UNIDAD DIDACTICA II

ECUACIONES e INECUACIONES

Temario: Resolución de ecuaciones en una variable. Resolución de inecuaciones en una variable. Ecuaciones e inecuaciones usando valor absoluto. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
Ecuación de la recta, elementos, representación geométrica. Ecuación de una recta conocido un punto y su pendiente. Ecuación de una recta conocidos dos puntos. Paralelismo y perpendicularidad de rectas.
Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Conjunto solución. Sistemas equivalentes. Sistemas compatibles determinados e indeterminados. Sistemas incompatibles. Interpretación geométrica. Resolución por método de sustitución, igualación. Aplicaciones a la geometría. Ejercitación y problemas.

Introducción

Para resolver problemas de cualquier índole, de la vida cotidiana, de las ciencias, de ingeniería, de ciencias sociales, generalmente se utilizan herramientas de modelización matemática. Pero, ¿cuál es el significado de modelizar matemáticamente una situación problemática?
Un modelo es una representación selectiva y simplificada de la realidad. El modelo es una representación porque sustituye a la realidad. Se construye primero en la mente de la persona, a partir de la percepción del sistema real. Luego puede volcarlo a un esquema, una maqueta, fórmulas matemáticas, enunciados verbales, entre otros. La representación es selectiva y simplificada, porque no toma todos los elementos de la realidad, sino sólo los que nos parecen importantes.
Generalmente luego de modelizar un problema de ingeniería, se utilizan las ecuaciones, las funciones, la geometría, como una herramienta para hallar las posibles soluciones. Es importante la etapa de validación o comprobación de las soluciones halladas en el problema real.

Ecuación Lineal

¿Qué es una ecuación?

Es una propuesta de igualdad en donde pueden aparecer una o más incógnitas involucradas en una expresión algebraica. Dependiendo del tipo de expresión algebraica que aparezca en la igualdad será el tipo de ecuación, y el camino a seguir para resolverla. Resolver una ecuación significa encontrar el o los valores de la o las variables (si es que existen) que hagan que la igualdad sea válida.
Ecuación lineal: es una propuesta de igualdad en donde la incógnita aparece en una expresión elevada a la potencia uno.
Ejemplo: (ecuación lineal con una incógnita)

$$2x + 3 = 4x - 5$$

Ecuaciones equivalentes: dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo $3x-7=23$ y $5x-4=66-2x$ son equivalentes pues ambas tienen como solución a $x=10$

Transformaciones que mantienen la equivalencia:

- Sumar o restar la misma expresión en los dos miembros de la igualdad.
- Multiplicar o dividir los dos miembros de la igualdad por el mismo número distinto de cero.

¿Siempre es posible calcular la solución de una ecuación? ¿las soluciones son únicas?

- Halla, si existe, la solución de la ecuación

$$2.x+3 = 5.$$

Para resolver la ecuación dada anteriormente, se suma a ambos miembros el opuesto de 3 (con esta operación no se modifica el conjunto solución de la ecuación)

$$2x+3+(-3)=5+(-3)$$

$$2x = 2$$

Multiplicando por el inverso en ambos términos de manera conveniente, no se modifica el conjunto solución de la ecuación

$$\left(\frac{1}{2}\right).2x=\left(\frac{1}{2}\right).2$$

$$x=1$$

- Halla, si existe, la solución de la ecuación

$$3.x\text{-}x = 2.x$$

En este ejemplo, habrán obtenido 0.x = 0. ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación?

- Halla, si existe, la solución de la ecuación

$$x + 5 = x$$

En este ejemplo, habrás obtenido 5 = 0.x ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación?

En el siguiente espacio, resume en cuanto al tipo de soluciones que puede tener una ecuación lineal:

………

………

………

Realiza los siguientes ejercicios:

1) Encuentra el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales y verifica.
   a) $2 . (3 + 2 x) = 3 . (x - 4)$
   b) $6 - x = - x + 9$
   c) $5 - \frac{6\,x-4}{5} = x - 3$
   d) $3 . (2 - x) = -3 x +6$
   e) $0{,}9 t = 0{,}4 - 0{,}1 t$

f) $8x - (2x + 1) = 3x - 10$

g) $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{x-13}{9}$

h) $5 - (2x - 1) = 10$

2) Expresa en símbolos:

a) Un número disminuido en 5 ....
b) Un número aumentado en 3 ....
c) El doble de un número ....
d) La mitad de un número ....
e) El consecutivo de un número ....
f) El anterior de un número ....
g) Un número par ....
h) Un número impar ....
i) El consecutivo par de un número par ....
j) El triple del anterior de un número ....
k) El cuádruplo del consecutivo de un número ....
l) El siguiente del doble de un número ....
m) El anterior del triple de un número ....
n) El 20 % de una cantidad x ....
o) Si una tarifa está dada por x , una tarifa y media será ....
p) El perímetro de un cuadrado de lado x ....
q) El perímetro de un rectángulo de ancho x y alto y ....
r) El área de un rectángulo de ancho x y alto y ....
s) Si el costo de fabricar una máquina es de $ 150, indica el costo de fabricar x máquinas ....
t) La cantidad x supera a la cantidad y en 2 ....
u) Juan recibirá ¾ de lo que recibió Ana (indique con x la cantidad recibida por Ana)
v) Luis recibirá la mitad de lo que recibió Juan ....

3) Plantea y resuelve (si es posible) los siguientes problemas:

a) Luis ha resuelto $2x + 3$ ejercicios, Ana resolvió $4x - 5$ y Juan resolvió $3x + 4$. Si en total han resuelto 47 ejercicios, ¿cuántos resolvió cada uno?
b) Carlos obtuvo calificaciones en los exámenes parciales de 80, 83, 71, 61 y 95. Va a presentar un último examen que cuenta como dos exámenes parciales, es decir su nota se repetirá. ¿Cuánto necesita obtener en dicho examen para alcanzar un promedio de 80?
c) La suma de tres números consecutivos es igual a 126. ¿Cuáles son dichos números?
d) Al aumentar en 3 cm el lado de un pentágono regular, su perímetro resulta 35,5cm. ¿Cuál era el lado del pentágono inicial?
e) La suma de tres números consecutivos es igual a 48. ¿Cuáles son dichos números?
f) Un distribuidor de automóviles, en una liquidación, reduce el precio de lista de los modelos del año anterior en un 20%. Si cierto modelo tiene un precio rebajado de $ 8000, ¿cuál era su precio original?

g) Si en el seminario universitario de Matemática se exige el 75% de asistencia, y se cuentan con 13 semanas de clase, si hay solo una clase por semana. ¿A cuántas clases debe asistir un alumno para no quedar libre?
h) Cortando un cuadrado de 20 cm de perímetro por una paralela a uno de los lados, se obtienen dos rectángulos. El perímetro de uno de ellos es de 12 cm. ¿Cuál es el perímetro del otro?. Realiza un esquema de la situación.
i) Un fabricante de casas rodantes reduce el precio de un modelo en un 20 %. Si el precio rebajado es de $125000, ¿cuál era su precio original?
j) Una herencia de $ 900 000 deberá repartirse entre Katy, Miguel y Daniel de la siguiente manera: Miguel recibirá ¾ de lo que obtenga Katy, mientras que Daniel obtendrá la mitad de lo que reciba Katy. ¿Cuánto recibirá cada uno?
k) Una molécula de azúcar tiene el doble de átomos de hidrógeno que de oxígeno y un átomo más de carbono que de oxígeno. Si una molécula de azúcar tiene un total de 45 átomos. ¿Cuántos átomos de carbono, cuántos de oxígeno y cuántos de hidrógeno hay en una molécula de azúcar?
l) Al cerrar la caja de un comercio, se totaliza $ 10610. El cajero observa que la cantidad de billetes de $ 50 es la mitad de la cantidad de billetes de $ 100, la cantidad de billetes de $ 5 es el triple de la cantidad de billetes de $ 50 y que la cantidad de monedas $ 1 es un cuarto de la cantidad de billetes de $50. ¿Cuántos billetes de cada denominación hay?
m) En una planta de tratamiento de alcohol, se disponen de dos máquinas embotelladoras. La primera llena 300 botellas por hora y la segunda 500 botellas a la hora. ¿Cuánto tiempo tardará en preparar un pedido de 10000 botellas?
n) Por cada hora extra un trabajador recibe un 50% más que por cada hora básica. Si por 48 horas de trabajo (de las cuales 40 fueron horas básicas) recibió un salario de $ 88,4. ¿Cuál es el salario por hora básica y por hora extra?
o) En un juego de básquetbol, un equipo anotó 70 puntos y la cantidad de canastas que se hizo fue el triple que la cantidad de tiros libres. ¿Cuántas canastas anotó? (Cada canasta vale 2 puntos y cada tiro libre un punto)
p) Se van a plantar árboles, a distancias regulares, a uno de los lados del camino que une dos casas. Si se plantan cada 50 m, se necesitan 18 árboles más que si se plantan cada 35 m. ¿Cuál es la distancia entre las casas?
q) En las elecciones para presidente, el candidato A obtuvo 5919 votos más que el candidato B. Si entre ambos hubo un total de 18653 votos. ¿Cuántos votos obtuvo cada uno?

4) Inventa una ecuación que tenga como única solución a $x=3$. Y otra que tenga infinitas soluciones.
5) Inventa un problema que se resuelva con una ecuación. Pásalo a un compañero para que lo resuelva.

Ecuaciones con Valor Absoluto

Ecuación modular o con valor absoluto: es una ecuación en donde las variables se ven afectadas por valor absoluto. En este caso hay que distinguir las distintas posibilidades de la expresión afectada por el valor absoluto, para poder plantear las ecuaciones equivalentes para hallar todas las posibles soluciones.
Por ejemplo, si la ecuación es

$$|x| = 3$$

entonces $x= 3$ o bien $x= -3$

Por ejemplo, si la ecuación es

$$|5x+2| = 3$$

entonces:

$$5x+2 = 3 \quad \text{o bien} \quad 5x+2 = -3$$

Y luego se resuelven ambas ecuaciones y así se encuentran las soluciones posibles para dicha ecuación.

