UNIDAD DIDÁCTICA III

Razones y proporciones

Temario: Razón, proporción. Propiedades. Uso de razones y proporciones. Teorema de Thales. Razones trigonométricas: definición. Teorema de Pitágoras. Resolución de triángulos rectángulos. Ángulos complementarios. Teorema del seno y del coseno. Resolución de triángulos oblicuángulos. Aplicaciones a la geometría. Ejercitación y problemas.

Introducción

Las proporciones fueron usadas y conocidas desde tiempos muy remotos. Mientras que los griegos tuvieron una concepción abstracta y teórica de las proporciones, los matemáticos italianos del Renacimiento utilizaron y divulgaron sus aplicaciones prácticas.

Razones y proporciones

Una razón es el cociente indicado entre dos números reales, es decir, dados dos números reales a y b (b≠0), la razón entre ellos es $\frac{a}{b}$, se lee "**a** es a **b**"

A la igualdad entre dos razones se la llama proporción, es decir siendo a, b, c y d números reales (b≠0 y d≠0), determinan una proporción si se cumple que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se lee " **a** es a **b** como **c** es a **d**".

A los números que componen una proporción, los llamamos:

- a y d : extremos
- b y c : medios

Propiedad fundamental de las proporciones:

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c}$$

Resuelve los siguientes ejercicios:

1) Martín y Pablo tienen ahorrados \$4.500. La cantidad que aportó Martín y la que aportó Pablo guardan entre sí una relación como 5 es a 7. ¿Cuánto aportó cada uno?

2) Determine, si es posible, una proporción con cada una de los siguientes cuartetos de números.
    a. 2; 4; 7 y 14
    b. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 4 \text{ y } 6$
    c. $\frac{10}{3}; \frac{5}{2}; 8 \text{ y } 6$
    d. $\frac{4}{5}; \frac{5}{3}; \frac{6}{5} \text{ y } \frac{5}{2}$

3) Calcule, si es posible, el valor de la incógnita:

a. $\frac{0,3}{0,5} = \frac{1,5}{y}$

b. $\frac{z+1}{0,75} = \frac{4}{1,25}$

c. $\frac{(0,1+0,3)^2}{\frac{2}{5}-0,1} = \frac{1}{x}$

d. $\frac{z+4}{0,3-2} = \frac{z+1}{3-0,2}$

4) Plantea los siguientes problemas y resuelve:

a. Tres hermanas decidieron comprar un billete de la lotería provincial, para ello aportaron \$5, \$10 y \$25, respectivamente. Según lo acordado, si ganan, el millón de pesos del premio, lo repartirían en forma proporcional a lo aportado para la compra del billete, es decir que la fracción del premio que le corresponderá a cada una será respectivamente igual a la fracción aportada para la compra del billete. Julia, la menor, está muy ilusionada y se puso a hacer una tabla para calcular cuánto le tocaría a cada una. Completa la siguiente tabla:

	Dinero Aportado		Dinero Recibido	
	Cantidad (\$)	Fracción del total	Cantidad (\$)	Fracción del total
	5			
	10			
	25			
Total				

b. La abuela Dora trajo una caja con 98 bombones y los quiere repartir entre sus nietos más chicos – Agostina, Federico y Lucas – en forma proporcional a sus edades. Agostina tiene tres años, Federico, seis y Lucas, cinco. ¿Cuántos bombones le tocarán a cada uno?

Mientras repartía los bombones, Dora comentaba: "menos mal que son justo 98, porque si hubieran sido 100 bombones, no habría podido repartirlos de esta forma". ¿A qué se refería?

c. Los Rodríguez y los Liotta alquilaron una casa quinta para pasar sus vacaciones, y acordaron repartir el costo del alquiler en forma proporcional a la cantidad de integrantes de cada familia. La familia Rodríguez está compuesta por el padre, la madre y cuatro hijos, mientras que los Liotta son el padre, la madre, un hijo y la abuela. ¿Cuánto más deben abonar los Rodríguez, si el alquiler es de \$2500?

