\ X3 &<= 7 \end{aligned}$$

con: todas las variables enteras y no negativas.

EJEMPLO 5.

Una empresa fabrica los productos A, B y C y puede vender todo lo que produzca a los siguientes precios: A 700; B 3.500; C 7.000.

Producir cada unidad de A necesita 1 hora de trabajo. Producir una unidad de B necesita 2 horas de trabajo, más 2 unidades de A. Producir una unidad de C necesita 3 horas de trabajo, más 1 unidad de B. Cualquier unidad de A utilizada para producir B, no puede ser vendida. Similarmente cualquier unidad de B utilizada para producir C, no puede ser vendida.

Para este período de planificación están disponibles 40 horas de trabajo. *Formule y Construya* el modelo Lineal que maximice los ingresos de la empresa.

Utilizando el mismo proceso, se tiene lo siguiente:

Variables de desción

X1: Unidades de A producidas en total
X2: Unidades de B producidas en total
X3: Unidades de C producidas en total
X4: Unidades dse A vendidas
X5: Unidades de B vendidas.

Objetivo:

Max 700 X4 + 3.500 X5 + 7.000 X3

Restricciones:

$X1 + 2X2 + 3X3 \leq 40$

$X1 = X4 + 2X2$

X2 = X5 + X3
X1, X2, X3,X4, X5 $\geq$ 0

EJEMPLO 6.

La Cámara de Industriales de la región periódicamente promueve servicios públicos, seminarios y programas. Actualmente los planes de promoción para este año están en marcha. Los medios alternativos para realizar la publicidad así como los costos y la audiencia estimados por unidad de publicidad, además de la cantidad máxima de unidades de publicidad en que puede ser usado cada medio se muestran a continuación.

Restricciones	Televisión	Radio	Prensa
Audiencia por unidad de publicidad	100.000	18.000	40.000
Costo por unidad de publicidad	$ 2.000	$ 300	$ 600
Uso máximo del medio	10	20	10

Para lograr un uso balanceado de los medios, la publicidad en radio no debe exceder el 50% del total de unidades de publicidad autorizados. Además la cantidad de unidades solicitadas en televisión debe ser al menos 10% del total autorizado. El presupuesto total para promociones se ha limitado a $18.500.

Utilizando el mismo proceso, se tiene lo siguiente:
Variables de decisión:

X1: unidades de publicidad a contratar en televisión.
X2: unidades de publicidad a contratar en radio.
X3: unidades de publicidad a contratar en prensa.

Objetivo: Maximizar la audiencia total o cantidad de personas que ven la publicidad

Max 100.000 X1 + 18.000 X2 + 40.000 X3

Restricción 1: Disponibilidad limitada de presupuesto para la publicidad:

2.000 X1 + 300 X2 + 600 X3 <=18.500

Restricciones 2, 3 y 4: Uso máximo de medios para la publicidad:

X1 <= 10 unidades de publicidad a contratar en t.v
X2 <= 20 unidades de publicidad a contratar en radio
X3 <= 10 unidades de publicidad a contratar en prensa

Restricción 5: Publicidad limitada a un máximo de 50% en radio, con relación al total de unidades a contratar:

X2 <= 0.5 (X1+ X2+ X3)
Finalmente quedará expresada así: - 0.5 X1 + 0.5 X2 - 0.5 X3 <= 0

Restricción 6: La cantidad de unidades solicitadas en televisión debe ser al menos 10% del total autorizado

X1 >= 0.10 (X1+ X2+ X3)
Finalmente quedará expresada así: 0.9 X1 – 0.1 X2 - 0.1 X3 >= 0

Posteriormente puede resumir el modelo agregándole la restricción de no-negatividad de las variables