Realiza los siguientes ejercicios:

6) Halla, si existen, el o los valores que verifican cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $|x+2| = 8$
b) $|x|+8 = 3$
c) $|x|- 8 = 3$
d) $|v-2| = 3$
e) $|10 -x| = 5$
f) $|6 -2t| = 4$
g) $|3x+18| = 0$
h) $-|x| = - |-9|- |-1,5|$
i) $|x-1| = |1-4|$
j) $- |r| = -6+ |r|$

Inecuaciones Lineales

Es una propuesta de desigualdad vinculada a los valores mayores o menores que otro, que tiene como solución (si es que existe) uno o más intervalos reales.
Inecuaciones equivalentes: dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo $x<10$ y $2x<20$ son equivalentes pues ambas tienen el mismo conjunto solución.

Transformaciones que mantienen la equivalencia:

- Sumar o restar la misma expresión en los dos miembros de la desigualdad.
- Multiplicar o dividir los dos miembros de la desigualdad por el mismo número positivo distinto de cero.

Ejemplo 1:
Desigualdad lineal

$$2x + 4 < 6$$

Para resolver: sumamos el opuesto de 4 en ambos miembros de la desigualdad

$$2x+4-4<6-4$$

$$2x<2$$

Multiplicamos por inverso de 2 en ambos miembros

$$\left(\frac{1}{2}\right).\ 2x<\left(\frac{1}{2}\right).2$$

$$x<1$$

Conjunto solución: S= (-∞, 1)

Ejemplo 2:

$$-2x+4<6$$

Para resolver: sumamos el opuesto de 4 en ambos miembros de la desigualdad

$$-2x+4-4<6-4$$

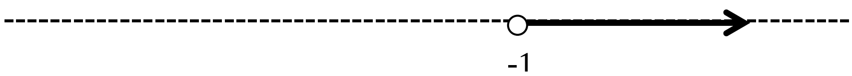
$$-2\ x<2$$

Multiplicamos por el inverso de -2 en ambos miembros
Al multiplicar por un número negativo, cambiamos el signo de ambos miembros de la desigualdad, por lo que se invierte la relación de desigualdad.

$$\left(-\frac{1}{2}\right).(-2)\ x>\left(-\frac{1}{2}\right).\ 2$$

$$x>-1$$

S= (-1,∞)



Ejemplo 3:
Para resolver la siguiente inecuación:

$$4<\ 3x-1<7$$

Trabajamos simultáneamente en los tres miembros de la desigualdad

$$4+1<3x-1+1<7+1$$

$$5<3x<8$$

$$5\left(\frac{1}{3}\right)<3x\ \left(\frac{1}{3}\right)<8\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)<x<\left(\frac{8}{3}\right)$$

S= $\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$

Grafica como un intervalo el conjunto solución anterior.

Ejemplo 4:
Para resolver la siguiente inecuación:

$$x\ -3\leq 4x+5$$

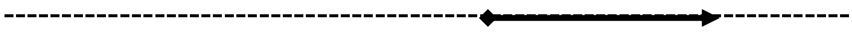
Agrupamos los términos con “x” de un mismo lado de la desigualdad.

$$x-3-x \leq 4x + 5 - x$$

$$-3-5 \leq 3x$$

$$-8\left(\frac{1}{3}\right) \leq 3x\left(\frac{1}{3}\right)$$

S=[-8/3;∞)



-8/3

Desigualdades con valor absoluto:

Por ejemplo:

|x| < 4 se resuelve planteando que -4 < x < 4 S= (-4,4)

| 2x – 5| ≤ 7 se resuelve planteando la desigualdad que surge a partir de la definición de valor absoluto y luego operando.

$$-7 \leq 2x - 5 \leq 7$$

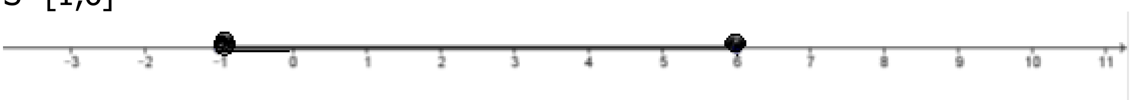
$$-7 + 5 \leq 2x - 5 + 5 \leq 7 + 5$$

$$-2 \leq 2x \leq 12$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(-2) \leq \left(\frac{1}{2}\right)2x \leq \left(\frac{1}{2}\right)12$$

$$-1 \leq x \leq 6$$

S=[1,6]



|x|> 5 se resuelve planteando que x< -5 o bien x>5

S= (-∞, -5)U(5,∞)

| 2x – 5| > 7 se resuelve planteando que 2x -5 < -7 o bien 2x-5> 7

$$2x - 5 < -7$$

$$2x - 5 + 5 < -7 + 5$$

$$2x < -2$$

$$2x/2 < -2/2$$

$$x < -1$$

S_1=(-∞, -1)

$$2x - 5 > 7$$

$$2x - 5 + 5 > 7 + 5$$

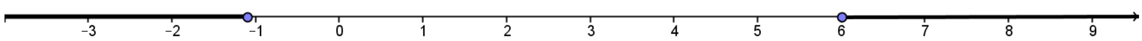
$$2x > 12$$

$$2x/2 > 12/2$$

$$x > 6$$

S_2= (6,∞)

Luego el conjunto solución es S, siendo S = S_1 U S_2= (-∞, -1)U(6,∞)



Realiza los siguientes ejercicios:

7) Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3+x \geq 6$
b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}>5$
c) $\frac{-4+x}{2} \leq -1$
d) $2<2x-4 \leq 6$
e) $-3 < -9 -4x \leq 11$
f) $2x -4 > 6x$
g) $-1 \leq (5-2x)<1$
h) $| x - 2| \leq 5$
i) $| x+ 5| \geq 2$
j) $| x - 1|>3$
k) $| x + 4|< 1$
l) $| x +2| \leq |(-3).4|$
m) $| (-1).(x+5)|> 9 - (-2)$
n) $3|x - 5|-1<2|x - 5|$
o) $2| x +3|>2 +| x+3|$

8) Resuelve los siguientes problemas:

a) Determina el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a 3 sea mayor o igual que 4.
b) Determina el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a -3 sea menor a 5.
c) La carga máxima que puede transportar un camión es de 3500 kg. Si se sabe que en cada viaje transporta como mínimo 2800 kg, ¿cuántos paquetes de 70 Kg puede transportar en cada viaje?
d) Con 11,2 litros de agua alcanza y sobra para llenar 7 botellas iguales pero no para llenar 8 de esas botellas. Mediante inecuaciones indicar entre qué valores se halla la capacidad de las botellas.
e) El peso máximo que soporta un ascensor es de 225 kg. Un hombre de 72 kg, transporta consigo baúles los cuales pesan cada uno 21,75 kg. ¿Cuántos baúles puede transportar?
f) En un ascensor se cargan 3 cajas de igual peso más un bulto de 25 kg. Se sabe que la carga máxima que soporta el ascensor es de 110 kg. Utilizando una inecuación encontrar el conjunto de valores (en kg) que pueden tener las cajas.
g) En una camioneta se cargan 3 cajas de igual peso y otro bulto de 400 kg. Plantee una inecuación y halle entre qué valores puede oscilar el peso de cada caja sabiendo que la carga máxima de la camioneta no puede superar los 1500 kg.
h) En una playa de la costa marplatense alquilan motos acuáticas y cobran \$50 más \$2 por kilómetro recorrido. En una playa en Miramar cobran sólo \$6 por kilómetro recorrido. Utilizando una inecuación, responde a partir de cuántos kilómetros conviene alquilar en Mar del Plata.

ECUACIONES EXPONENCIALES

Se llaman ecuaciones exponenciales a las ecuaciones en las que en algún miembro aparece una expresión exponencial -potencia de base constante (número) y exponente variable (x, y, etc)-. Son aquellas en las que la incógnita aparece en un exponente o en más de uno. Para resolverlas debemos aplicar las propiedades de la potenciación (sin olvidar que $a > 0$ y $a \neq 1$)).

Por ejemplo: $5^{x+1} = 20$

Inicialmente, como en cualquier ecuación, se trata de encontrar algún valor de x que cumpla la igualdad.

1. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

   1. Si es posible se expresan ambos miembros como potencia de una misma base.
   2. Si la ecuación tiene sumas y restas de potencias de una misma base se extrae factor común a^x .
   3. Si no es posible ninguno de los casos anteriores, aplicamos logaritmos decimales o naturales en ambos miembros.
   4. Si alguna expresión aparece repetida resulta conveniente hacer un cambio de variable quedando generalmente una ecuación cuadrática.
   5. En todos los casos se verifica la ecuación con el valor de la incógnita obtenido (conjunto solución).

Ejemplos:

❖ <u>Expresando ambos miembros como potencias de la misma base</u>

$$9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$$

$\left(3^2\right)^{-3x} = \left(3^{-3}\right)^{x+3}$ se expresan ambos miembros como potencias de la misma base

$3^{-6x} = 3^{-3(x+3)}$ potencia de potencia, los exponentes se multiplican

$3^{-6x} = 3^{-3x-9}$ por ser las base iguales los exponentes también lo son

-6 x = -3x – 9 $\Rightarrow$ -3x = -9 $\Rightarrow$ x = 3 $\Rightarrow$ S = { 3 }

Verificamos reemplazando el valor de x hallado en la ecuación dato

$$9^{-3.3} = \left(\frac{1}{27}\right)^{3+3}$$

$9^{-9} = (3^{-3})^6$

$(3^2)^{-9} = 3^{-18}$

$3^{-18} = 3^{-18}$

Se verifica la identidad, luego el valor hallado para x es el correcto.