Teorema de Thales

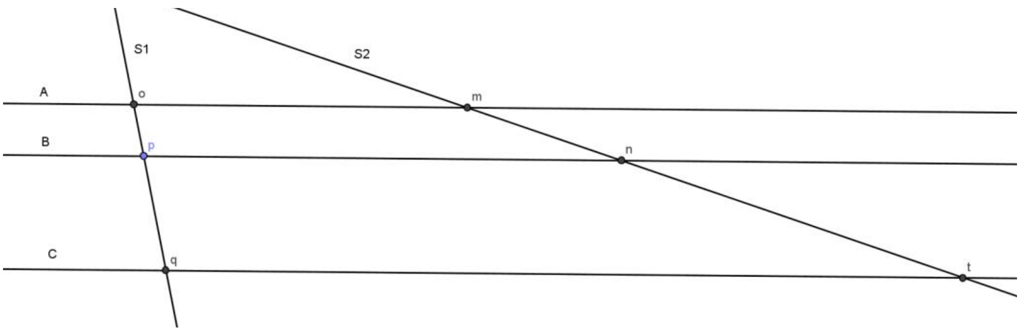
¿Has pensado alguna vez cómo es posible medir ciertas alturas, a las cuales no podemos llegar con una escalera u otro instrumento?

Thales de Mileto pudo calcular la altura de la pirámide de Keops sin medirla directamente. En un viaje a Egipto midió, en forma indirecta, la altura de la pirámide de Keops. Con sólo medir la longitud de un bastón, la sombra de éste y la sombra de la pirámide, planteó la proporción que le permitió calcular la altura inaccesible:

$$\frac{\textit{altura de la pirámide}}{\textit{sombra de la pirámide}} = \frac{\textit{altura del bastón}}{\textit{sombra del bastón}}$$

Lo que más fama le ha dado en el campo de la geometría es el teorema que lleva su nombre y dice:

"Si tres o más paralelas son cortadas por dos o más secantes, la razón de las longitudes de los segmentos determinados en una de las paralelas, es igual a la razón de las longitudes de los segmentos correspondientes determinados por las otras paralelas"



$$\boldsymbol{A \parallel B \parallel C} \qquad \boldsymbol{S_1 \; y \; S_2 \; secantes} \qquad \frac{\overline{op}}{\overline{pq}} = \frac{\overline{mn}}{\overline{nt}}$$

Por ejemplo:

Sabiendo que las rectas A, B y C son paralelas, y además que la longitud del segmento $\overline{op}$ es de 4 cm, la longitud de $\overline{pq}$ 10 cm y la longitud de $\overline{nt}$ de 14 cm. ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{mn}$?

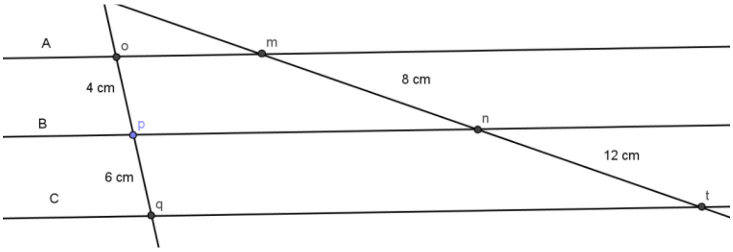
$$\frac{4\,cm}{10\,cm} = \frac{\overline{mn}}{14\,cm}$$

$$\frac{4\ cm.14\ cm}{10\ cm} = \overline{mn}$$

$$5,6\ cm = \overline{mn}$$

Y como también vale el teorema recíproco, podemos contestar lo siguiente:

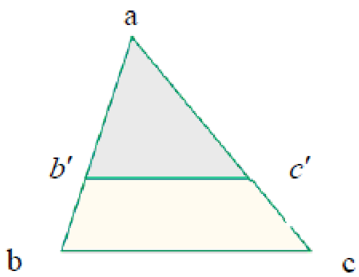
Sabiendo que las rectas A y B son paralelas. ¿Podemos afirmar que C es paralela a las rectas A y B?