- Extrayendo factor común

$5^{x+2} - 105 . 5^{x-1} = 100$

$5^x . 5^2 - 105 . 5^x . 5^{-1} = 100$ aplicamos propiedades de la potencia

$5^x (5^2 - 105 . 5^{-1}) = 100$ sacamos factor común 5^x

$5^x (25 - 21) = 100$

$5^x = \frac{100}{4} = 25$

$5^x = 5^2$ por ser las base iguales los exponentes también lo son

$x = 2$

$S = \{ 2 \}$

Verificamos reemplazando el valor de x hallado en la ecuación dato

$5^{2+2} - 105 . 5^{2-1} = 100$

$5^4 - 105 . 5 = 100$

$625 - 525 = 100$

$100 = 100$

Se verifica la identidad, luego el valor hallado para x es el correcto.

- Aplicando logaritmo a ambos miembros

$2^x = 5$

$\log 2^x = \log 5$ aplicamos logaritmo decimal a ambos miembros

$x. \log 2 = \log 5$

$x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2.32193$

$S = \{ 2.32193 \}$

Verificamos reemplazando el valor de x hallado en la ecuación dato

$2^{2,32193} = 5$

$5 = 5$

Se verifica la identidad, luego el valor hallado para x es el correcto.

- Mediante cambio de variables

$4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$

$(2^2)^x - 2^x . 2^1 - 8 = 0$

$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$

$z^2 - 2z - 8 = 0$ Sustituimos $z = 2^x$ y obtenemos una ecuación cuadrática en z

$z_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(-8)}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2}$

$z_1 = 4$ y $z_2 = -2$

Reemplazamos en la sustitución cada valor de z y despejamos, si es posible, el valor de x

Si: $z_1 = 4$

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$x = 2$

Si: $z_2 = -2$

$2^x = -2$

$\log 2^x = \log(-2)$!! no es posible hallar el valor de x

Luego, la única solución es $x = 2$

Verificamos reemplazando el valor de x hallado en la ecuación dato

$4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$

$4^2 - 2^{2+1} - 8 = 0$

$16 - 8 - 8 = 0$

$0 = 0$

Se verifica la identidad, luego el valor hallado para x es el correcto.

Realiza los siguientes ejercicios

9) Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales
   a) $9^{-3x} = (1/27)^{x+3}$
   b) $3^{2x+7} = 3$
   c) $3^{x+1} = 4^{x-1}$
   d) $5^{x+2} - 105 \cdot 5^{x-1} = 100$
   e) $9^{x^2+2x-3} = 1$
   f) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$
   g) $\sqrt{5} \cdot (1/5)^{2x-4} = 25^{3x}$
   h) $e^x + e^{-x} = 2$
   j) $4^{2x-1} \div 8^{2-x} = 16 \cdot 2^{2-2x}$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son aquellas en las cuales la incógnita aparece en el argumento de un logaritmo o en más de uno.

$$log(x+6) = 1 + log(x-3)$$

El logaritmo que suele aparecer en las ecuaciones logarítmicas es **el decimal** o **el neperiano**, y normalmente la misma base en toda la ecuación.

Para resolverlas, aplicamos la definición y propiedades de los logaritmos, obteniendo el conjunto solución.
RESOLUCIÓN NUMÉRICA

a) Si es posible, para despejar la incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmo.
b) Si los logaritmos tienen distinta base aplicamos el cambio de base.
c) Si la ecuación tiene sumas y restas de logaritmos aplicamos las propiedades de producto y cociente (propiedad inversa).
d) Si la ecuación tiene sumas y restas de logaritmos y el segundo miembro está igualado a cero, igualamos los dos logaritmos teniendo en cuenta que los logaritmos de igual base son iguales si sus argumentos lo son.
e) En todos los casos se verifica la ecuación original con el o los valores de la incógnita obtenida (conjunto solución), descartando aquellos valores que den un argumento menor o igual que cero.

Ejemplo:

a) $\log^2 x + \log x^2 = 3$

$$\log^2 x + 2\log x - 3 = 0$$

Efectuamos un cambio de variables en el que: log x = z , luego:

$z^2 + 2z - 3 = 0$

$a = 1$

$b = 2$

$c = 3$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = -3 \\ z_2 = \ \ 1 \end{array}$$

- z_1 = log x

-3 = log x , por lo que aplicando la definición de logaritmo

10^{-3} = x

0.001 = x_1

- z_2 = log x

-1 = log x , por lo que aplicando la definición de logaritmo

10^1 = x

10 = x_2

S = { 0.001 ; 10 }

Verificamos los valores de **x** obtenidos:

- Para x_1 = 0.001

log 0.001^2 + $(\log 0.001)^2$ = 3

log 0.000001 +(log $0.001)^2$ = 3

-6 + $(-3)^2$ = 3

-6 + 9 = 3

3 = 3

- Para x_2 = 10

log10^2 +(log $10)^2$ = 3

$\log 100 + (\log 10)^2 = 3$
2 + 1 = 3
3 = 3

Luego los valore hallados para **x** son correctos.

b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

Aplicamos el cambio de base de: logaritmo en base 16 y logaritmo en base 4 a logaritmo en base 2.

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$
$$\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 x}{4}$$
$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7 \Rightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 x = 7$$
$$\frac{7}{4}\log_2 x = 7 \Rightarrow \log_2 x = \frac{28}{7} = 4 \Rightarrow x = 16$$

Verificamos el valor de **x** obtenido:

$\log_2 16 + \log_4 16 + \log_{16} 16 = 7$ Aplicamos la definición de logaritmo
4 + 2 + 1 = 7
7 = 7

Luego, el valor obtenido para **x** es correcto.

c) $\log_2\left(x^2 - 7x + 8\right) - \log_2(1 - x) = 1$
Como la ecuación tiene una resta de logaritmos, aplicamos la propiedad de cociente
$$\log_2\left(\frac{x^2 - 7x + 8}{1 - x}\right) = 1$$
Ahora aplicamos la definición de logaritmo
$$2^1 = \frac{x^2 - 7x + 8}{1 - x} \Rightarrow 2 = \frac{x^2 - 7x + 8}{1 - x} \Rightarrow x^2 - 7x + 8 = 2(1 - x)$$
$$x^2 - 7x + 8 - 2(1 - x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ \mathrm{x}_2 = 2 \end{cases}$$

Verificamos los valores de **x** obtenidos

- **$x_1 = 3$**

$$\log_2\left(3^2 - 7.\ 3 + 8\right) - \log_2\left(1 - 3\right) = 1$$

$$\log_2(-4) - \log_2\left(-2\right) = 1$$

Pero...la función logarítmica no está definida para valores negativos, luego 3 no es solución de la ecuación.

- **$x_2 = 2$**

$$\log_2\left(2^2 - 7.\ 2 + 8\right) - \log_2\left(1 - 2\right) = 1$$

$$\log_2\left(-2\right) - \log_2\left(-1\right) = 1$$

Pero...la función logarítmica no está definida para valores negativos, luego 2 no es solución de la ecuación.
Luego la ecuación no tiene solución.

"En algunas ecuaciones logarítmicas podemos obtener soluciones numéricas que no son válidas, lo que nos obliga a comprobar las soluciones obtenidas en la ecuación inicial para decidir sobre su validez"

Veamos un ejemplo más:
Si la ecuación tiene sumas y restas de logaritmos y el segundo miembro está igualado a cero, igualamos los dos logaritmos teniendo en cuenta que los logaritmos de igual base son iguales si sus argumentos lo son iguales.

d) $\log\left(x + 6\right) - \log\left(2x - 1\right) = 0$

$$\log\left(x + 6\right) = \log\left(2x - 1\right)$$

para que esta ecuación sea cierta

$$\left(x + 6\right) = \left(2x - 1\right) \Rightarrow x = 7$$

Realiza los siguientes ejercicios

10)Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $\log_2(x + 4) + \log_2(x - 4) = 2$

b) $2 \cdot \log_2 x^2 - 2 \cdot \log_2(-x) = 4$

c) $\log_2(x^2 - 7x + 8) + \log_2(1 - x) = 1$

d) $\log_{\sqrt{5}}(x + 1) - \log_5(x + 1) = \log_5 7$

e) $ln\, x^2 - ln\sqrt{x} = \dfrac{14}{3}$

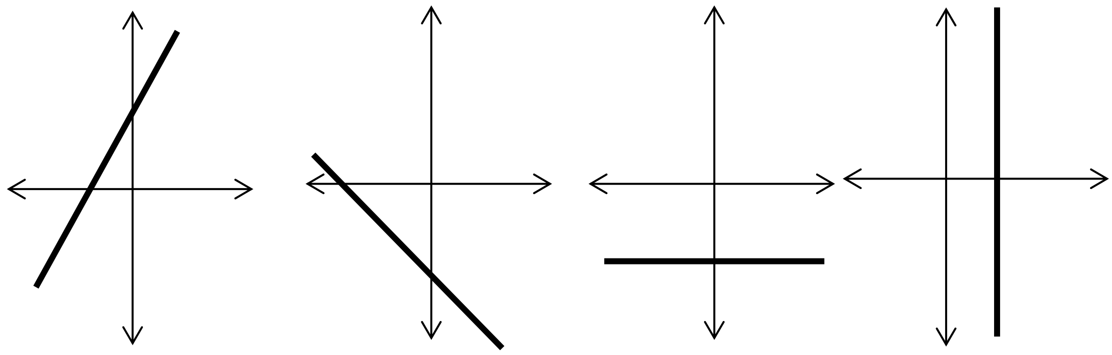
ECUACIONES DE LA RECTA

La ecuación de una recta a partir de la pendiente e intersección con el eje y, está definida por la siguiente expresión:

$y = m \cdot x + b$ siendo **m** y **b** números reales.

m: es la **pendiente** de la recta
b: es la **ordenada al origen**

Observa las siguientes gráficas:



En la primera gráfica, la recta tiene pendiente positiva ya que el ángulo determinado por la recta y el eje ***x***, es menor de 90º. En la segunda gráfica, la recta tiene pendiente negativa, ya que el ángulo determinado por la recta y el eje ***x***, es mayor de 90°, mientras que en la tercera, la recta tiene pendiente nula, es paralela al eje ***x***. Si la recta es paralela al eje ***y*** (cuarta gráfica), el ángulo que forma con el eje ***x*** es igual a 90°, el valor de la pendiente se hace extremadamente grande (infinito).