Sí, porque se cumple el teorema de Thales, ya que $\frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{8\text{ cm}}{12\text{ cm}}$

El teorema de Thales en un triángulo

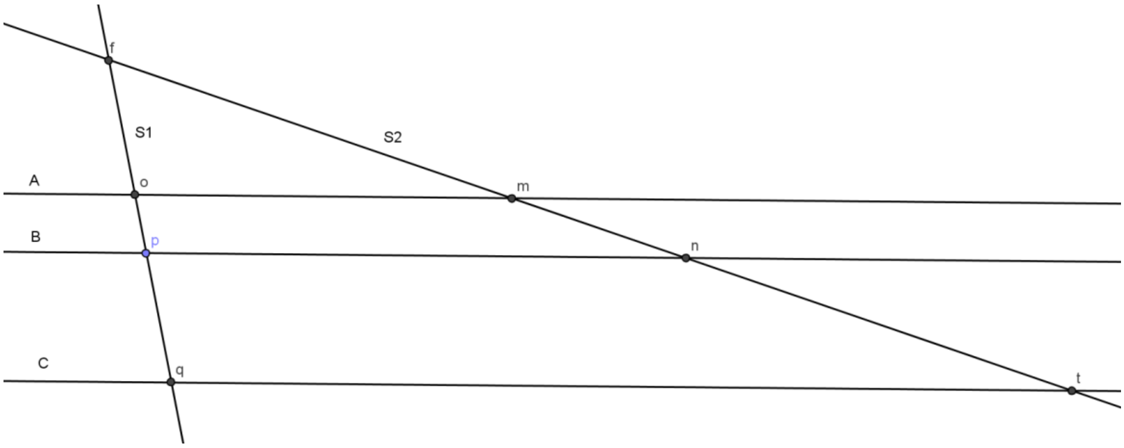
Dado un triángulo $\overset{\Delta}{abc}$, si se traza un segmento paralelo, $\overline{b'c'}$, a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo $\overset{\Delta}{ab'c'}$ cuyos lados son proporcionales a los del triángulo $\overset{\Delta}{abc}$.



$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ab'}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ac'}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}}$$

Resuelve los siguientes ejercicios:

5) A partir de la siguiente figura, resuelve cada ítems según los datos y las incógnitas:



$\boldsymbol{A \parallel B \parallel C}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{S1\ y\ S2\ secantes}$

a. Datos: medida de $\overline{op}$ 8 cm, medida de $\overline{mn}$ 27 cm, medida de $\overline{nt}$ 35 cm

   Incógnita: medida de $\overline{pq}$

b. Datos: medida de $\overline{om}$ 12 cm, medida de $\overline{pn}$ 18 cm, medida de $\overline{fp}$ 30 cm

   Incógnita: medida de $\overline{fo}$

c. Datos: medida de $\overline{oq}$ 20 cm, medida de $\overline{op}$ 8 cm, medida de $\overline{mn}$ 12 cm

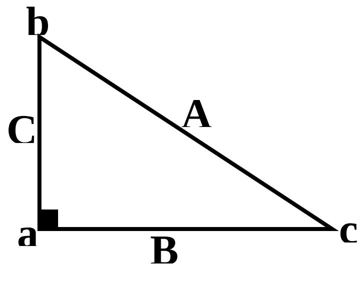
   Incógnita: medida de $\overline{nt}$

Teorema de Pitágoras

Este teorema fue propuesto por Pitágoras de Samos (582 AdC - 496 AdC), filósofo y matemático griego, su importancia radica en que relaciona los lados de un triángulo con el hecho de ser rectángulo.

En un triángulo rectángulo de vértices a, b, c y lados A, B, C donde:

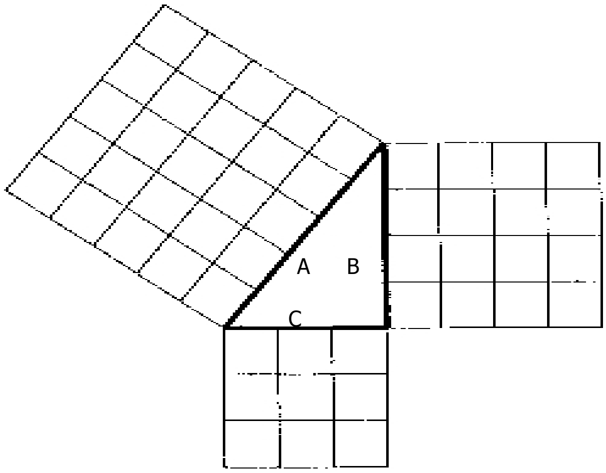
C = cateto (lado opuesto al ángulo agudo $\hat{c}$)
B = cateto (lado opuesto a ángulo agudo $\hat{b}$)
A = hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto)



El Teorema de Pitágoras establece que un triángulo es rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa:

$$\boxed{A^2 = B^2 + C^2}$$

Esta expresión matemática suele interpretarse geométricamente como indica la figura siguiente:



Se puede observar que se utilizó para el cateto C una medida igual a 3 unidades de medida; para el cateto B, 4 unidades de medida y para la hipotenusa A, 5 unidades de medida.

Si se utiliza la expresión con los valores dados: $3^2+4^2=5^2 \Leftrightarrow 9+16=25$

Contando entonces los cuadrados formados de lado = 1 unidad de medida se verifica en forma empírica

También es cierto que si una terna de números positivos (por ejemplo t,s,r) verifica la relación $t^2=s^2+r^2$, ellos determinan un triángulo rectángulo, cuyos lados tienen medidas t, s y r respectivamente.

Aplicación: La expresión del Teorema de Pitágoras puede usarse para trazar ángulos rectos, esta es una estrategia muy usada en la construcción para trazar sobre el terreno estos ángulos y así hacer paredes a 90º; se sabe llamar a esta práctica *escuadra del albañil* y se identifica con los números *Tres Cuatro Cinco*, como fue expuesto si dos catetos tienen 3 unidades de medida y 4 unidades de medida respectivamente y si la hipotenusa es igual a 5 unidades de medida, el triángulo formado es un rectángulo siendo el ángulo recto el opuesto a la hipotenusa.

Resuelve los siguientes ejercicios:

6) En un triángulo rectángulo un cateto mide 45 m y el otro 40 m. ¿Cuánto mide hipotenusa?
7) Sabiendo que un triángulo es rectángulo, si un cateto es igual a 5 m y la hipotenusa igual a 10 m. ¿Cuándo mide el otro cateto?
8) Justifique y argumente por qué pueden usarse los triángulos rectángulos para determinar el ángulo de inclinación con que nos llegan los rayos solares.

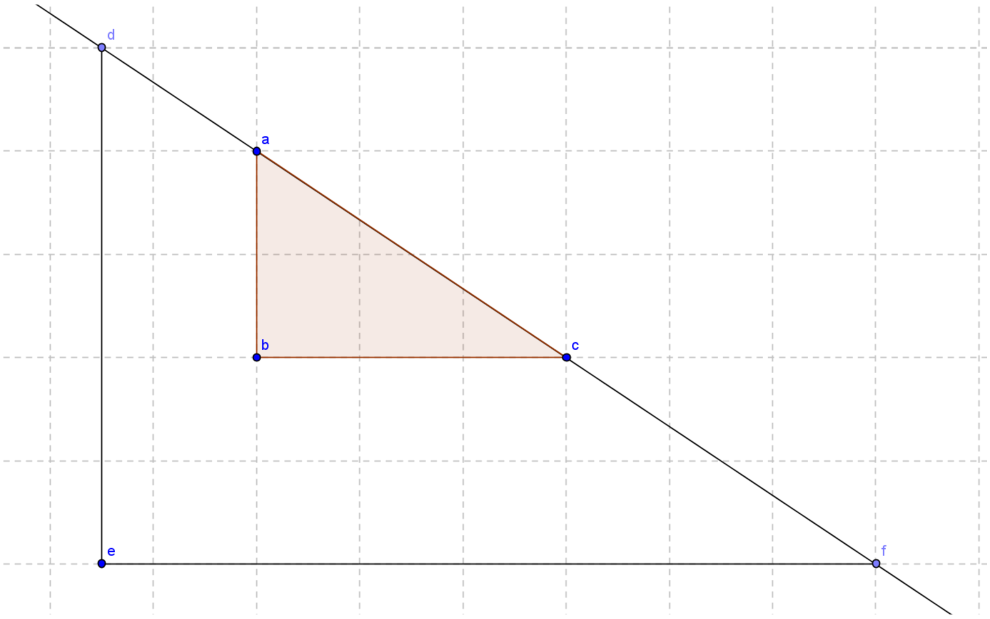
Antes de comenzar con el siguiente tema, recordemos algunas propiedades de los triángulos

- La suma de los ángulos internos de un triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ es 180°. Es decir $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^0$
- En todo triángulo, un ángulo interior es igual 180^0 menos la suma de los otros dos ángulos internos. Es decir

  $\hat{a} = 180° - (\hat{b}+\hat{c})$; $\hat{b} = 180° - (\hat{a}+\hat{c})$; $\hat{c} = 180° - (\hat{a}+\hat{b})$
- En todo triángulo, un ángulo exterior es suplementario al interior adyacente y es igual a la suma de los otros dos ángulos internos no adyacentes.