¿Cómo se determinan el valor de **m** y de **b**? Lo desarrollaremos a partir del siguiente problema:

Un resorte está sujeto al techo de una casa. El resorte mide 5 cm. Por cada kg de masa colgada se estira 2 cm. Si se cuelga un cuerpo de masa 4 kg se calcula de la siguiente manera:

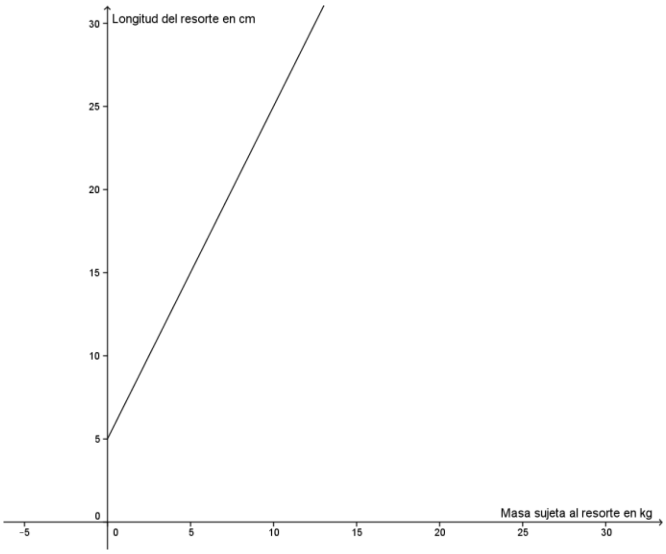
$$2 \cdot 4 + 5 = 13$$

Bajo estas mismas condiciones, ¿cuál es la longitud del resorte si se cuelga un cuerpo de masa 6kg? y si es de 8 kg?
Esta situación se puede expresar mediante una expresión que vincula la longitud del resorte con la masa del cuerpo colgada en él.
Para seguir avanzando en este estudio, recordemos lo que estudiamos con ecuaciones.
Si se simboliza con "y" la longitud del resorte, y con "x" la masa del cuerpo sujeto al resorte, ¿qué expresión se obtendrá?
Esta expresión permite calcular cuál es la longitud del resorte según la masa sujeta a él.

Para la representación de los puntos de coordenadas (x,y) que satisfacen esta ecuación que relaciona las variables antes indicadas, se sugiere completar la siguiente tabla y luego ubicar dichos puntos en un sistema de coordenadas:

x (cantidad de masa en kg)	y (longitud del resorte en cm)
1	………
0	………
0,75	………..
………	8

Como la expresión algebraica que se obtuvo anteriormente fue: $y = 2 \cdot x + 5$, seguramente la gráfica tiene las siguientes características:



Al observar que la gráfica obtenida está dada por puntos alineados que pertenecen a una misma recta, se podrían plantear los siguientes interrogantes:

- La recta a la cual pertenecen los puntos representados ¿pasa por el punto (0;0) -origen del sistema de coordenadas-? ¿Por qué?
- Si se piensa en términos de la situación, se dirá que si no se cuelga ningún peso en el resorte, este mide 5 cm, por lo que la recta no pasa por el origen de coordenadas. Es decir, que el punto de coordenadas (0, 5) pertenece a la recta representada.
- Como se ha dicho, la ordenada al origen es la intersección con el eje ***y,*** por lo que el valor de la abscisa es 0, entonces basta calcular el valor numérico que toma la variable ***y*** para ***x* = 0** y el resultado es el valor numérico es la ordenada al origen.

DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LA PENDIENTE - INCREMENTOS

Vimos que para determinar el valor de la ordenada al origen teníamos que ubicar sobre el eje y el valor del coeficiente **b**. Dicho de otro modo, la ordenada al origen está representada por la intersección de la recta con el eje y, es decir, para x = 0.

En cambio para obtener el valor de la pendiente **m** solamente hemos podido determinar con exactitud su signo: será positivo cuando el ángulo α **< 90º**, y será negativo cuando α **> 90º.**

Veremos ahora cómo hacer para determinar con exactitud su valor. Definiremos el valor de la pendiente como el cociente entre la variación de ordenadas y la variación de abscisas.

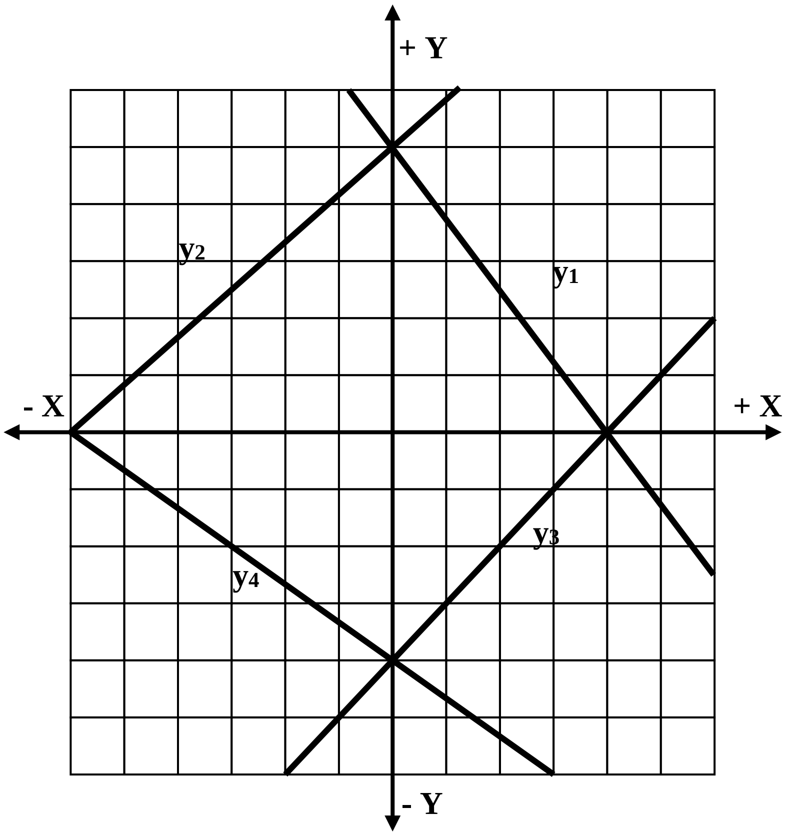
$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Para tener en cuenta el signo, que debe coincidir con lo que ya sabemos, se consideran dos puntos cualesquiera de la recta y se los une recorriendo las proyecciones sobre los ejes **y** y **x.** Si el recorrido en **y** se hace hacia arriba se considera positivo; si se realiza hacia abajo se considera negativo. Para el eje **x** si el recorrido se hace a la derecha será positivo; si se hace hacia la izquierda se considerará negativo. Como la pendiente es un cociente, se aplica la regla de los signos.

Realiza el siguiente ejercicio:

9) Dadas las gráficas de 4 rectas en un diagrama cartesiano y sus intersecciones con los ejes, determine las ecuaciones de dichas rectas con el procedimiento anterior.

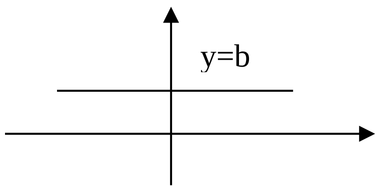
Es conveniente comenzar con el valor de ordenada al origen **b** y luego utilizar las variaciones Δ**y** y Δ**x**, respetando los signos, para hallar un segundo punto de la recta.



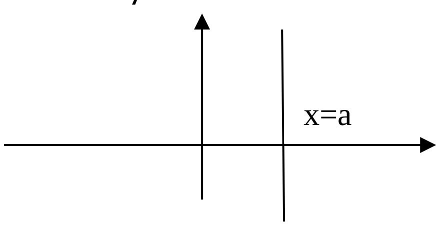
y_1 = **y_2 =**
y_3 = **y_4 =**

RECTAS HORIZONTALES Y RECTAS VERTICALES

Para describir una recta horizontal, sabemos que la pendiente es NULA y su ecuación entonces es de la forma y = b.



Para describir los puntos de una recta vertical, en cambio se dice que la pendiente es indefinida y su ecuación entonces es de la forma x=a.



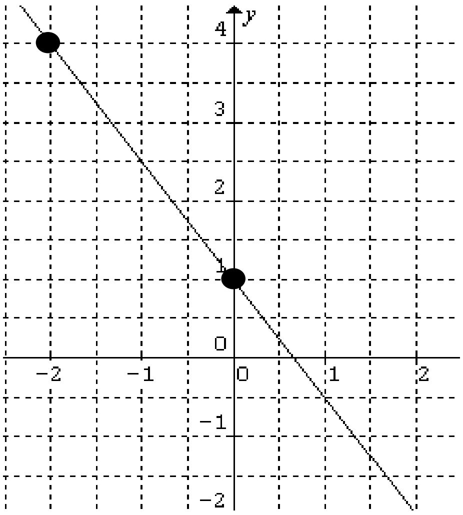
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Para determinar la distancia entre dos puntos p_1 y p_2, de los cuales se conocen sus coordenadas $p_1(x_1;y_1)$ y $p_2(x_2;y_2)$, bastará con aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo formado por las variaciones de abscisas (Δx) y ordenadas (Δy) como catetos y calcular el valor de la hipotenusa que es la distancia entre dichos puntos.

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{siendo } \Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

Se observa lo dicho en el siguiente gráfico:

Sean $p_1(-2, 4)$ y $p_2(0, 1)$ dos puntos entre los que se quiere medir la distancia. Se calcula las variaciones en cada eje:



$\Delta x = x_2 - x_1 = 0 - (-2) = 2$

$\Delta y = y_2 - y_1 = 1 - 4 = -3$

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Observación: Calcular $x_2 - x_1$ o $x_1 - x_2$ llevará al mismo resultado por el hecho de estar elevados al cuadrado las variaciones tanto de *x* como de y.