Razones trigonométricas

Dado los siguientes triángulos rectángulos:



Mide sobre la figura (con la mayor exactitud posible), los segmentos $\overline{de}, \overline{ef}, \overline{df}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}$, y calcula las siguientes razones:

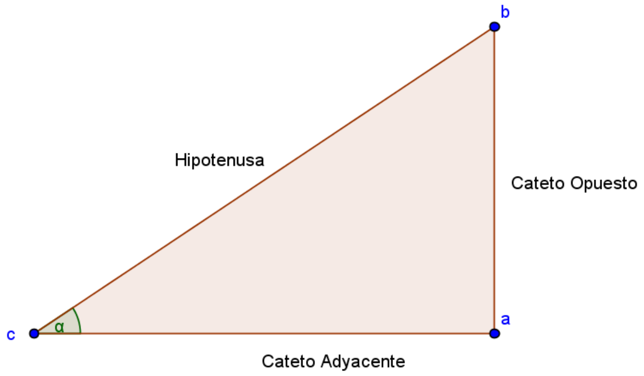
$\dfrac{\overline{de}}{\overline{ef}}$	$\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$
$\dfrac{\overline{de}}{\overline{df}}$	$\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$
$\dfrac{\overline{ef}}{\overline{df}}$	$\dfrac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$

Con las razones anteriores, ¿puedes construir proporciones? Ten en cuenta los errores de medición.

Escribe tus conclusiones……………………………………………………………………………………………….

……..

En un triángulo rectángulo, para el ángulo agudo $\hat{\alpha}$ se verifica:



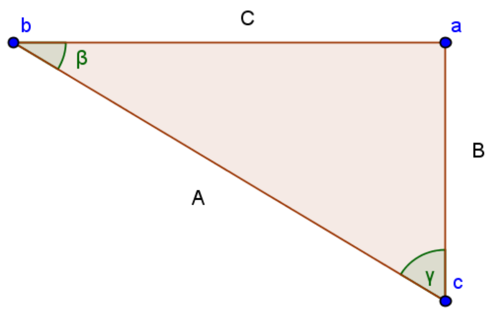
$$sen\ \hat{\alpha} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \hat{\alpha}}{hipotenusa} \qquad cosec\ \hat{\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto\ a\ \hat{\alpha}}$$

$$cos\ \hat{\alpha} = \frac{cateto\ adyacente\ a\ \hat{\alpha}}{hipotenusa} \qquad sec\ \hat{\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente\ a\ \hat{\alpha}}$$

$$tan\ \hat{\alpha} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \hat{\alpha}}{cateto\ adyacente\ a\ \hat{\alpha}} \qquad cotan\ \hat{\alpha} = \frac{cateto\ adyacente\ a\ \hat{\alpha}}{cateto\ \ opuesto\ a\ \hat{\alpha}}$$

Por ejemplo:

Dado el siguiente triángulo rectángulo en $\hat{\boldsymbol{a}}$, donde el lado **A** mide 2 cm y el ángulo $\hat{\beta}$ es de 60°.



Calculemos las medidas de los restantes elementos:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{180}^{\boldsymbol{o}} - (\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{90}^{\boldsymbol{o}})$$

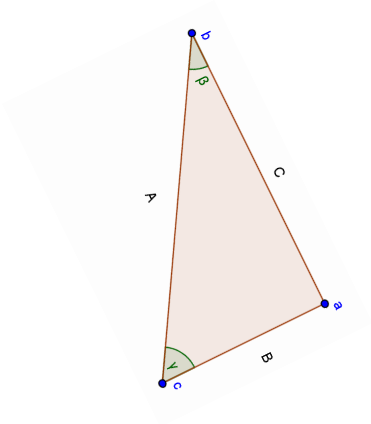
$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{30}^{\boldsymbol{o}}$$

$$\boldsymbol{sen}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}{\boldsymbol{hipotenusa}} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$$

Luego

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{sen}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{cm}\ \ \boldsymbol{sen}\ \mathbf{60}^{\boldsymbol{o}} \cong \mathbf{1,732}\ \boldsymbol{cm}$ (redondeado a tres cifras significativas)

$$\boldsymbol{cos}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}{\boldsymbol{hipotenusa}} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{A}}$$



Luego

$\boldsymbol{C = A\ cos\hat{\beta} = 2\ cm\ \ cos\ 60\ ° = 1\ cm}$

Verifiquemos los valores hallados con el teorema de Pitágoras

$A^2=B^2+C^2$?