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Para determinar rectas paralelas y perpendiculares realizaremos las siguientes representaciones en un mismo gráfico, con un color las primeras y con otro las segundas:

a) $y = \frac{3}{2}x + 2$

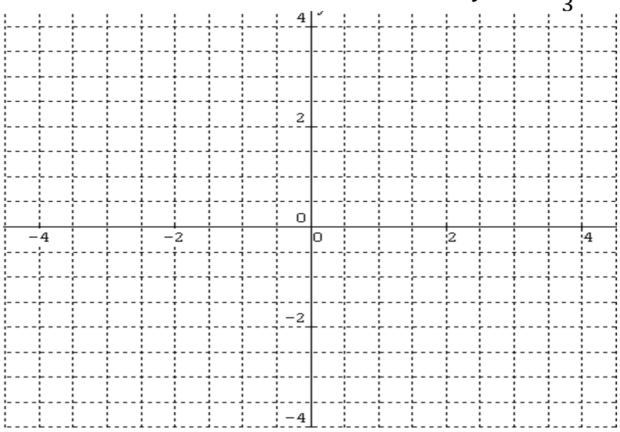
$y = \frac{3}{2}x$

$y = \frac{3}{2}x - 2$

b) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

$y = -\frac{2}{3}x$

$y = -\frac{2}{3}x - 1$



c) ¿Cómo son entre sí las rectas de cada grupo? . . . .
d) ¿Qué tienen en común sus ecuaciones? . . . .
e) ¿Cómo son las rectas de un grupo con respecto a las del otro?. . . . .
f) ¿Cómo son los coeficientes de x (pendiente) en la primera familia de rectas con respecto a los coeficientes de x en la segunda familia? . . . .

g) **Enuncia conclusiones**:

- Si dos rectas son **paralelas**, los coeficientes de x (sus **pendientes,** los valores de **m** son . . . .
- Si dos rectas son **perpendiculares**, los coeficientes de x (sus **pendientes,** los valores de **m** son . . . .

Cuando se habla de rectas paralelas, se está haciendo referencia a rectas que tienen la misma inclinación, formando con el eje x el mismo ángulo de inclinación; de acuerdo a lo que se visto, esto es sinónimo de decir que tienen la misma pendiente **m**. Obsérvese que para que las rectas sean paralelas no coincidentes, el punto de intersección con el eje **y** debe cambiar, o sea que la ordenada al origen **b** debe ser distinta. Por lo tanto:

Dos o más rectas son paralelas no coincidentes si y sólo si tienen la misma pendiente y la ordenada al origen es distinta.

En el ejemplo anterior: R_1: $y = \frac{3}{2}x + 2$

R_2: $y = \frac{3}{2}x$

R_3: $y = \frac{3}{2}x - 2$

Simbólicamente: $R_1 \parallel R_2 \parallel R_3$ y se lee: "R_1 es paralela a R_2, paralela a R_3"

Se observa que si la ordenada al origen es la misma y tienen la misma pendiente, se dice que las rectas son *paralelas coincidentes*.

En cambio si se habla de rectas perpendiculares, el ángulo que forman dichas rectas es de 90º, por lo que los ángulos de inclinación de cada recta respecto del eje ***x***, difieren en 90°. Es decir: si una recta R_1 (de pendiente m_1) forma un ángulo α con el eje ***x***, una recta R_2 (de pendiente m_2), perpendicular a ella formará un ángulo (90º+α). Esto provoca que las pendientes sean *opuestas y recíprocas*. Aunque más adelante se tratará este tema, analizándolo según los ángulos, las pendientes de rectas perpendiculares serán:

$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{y} \quad m_2 = \operatorname{tg}(90º + \alpha)$$

Por lo que: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

En conclusión:

Dos rectas son perpendiculares sí y sólo si sus pendientes son opuesta y recíprocas.

En el ejemplo:

$$R_1: y = \frac{3}{2} x + 2$$

$$R_2: y = -\frac{2}{3} x + 1$$

Simbólicamente: $R_1 \perp R_2$ y se lee: "R_1 es perpendicular a R_2".

ECUACIÓN DE UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO

Dado un determinado punto $\mathbf{p_1}$ de coordenadas $\mathbf{(x_1;y_1)}$ se trata de determinar la expresión que represente a una recta que pasa por ese punto. Como geométricamente por un punto pueden pasar **infinitas** rectas, para determinar exclusivamente una de ellas, habrá que conocer su dirección, es decir el valor de la pendiente **m.**

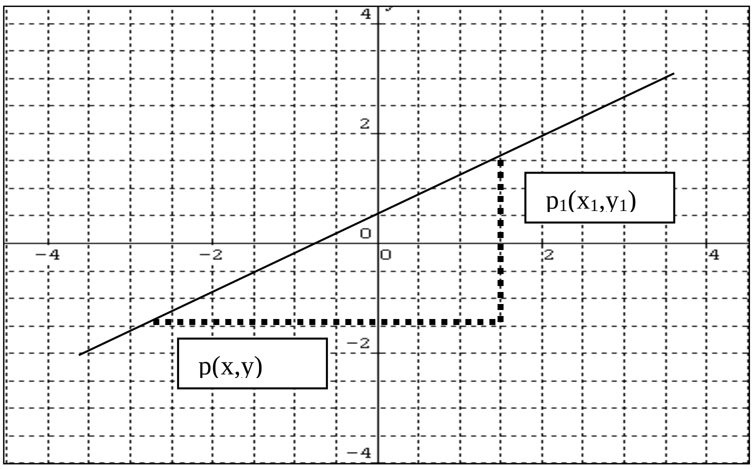
La situación se puede expresar de la siguiente manera:

Datos $\begin{cases} \mathbf{p_1\ (x_1;y_1)} \\ \textbf{m (pendiente)} \end{cases}$ Inc. $\begin{cases} \textbf{b (ordenada} \\ \textbf{al origen)} \end{cases}$

Se recuerda que la pendiente de una recta, informa la inclinación de la recta respecto al eje ***x***, por lo que se involucra un ángulo. Dado un punto p_1 de coordenadas $(x_1;y_1)$, la pendiente se calcula como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación:

$$m = \text{tg } \alpha$$

Como la tangente se calcula como el cociente entre el cateto opuesto y el adyacente (como se verá más adelante), entonces se observa el gráfico



Luego:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

En tal caso, para resolver el problema se utiliza la denominada ecuación de la recta que pasa por $p_1 = (x_1;y_1)$ y tiene pendiente **m**:

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

Ejemplo:

Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $p_1(-2;4)$ y tiene pendiente m=-3/2 y luego represéntela.

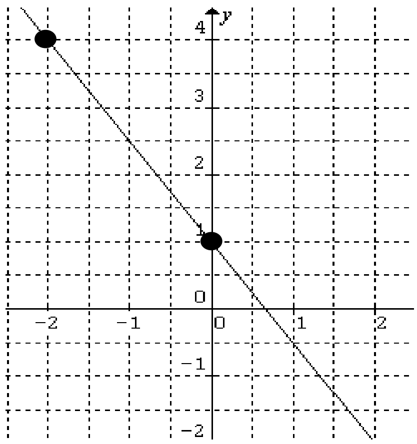
Datos $\begin{cases} x_1 = -2\ ;\ y_1 = 4 \\ m = -3/2 \end{cases}$

$$y-4=-\tfrac{3}{2}\left(x-(-2)\right)=-\tfrac{3}{2}(x+2)$$

$$y-4=-\tfrac{3}{2}x-\frac{3}{2}\cdot 2=-\tfrac{3}{2}x-3$$

$$y=-\tfrac{3}{2}x-3+4$$

$$\boxed{y=-\frac{3}{2}x+1}$$



ECUACIÓN DE UNA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Dados dos puntos **p_2** y **p_1** de coordenadas **$(x_2;y_2)$** y **$(x_1;y_1)$** se trata de determinar la expresión que represente a una recta que pasa por esos puntos. Como geométricamente por dos puntos pasa una y sólo una recta, su dirección, es decir el valor de la pendiente **m** estará determinada por las diferencias de ordenadas y abscisas de los puntos conocidos.

La situación se puede expresar de la siguiente manera:

Datos $\begin{cases} p_2\ (x_2;y_2) \\ p_1\ (x_1;y_1) \end{cases}$ Inc. $\begin{cases} \text{m (pendiente)} \\ \text{b (ordenada al origen)} \end{cases}$

En tal caso, para resolver el problema se utiliza la ecuación de la recta que pasa por un punto como en el caso anterior (por cualquiera de ellos), y para determinar la pendiente recordaremos la expresión - que provenía de la definición de pendiente-:

$$\boxed{m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

y que reemplazándola en la expresión de una recta que pasa por un punto, nos queda:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)}$$

Ejemplo: Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos p_2 (-2;4) y p_1 (2;-2) y luego representarla.

$$\text{Datos} \begin{cases} x_2 = -2 \;;\; y_2 = 4 \\ x_1 = 2 \;;\; y_1 = -2 \end{cases}$$

Primeramente determinamos el valor de la pendiente de la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{-2-2} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

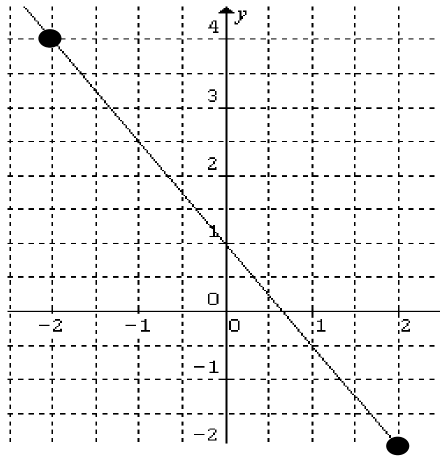
Y ahora reemplazamos todos los valores en la expresión correspondiente:

$$y - (-2) = -\tfrac{3}{2}(x - 2)$$

$$y + 2 = -\tfrac{3}{2}x + \frac{3}{2} \cdot 2 = -\tfrac{3}{2}x + 3$$

$$y = -\tfrac{3}{2}x + 3 - 2$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{2}x + 1}$$



ECUACIÓN DE UNA RECTA A PARTIR DE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS

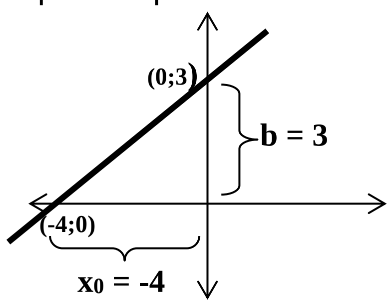
Consideremos una recta de la cual se conocen los puntos de intersección con cada uno de los ejes. La intersección con el eje **y** la denominamos ordenada al origen **b**, en este caso el punto (0;3). La intersección con el eje **x** la denominaremos $\mathbf{x_0}$ y que corresponde al punto (-4;0).

En principio se trata de un caso similar al anterior, por lo que se aplica directamente la ecuación de una recta que pasa por dos puntos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{0-(-4)} = \frac{3}{4}$$

$$y - 0 = \tfrac{3}{4}(x - (-4)) = \tfrac{3}{4}(x + 4)$$

$$y = \tfrac{3}{4}x + \frac{3}{4} \cdot 4 = \tfrac{3}{4}x + 3$$



$$\boxed{y = \frac{3}{4}x + 3}$$

Cuando se presenta una situación como la anterior, es posible utilizar otra forma o expresión de la recta denominada forma segmentaria y que tiene en cuenta solamente los valores de intersección de la recta con los ejes:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{b} = 1$$

Si ahora reemplazamos los valores de **b**, $\mathbf{x_0}$ y resolvemos algebraicamente, llegaremos a la misma expresión que obtuvimos anteriormente:

$$\frac{y}{3} + \frac{x}{-4} = 1$$

$$\frac{y}{3} = 1 - \frac{x}{-4} = 1 + \frac{x}{4}$$

$$y = 3 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right) = 3 + \frac{3}{4}x$$

$$\boxed{y = \frac{3}{4}x + 3}$$

Realiza los siguientes ejercicios:

11) Para cada caso, encuentra la ecuación de la recta y grafique:
    a) tiene pendiente m = $-\frac{3}{5}$ y ordenada al origen b = -2.
    b) tiene pendiente m = -3 y pasa por el punto de coordenadas (0;-4).
    c) es paralela a la recta y = -x +2 y contiene al punto p(-2;1).
    d) es perpendicular a la recta y = -5 + $\frac{1}{4}$x y pasa por el origen de coordenadas.
    e) pasa por los puntos p(-2;3) y q(0;4).
    f) pasa por los puntos r(3;-1) y s(-2;-5).
    g) que pasa por el punto p(2;3) y es paralela a la recta que contiene a los puntos r(0;1) y q(2;5).
12) Un ingeniero debe comprar una maquinaria para elaborar determinados artículos para su empresa, cuyo costo fijo es de $5.253. Si cada artículo tiene un costo de $37 entre mano de obra y material y se deben vender a $58.
    a) Determina si gana o pierde y cuánto, si vende 141 artículos.
    b) Si se desea una utilidad de $ 4.256, ¿cuántos artículos debe vender?
13) Se desea cercar un parque de forma rectangular cuyo perímetro es de 224m. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados, si se quiere que el largo supere al ancho en 4m? Se necesita cercar colocando postes cada 2m. ¿Cuánto gastará en cercar si el metro lineal de cerca le cuesta $15 entre material y mano de obra y los postes tienen un costo de $3 cada uno?

14) Una empresa A de alquiler de vehículos para uso particular, cobra \$15 fijos más \$3 por kilómetro recorrido, mientras que la empresa B cobra sólo el kilometraje recorrido a \$7 cada uno.
   a) Determina la situación para la cuál es indistinto contratar una u otra empresa
   b) Indica cuándo le conviene más una empresa que la otra y por qué.
   c) Grafica en un sistema de ejes coordenados las rectas que modelan la situación.

15) Desde el primero de enero de este año a la fecha, el precio de la harina ha aumentado a un ritmo constante de 2 pesos por mes. El día 1 de julio, el precio alcanzó el precio de \$14.20 por kilo.
   a) Escribe la expresión que coloca al precio en función del tiempo medido en meses.
   b) Determina el precio a fin del año.

16) Tres operarios trabajan una cierta cantidad total de horas semanales en la supervisión del ensamblado de teléfonos satelitales. El tiempo dedicado por el primero de ellos, es igual a 3/5 del tiempo empleado por el segundo y éste emplea 5/8 del dedicado por el tercero.
   a) Determina la expresión que coloca el número total de horas en función del tiempo con respecto al segundo operario.
   b) ¿Cuántas horas semanales permanece en la supervisión el primer operario, si el tiempo total de trabajo entre los tres obreros es de 96 horas?

17) Se coloca, sobre el fuego, un recipiente con agua que está a 10ºC de temperatura. La temperatura aumenta a razón de 15ºC por minuto y al llegar a 100ºC, que es su punto de ebullición, se mantiene a esa temperatura hasta su total ebullición.
   a) Escribe la expresión de la temperatura en función del tiempo transcurrido.
   b) Determina en qué momento alcanza el punto de ebullición.
   c) Indica qué temperatura tiene el agua a los 2 y a los 3 minutos (suponga que la cantidad de agua es suficiente para no evaporarse completamente).

18) Si $s(t)= 3\,t +2$ describe el espacio recorrido por un móvil que se desplaza con MRU (t en segundos y s en metros). Determina:
   a) El espacio recorrido a los 5 segundos, a los 10 segundos y a los 25 segundos.
   b) La ecuación que describe el espacio recorrido por otro móvil que se desplaza a igual velocidad y que está 2 metros adelantado con respecto al primero.
   c) La ecuación que describe el espacio recorrido por otro móvil que se desplaza al doble de velocidad y en el instante $t=0$ se encuentra en el mismo punto que el primero.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Hagamos un poco de historia

*"Los **babilonios** (5000 a.C. – 600 a.C.) ya presentaban, su gran desarrollo algebraico, pero inclusive antes que en ellos, se ha podido encontrar el cálculo de áreas de polígonos regulares, su relación con los lados y hasta el uso de un valor bastante aproximados para el número π.*

Muchos problemas encontrados en textos babilonios se resuelven con un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, como por ejemplo: 1/4 anchura + longitud = 7 manos, y longitud + anchura = 10 manos, y se supone que longitud, área, anchura y volumen eran usadas a modo de incógnitas, ya que aún no se inventaba el alfabeto para usar letras tal como hoy se hace…"

Se debe destacar la importancia de los sistemas, pues en la vida diaria, en resolución de problemas en el campo de cualquier ciencia, surge la necesidad del planteo de trabajar con más de una ecuación y más de una incógnita.

En la sección anterior, se ha estado trabajando con las ecuaciones de la recta y sus aplicaciones, analizando, fundamentalmente su representación gráfica. Esto se debe a que el lenguaje gráfico ayuda a conceptualizar y a veces también permite resolver una situación.

Se enfrentará en esta sección a problemas que requieren el planteo de ecuaciones que presentan dos incógnitas y situaciones que presentan dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a lo cual se le denomina ***sistemas de ecuaciones lineales***.

Introducción

Vamos a comenzar proponiéndote situaciones que se resuelven con el concepto de sistemas de ecuaciones lineales.

1) Juan le hizo las compras en la verdulería a su mamá dos días seguidos. Su mamá le preguntó cuánto cuesta el kg de naranjas y el kg de peras. Juan no lo recuerda pero si recuerda que el primer día gastó $ 6,50 y trajo 1 kg de naranjas y 4 kg de peras, y que el segundo día trajo 5 kg de naranjas y 10 kg de peras y gastó $ 17,50. ¿Se puede conocer el precio de cada fruta con esos datos? ¿Cómo se resuelve?

2) Una persona dispone de $ 300 para gastar entre alimentos y transporte. A gastos de transporte debe destinar a lo sumo un tercio del total. Hallar las posibles soluciones que cumplan con las condiciones dadas.

Para poder resolver las situaciones anteriores, se deberá tener algunos conceptos previos que se trabajarán a continuación.

ECUACIÓN LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Al estudiar la ecuación de la recta, se expresó en forma explícita como:

$$y = a \cdot x + b$$

En cualquiera de los casos, las expresiones analizadas como ecuaciones, representan ecuaciones lineales o de primer grado, ya que ambas variables están elevadas a la primera potencia, con dos incógnitas (**x** e **y**). Desde el punto de vista de las ecuaciones, al tratarse de una sola ecuación con dos incógnitas, posee infinitas soluciones, que gráficamente representan los infinitos puntos que constituyen una recta en el plano cartesiano. Simbólicamente una ecuación con dos incógnitas presenta:

Coeficiente de *y*

$$a \,.\, x + b \,.\, y = c$$

Coeficiente de *x*

Término independiente

Siendo a, b y c números reales

Se analiza el siguiente ejemplo:

En una tabla que registra la relación entre la cantidad de kg de un paquete de azúcar con el precio que tiene el mismo:

Cantidad de kg del paquete (en kg)	*Precio ($)*
1	*7,90*
2	*15,80*
3	*23,70*
3,6	*28,44*
4,5	*35,55*

Se puede describir la situación como ***y = 7,90 . x*** ; teniendo una ecuación con dos incógnitas, que como se sabe que representa a una recta, se tendrán infinitos pares de números (x, y) que son solución para esta ecuación. Entonces los pares de valores mostrados en la tabla representan algunos de esos infinitos puntos. Se pueden obtener nuevas soluciones asignando a ***x*** cualquier valor numérico adecuado y calculando el correspondiente valor de ***y***.