$A^2= 2^2= 4$

$B^2+C^2= 1{,}732\ ^2+\ 1^2= 3{,}998$ redondeando a tres cifras significativas, si hubiéramos usado el valor exacto del seno de 60°, nos daría igual a 4.

Otro ejemplo:

Dado el siguiente triángulo rectángulo en $\boldsymbol{a}$, donde el lado **A** mide 10 cm y el lado **B** mide 6 cm.

Calculemos las medidas de los restantes elementos (utilizando la calculadora).

$sen\hat{\beta} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{B}{A} = \frac{6\ cm}{10\ cm} = 0{,}6$ luego β= 36,87°

$cos\hat{\gamma} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{B}{A} = \frac{6\ cm}{10\ cm} = 0{,}6$ luego γ=53,13°

Verifiquemos los ángulos obtenidos, con la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo:

$\hat{\gamma}+\hat{\beta}+90°=180°$?

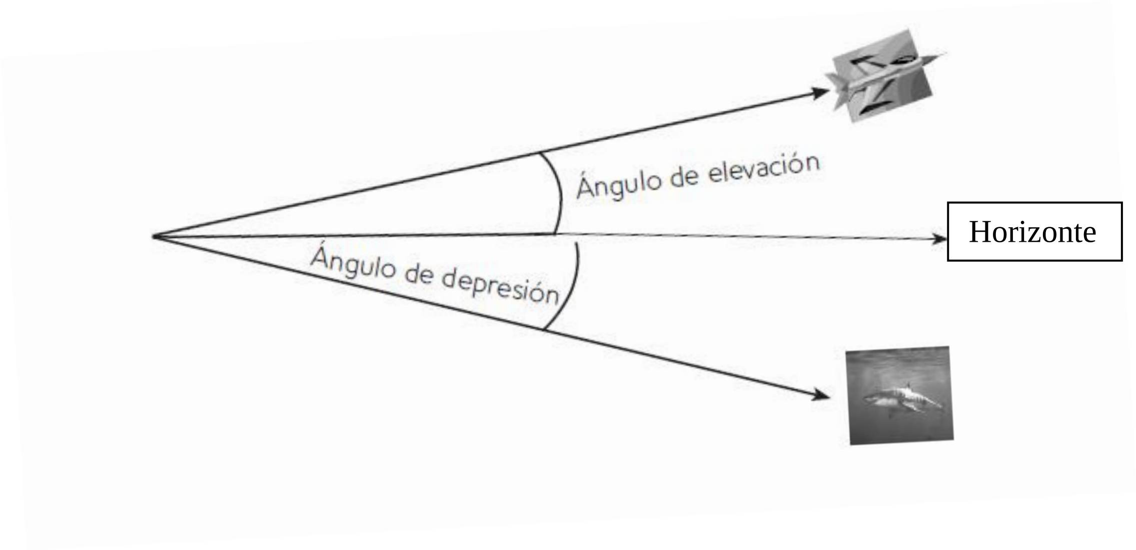
$\hat{\gamma}+\hat{\beta}+90°= 36{,}87°+53{,}13°+90°=180°$

Calculemos ahora la medida del lado **C**, usando el Teorema de Pitágoras:

Como el triángulo es rectángulo en **a**, se verifica que $A^2=B^2+C^2$, luego

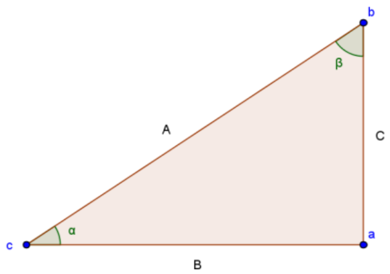
$C^2=A^2- B^2$ es decir que $C = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{(10\ cm)^2 - (6\ cm)^2} = 8\ cm$

Para tener en cuenta: Cuando una persona ubicada en un punto dado, observa un objeto que está a mayor altura que él, el ángulo formado entre la visual y el horizonte se llama ángulo de elevación. Por el contrario, si el objeto se encuentra a menor altura que la persona, el ángulo es de depresión. Por ejemplo, cuando se visualiza un avión despegar, el observador lo hace con un ángulo de elevación y cuando una persona a nivel del mar observa un objeto dentro del mar lo hace con un ángulo de depresión.