Si en lugar de tener una recta en el plano, se tiene dos rectas en el mismo plano, se está en presencia de lo que se denomina **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, cuya solución se interpretará gráficamente.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Cada ecuación lineal en dos variables se representa gráficamente mediante una recta en el plano. Por lo tanto, una forma de encontrar soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es graficar las rectas correspondientes a cada ecuación y determinar los puntos de intersección si existen.

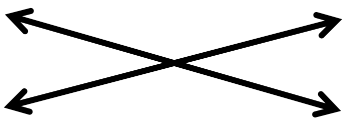
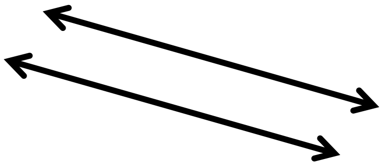
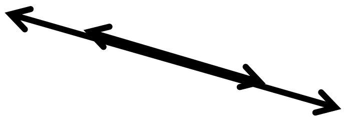
Puede ocurrir que las rectas tengan o no puntos en común. Si los tiene, es porque hay solución para el sistema y se indica que el sistema es ***compatible o consistente***. Pero dependiendo de cuántos puntos sean comunes, se puede encontrar con las siguientes situaciones:

a) Las rectas se *intersecan* en un *único punto*: en este caso existe solución única, se dice que el sistema de ecuaciones lineales es ***compatible determinado (SCD)***.

b) Las rectas sean *paralelas coincidentes*: en este caso existen *infinitas soluciones*, se dice que el sistema de ecuaciones lineales es ***compatible indeterminado (SCI)***.

c) Las rectas sean *paralelas no coincidentes*, en este caso *no existe ningún punto de intersección*, se dice que el sistema de ecuaciones lineales es ***incompatible o inconsistente (SI)***.

Si se recuerde las posiciones relativas de dos rectas en el plano, se puede interpretar y clasificar los sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L.) según se muestra en la tabla:

		
Rectas Secantes Tiene un punto de intersección	**Paralelas No Coincidentes** No tienen ningún punto común o de intersección.	**Rectas Paralelas Coincidentes** Tienen todos sus puntos comunes.
Sistema Compatible Determinado Posee solución única: las coordenadas (x; y) del punto de intersección.	**Sistema Incompatible** El conjunto solución es vacío.	**Sistema Compatible Indeterminado** Tiene infinitas soluciones.

Se verá la siguiente aplicación:

En una tienda de artículos para limpieza, Cristina compra 4 litros de detergente y 5 litros de lavandina por un total de 52 unidades monetarias. Su amiga Liliana compra 3 litros de detergente y 10 litros de lavandina del mismo tipo y pagó en total 64 unidades monetarias. ¿Cuál es el precio –en unidades monetarias– de cada litro de detergente y de cada litro de lavandina?

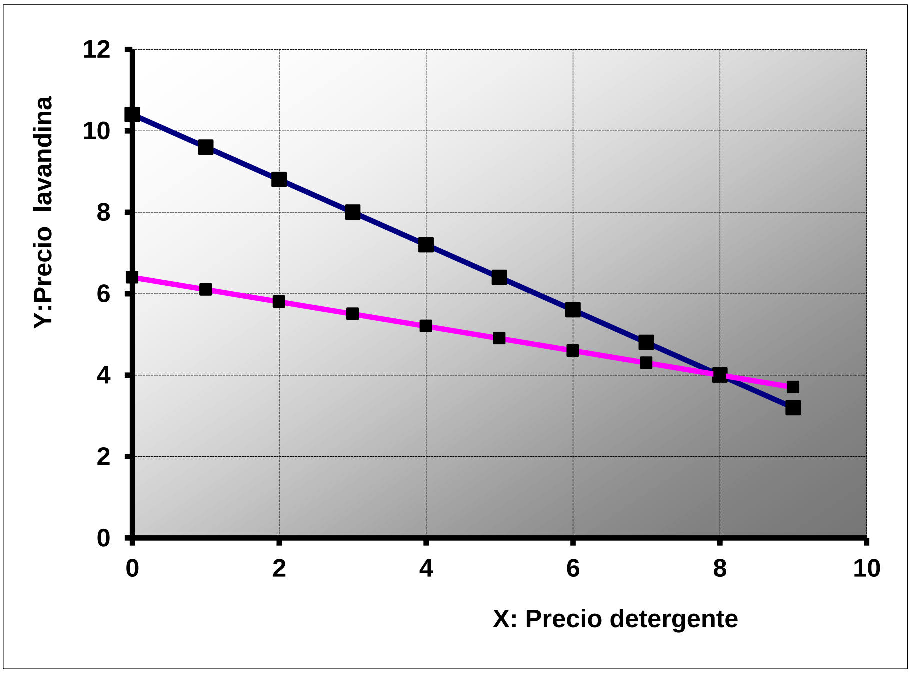
En primer lugar, se planteará la situación en una tabla, llamando ***x*** al número de escobillones e ***y*** al número de trapos de piso comprados

	Litros de detergente ***x($/L)***	Litros de lavandina ***y($/L)***	Precio pagado (unidades monetarias)
Cristina	4	5	52
Liliana	3	10	64

Simbólicamente:
$4x + 5y = 52$
$3x + 10y = 64$

Se observa que cada ecuación representa la ecuación de una recta en el plano. Hallar la solución del sistema planteado significa encontrar los valores de ***x*** y de ***y*** que satisfacen simultáneamente las ecuaciones, lo que gráficamente indica encontrar el punto de intersección entre ambas rectas.
Como no se tiene herramientas para hallar una solución analítica, se resolverá en forma gráfica. La forma explícita de las ecuaciones anteriores es:

$y = \frac{52}{5} - \frac{4}{5}x$ (Cristina)
$y = \frac{64}{10} - \frac{3}{10}x$ (Liliana)
cuya representación es:



Las rectas se cortan en un único punto, de coordenadas x = 8 e y = 4, como se observa en la gráfica. Se dice que el punto del plano (8, 4) es la ***solución*** del sistema, ya que si se reemplaza dichos valores en las ecuaciones, se verifica la igualdad:

4 . 8 + 5 . 4 = 32 + 20 = 52

3 . 8 + 10 . 4 = 24 + 40 = 64

Entonces, se dirá que:

Un par de números reales (x, y) es solución de un sistema de ecuaciones, si al sustituir las incógnitas por dichos números convierte dichas ecuaciones en igualdades numéricas.

Normalmente, al resolver ecuaciones, se le llama ***conjunto solución*** al conjunto formado por todos los valores posibles que satisfacen dicha ecuación. En nuestro problema el conjunto solución es: S = $\{(8,4)\}$

SISTEMAS EQUIVALENTES

Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ x = 5y \end{cases}$$

Es fácil de observar, que la solución del sistema es el par x = 10 e y =2**.** Al verificar: 10 – 2 = 8; 10 = 5 · 2

La solución del sistema dado es única, por lo tanto, el conjunto solución es:

S = {(10, 2)}

Si se toma ahora el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y - x = 8 \end{cases}$$

Y se reemplaza a x por 10 y a y por 2, se observa que se verifican las igualdades, por lo que también es solución de este sistema, o sea que ambos sistemas presentan la **el mismo conjunto *solución***. En este caso, se dice que los ***sistemas son equivalentes***.

Dos sistemas del mismo número de incógnitas son ***equivalentes*** si tienen el mismo conjunto solución.

RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

El concepto de ecuaciones equivalentes es útil para resolver algunos sistemas. Esto se logra haciendo algunas transformaciones como las siguientes:

- Si en un sistema de ecuaciones se permutan dos ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente al primero.

- Si una ecuación de un sistema se multiplica por un número real no nulo, se obtiene un sistema equivalente al primero.

- Si una ecuación de un sistema se sustituye por la suma de ella con otra ecuación del sistema, multiplicada por un número no nulo, se obtiene un sistema equivalente al primero.

En la resolución de sistemas se buscan sistemas equivalentes al dado que sean más fáciles de resolver, por ejemplo, uno donde una incógnita esté despejada.
Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Multiplicando por 3 la primera ecuación

$$\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones y colocando su resultado en la segunda ecuación

$$\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ 4x = 8 \end{cases}$$

Con lo que resulta:

$$\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

El sistema obtenido es equivalente al dado y en él tenemos que el valor de x es 2. Con ese valor reemplazamos en la otra ecuación para obtener *y,* como se hace a continuación:

$$3x - 3y = 3 \quad \rightarrow \quad 3\,.\,2 - 3y = 3 \quad \rightarrow \quad 6 - 3y = 3 \quad \rightarrow \quad y = 1$$

Con lo cual la solución del sistema es **x = 2** e **y = 1**.
Se puede comprobar que los sistemas escritos en cada paso son equivalentes reemplazando en ellos x e y por los números hallados. El conjunto solución del sistema es: S = {(2, 1)}

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Resolver un S.E.L. es determinar el conjunto solución del mismo, para lo cual primero se determina qué tipo de sistema es (SCD, SCI, SI). Para ello se emplean distintos métodos que se puede clasificar como sigue:

- Método Gráfico
- Métodos Analíticos:
  - Igualación
  - Sustitución
  - Reducción por Sumas y Restas
  - Determinantes

Se debe recordar que los distintos métodos, son distintas maneras de llegar al conjunto solución.
De los métodos analíticos sólo se desarrollarán el de igualación y sustitución.

Método Gráfico

El método gráfico consiste en representar en un plano las dos rectas que forman el sistema, como se vio en el ejemplo anterior. Se utiliza las ecuaciones explícitas de las rectas, es decir, *y= f(x)*, y se representa haciendo uso de las ordenas al origen y las pendientes.

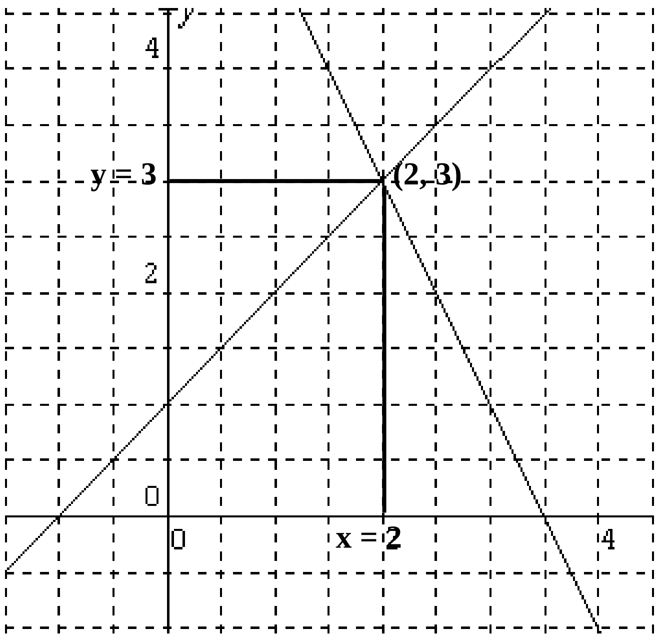
Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Despejando la variable **y** para obtener la ecuación de las rectas:

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ \quad y = x + 1 \end{cases}$$

Representando ambas ecuaciones en el plano cartesiano, se obtiene las rectas de la siguiente figura:



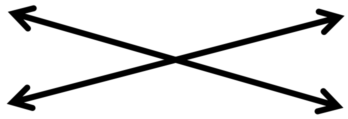
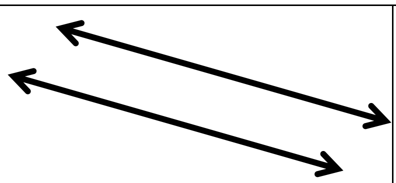
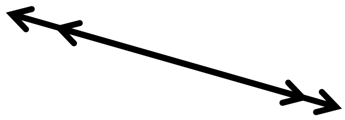
El punto de coordenadas (2, 3) representa la solución del sistema, ya que es el punto de intersección de ambas rectas, es decir, que: S = {(2, 3)}

Análisis de SEL de acuerdo a las pendientes y ordenadas de las rectas que lo constituyen.

Se analiza para rectas no paralelas a los ejes coordenados.

Dado el SEL

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

		
Rectas Secantes Tiene un punto de intersección	**Rectas Paralelas No coincidentes** No tienen ningún punto común o de intersección.	**Rectas Paralelas Coincidentes** Tienen todos sus puntos comunes.
Sistema Compatible Determinado Posee solución única: las coordenadas (x;y) del punto de intersección.	**Sistema Incompatible** No tiene solución.	**Sistema Compatible Indeterminado** Tiene infinitas soluciones.
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ Para a_2 y b_2 no nulos	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ Para a_2, b_2 y c_2 no nulos	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ Para a_2, b_2 y c_2 no nulos

¿Qué sucede si alguna de las rectas son paralelas a los ejes coordenados? Realice un análisis similar al anterior.

…….

…….

Métodos analíticos

1) De Igualación

En este método se despeja de ambas ecuaciones la misma incógnita (que puede ser cualquiera de las dos variables); luego se igualan las expresiones obtenidas, reduciendo el sistema a una ecuación con una incógnita, que se resuelve. Luego se reemplaza el valor obtenido en ambas ecuaciones para encontrar el valor de la otra incógnita.

Este método resulta muy cómodo si se conocen las expresiones explícitas de ambas rectas, como por ejemplo en el caso anterior, cuando se han despejado de ambas ecuaciones la incógnita y.

En el ejemplo anterior:

Ecuación de la recta 1 = **Ecuación de la recta 2**

$$-2x + 7 = x + 1$$
$$-2x - x = 1 - 7$$
$$-3x = -6$$
$$x = 2$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$y = 3$$

También se podría despejar de ambas ecuaciones la incógnita **x**, igualarlas y obtener el valor de la incógnita **y** (de esta manera se estaría usando exclusivamente el método de igualación).

2) De Sustitución

Para resolver por sustitución, se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se reemplaza la expresión obtenida en la otra ecuación, con lo que se reduce el sistema a una ecuación con una incógnita, que se resuelve. Luego se reemplaza el valor obtenido en la expresión despejada originalmente para obtener el valor de la otra incógnita.

En el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \rightarrow y = 7 - 2x & \boxed{\mathbf{1}} \\ x - y = 1 & \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

Sustituyendo la expresión despejada en **1** en la ecuación **2**, resulta:

$$\begin{gathered} x - (7 - 2x) = -1 \\ x - 7 + 2x = -1 \\ 3x = -1 + 7 \\ x = 2 \end{gathered}$$

Reemplazando en **1**

$$y = -2\,.\,2 + 7 \rightarrow y = 3$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Se denominan sistemas homogéneos a aquellos cuyos términos independientes son iguales a cero.

En general:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases}$$

La representación geométrica de una ecuación lineal homogénea con dos incógnitas **x** e **y** es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Por esto, ***los sistemas homogéneos*** son ***siempre compatibles*** porque siempre tienen solución, ya que admiten, por lo menos, la solución **x = 0** e **y = 0**, que se denomina ***solución trivial***.

Si la única solución que admite el sistema es la solución trivial, entonces el sistema es compatible determinado. En caso contrario el sistema tiene infinitas soluciones no triviales, además de la trivial y pasa a ser un sistema compatible indeterminado.

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y clasifíquelos:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases}$

Nota: en el segundo caso encontrará que el sistema es SCI, y el conjunto solución se escribe simbólicamente: S = {(x, y) $\in$ RxR / y = $\frac{1}{3}$ x}

Realiza los siguientes ejercicios:

19) Plantea y resuelve los problemas iniciales.
20) Resuelve gráficamente los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ x = 1 + \frac{1}{3}y \end{cases}$

21) Clasifica y determina analíticamente el conjunto solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 2 = y \\ -2x = 4y - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y = 9 \\ y - x = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y - 2x + 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2y - 2 = -2x \end{cases}$

22) Determina el/los valor/es de k para que el sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = k \end{cases}$

a) sea compatible determinado
b) sea compatible indeterminado
c) sea incompatible.

23) Determina el/los valor/es de *p* y *s* para que el sistema $\begin{cases} px - 6y = 3 \\ -2x - 2s + 4y = 0 \end{cases}$

a) no tenga solución
b) tenga única solución
c) tenga infinitas soluciones.

24) Clasifica, grafica y halla el conjunto solución de los siguientes SEL.

a) $\begin{cases} 2x-5y=0 \\ x-0.3y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{7}{3}x=2y \\ \frac{4}{3}y-\frac{14}{9}x=0 \end{cases}$

25) Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica cada caso.

Si el sistema de ecuaciones lineales es compatible, las rectas tienen la misma pendiente.	
Si en un sistema la solución es única entonces las rectas tienen distintas pendientes.	
Si el sistema de ecuaciones es homogéneo, sólo tiene solución trivial.	
Un punto (x, y) que satisface una sola ecuación de un sistema, es solución del mismo.	
Un sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado cuando tiene dos puntos de intersección entre las rectas que lo forman.	

26) Resuelve los siguientes problemas:

a) Estamos en la ciudad de Mendoza y se quiere controlar a dos ómnibus A y B de larga distancia que se encuentran a una distancia de 340 km entre sí, que emprenden sus respectivos viajes en el mismo instante. El vehículo A, parte de la ciudad de Córdoba hacia la ciudad de Mendoza a una velocidad constante de 90 km por hora y el B, de Mendoza a Córdoba, a una velocidad constante de 80 km por hora. Determine cuántos km se han recorrido y cuál es el tiempo transcurrido cuando los dos ómnibus se encuentran.
b) Se invirtió un total de $30000, una parte al 2% y resto al 4%. Si la ganancia anual es de $1000. ¿Cuánto capital se invirtió a cada tipo de interés?
c) Una compañía de elaboración de software, vende un programa a $220. El costo de elaboración se calcula por el costo fijo que tiene la empresa más los costos de producción. Si se sabe que los costos fijos son de $98000 y los de producción por cada programa es de $80.
   i. Determinar cuántos programas se debe vender para llegar al punto de beneficio nulo.
   ii. ¿Cuántos programas se debe vender para tener una ganancia de $10500?
d) Si el perímetro de un rectángulo es de 28 cm y la diferencia entre la base y la altura es de 2 cm. Calcular el área.
e) Si el largo de un terreno de forma rectangular es igual al triple de su ancho y si se sabe que la cantidad de longitud del contorno del terreno es de 160 metros. ¿Cuál es la medida del largo y del ancho del terreno?
f) Un camión de entregas lleva a un almacén 8 cajas pequeñas y 5 cajas grandes. Si el cobro total por el traslado de las cajas fue de $ 184 y el flete

de una caja grande cuesta $ 3 más que el flete de una caja pequeña. ¿Cuál es el costo del flete de cada tipo de caja?

g) Un agricultor siembra cebada y trigo. Si la cosecha anual alcanza las 12 toneladas y la cosecha de trigo es el doble de la de cebada, más tres toneladas. ¿Cuántas toneladas de trigo y cuántas de cebada se cosecharon?

h) Cuatro hamburguesas y dos gaseosas cuestan $ 79. Si dos gaseosas cuestan 15 pesos más que una hamburguesa. ¿Cuánto cuesta la hamburguesa y cuánto la gaseosa?

i) En un partido de fútbol, las entradas para los socios cuestan $ 50, mientras que los que no son socios deben pagar una entrada de $ 80. Si el número de entradas vendidas para no socios fue 3/4 del número total de localidades vendidas y la recaudación fue de $ 2030000 ¿Cuántas entradas de cada clase se vendieron?

j) Un ciclista que circula por una senda rectilínea a una velocidad constante de 4 m/s, pasa, en un cierto momento, por un puesto de control. Otro ciclista que circula por la misma senda, pero en sentido contrario, a una velocidad constante de 3 m/s, pasa por el mismo puesto 20 segundos después. ¿En qué instante se encuentran los ciclistas?