Resuelve los siguientes problemas, realizando un esquema que te ayude a interpretarlos:

9) Dado el siguiente triángulo rectángulo, resuelve cada ítems según los datos y las incógnitas:



a. Datos: lado B=15 cm, ángulo $\hat{\alpha}$ =32°

Incógnitas: lados A y C, ángulo $\hat{\beta}$

b. Datos: lado A=18 cm, lado C=13 cm

Incógnitas: lado B, ángulos $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\beta}$

c. Datos: lado A=50 cm, ángulo $\hat{\alpha}$ =21°

Incógnitas: lados B y C, ángulo $\hat{\beta}$

10) El perímetro de un triángulo isósceles es de 26 cm y su base (que en este caso es el lado desigual) mide 10 cm. ¿Cuál es el valor de sus ángulos interiores?

11) ¿Cuál es el área de un triángulo isósceles, cuya base mide 18 cm y el ángulo opuesto a ella mide 34º50′?

12) En un triángulo $\overset{\Delta}{\boldsymbol{abc}}$ rectángulo en **b**, el lado $\overline{\boldsymbol{bc}}$ mide 7cm y el ángulo $\hat{\boldsymbol{a}}$ mide 28°. Calcula la medida de los lados $\overline{\boldsymbol{ab}}$ y $\overline{\boldsymbol{ac}}$.

13) Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m, cuando los rayos del sol forman un ángulo de 45º con el suelo.

14) Alfonso está haciendo volar su barrilete. Ha soltado ya 100 m de hilo y observa que el ángulo que forma la cuerda del barrilete con la horizontal es de 60º. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el barrilete, sabiendo que Alfonso mide 1,65 m?

15) Un observador se encuentra, al nivel del suelo, a 200 m de la base de una torre de TV. Desde ahí contempla la punta de la torre bajo un ángulo de 26º ¿Qué altura tiene la torre, si los ojos del observador están a 1,63 m del piso?

16) ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol cuando un objeto de 6 m proyecta una sombra de 10,3 m?

17) Una escalera tiene 39 escalones y ningún descanso. Cada escalón tiene 30 cm de profundidad y 26 cm de alto. ¿Cuál es la altura de la escalera y el ángulo que forma con el piso?

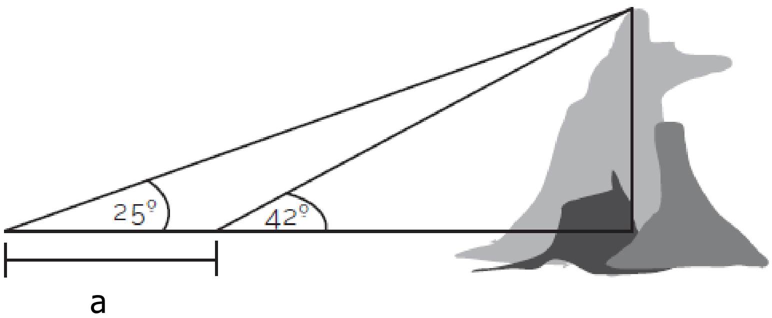
18) Un observador contempla la parte superior de un edificio de 173 m de altura. Si sus ojos están a 1,6 m del piso y el ángulo de elevación es de 27º 50´. ¿A qué distancia se encuentra el observador del edificio?

19) Una torre de 40 m de altura está situada a la orilla de un lago. Desde la punta de la torre el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 30º. ¿Cuál es el ancho del lago?

20) Un árbol proyecta una sombra de 16,75 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 32º. Calcule la altura del árbol.

21) Desde un faro colocado a 40 metros sobre el nivel del mar, se observa un barco con un ángulo de depresión de 55º. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

22)Un topógrafo determina que desde un punto **a** (en el suelo) el ángulo de elevación hasta la cima de la montaña mide 25º. Cuando él se encuentra en un punto a 200 metros más cerca de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 42º. ¿Cuál es la altura de la montaña? (Suponga que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre la misma recta).



Relación entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios.

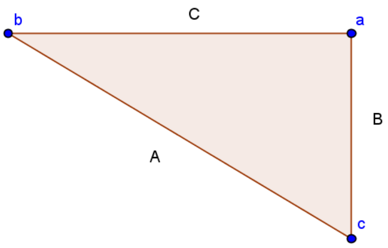
Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas es 90°, por ejemplo un ángulo de 25° y otro de 65° son complementarios.

Por lo cual en un triángulo rectángulo, los ángulos no rectos, son complementarios. Argumenta en el siguiente espacio la afirmación anterior:

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

Veamos entonces ahora las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios:



En este triángulo rectángulo los ángulos $\hat{\boldsymbol{b}}$ y $\hat{\boldsymbol{c}}$ son complementarios.

Escribamos las razones trigonométricas de estos ángulos:

$$sen\ \hat{b} = \frac{B}{A} \qquad sec\ \hat{b} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$
$$cos\ \hat{b} = \frac{C}{A} \qquad cosec\ \hat{b} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$
$$tan\ \hat{b} = \frac{B}{C} \qquad cotan\ \hat{b} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$sen\ \hat{c} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \qquad sec\ \hat{c} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$
$$cos\ \hat{c} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \qquad cosec\ \hat{c} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$
$$tan\ \hat{c} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \qquad cotan\ \hat{c} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Concluye de acuerdo a los resultados anteriores:

Si un ángulo $\hat{\boldsymbol{b}}$ es complementario a $\hat{\boldsymbol{c}}$, entonces el seno de $\hat{\boldsymbol{b}}$ es igual a ....

Si un ángulo $\hat{\boldsymbol{b}}$ es complementario a $\hat{\boldsymbol{c}}$, entonces el coseno de $\hat{\boldsymbol{b}}$ es igual a ....

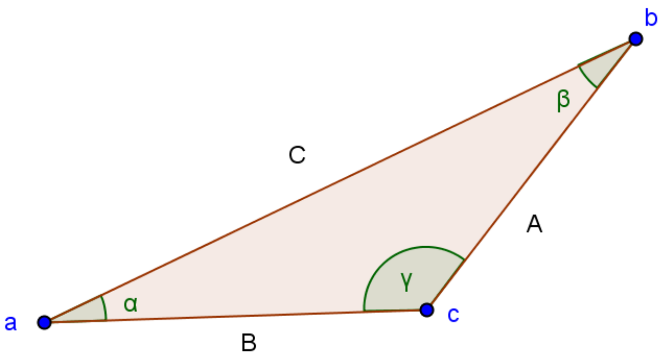
Si un ángulo $\hat{\boldsymbol{b}}$ es complementario a $\hat{\boldsymbol{c}}$, entonces la tangente de $\hat{\boldsymbol{b}}$ es igual a ....

Relaciones entre lados y ángulos de triángulos oblicuángulos

Hasta ahora hemos trabajado con triángulos rectángulos en donde se definen las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Pero qué pasa en los triángulos que no son rectángulos…. A los triángulos no rectángulos se los llama oblicuángulos. En los triángulos oblicuángulos se establecen otras relaciones que veremos a continuación.

Teorema del seno

Sea $\overset{\Delta}{\boldsymbol{abc}}$ un triángulo oblicuángulo, de lados A, B y C.

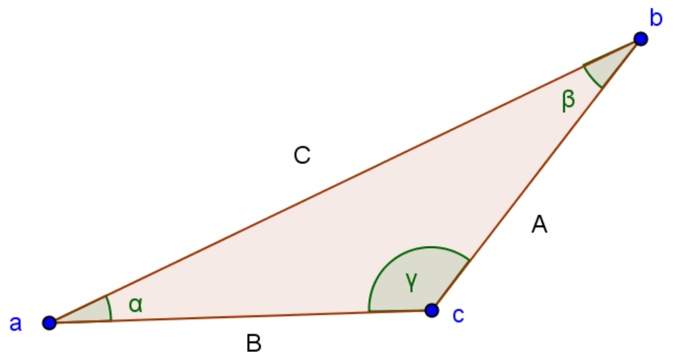


Si $\hat{\alpha}$ es el ángulo opuesto al lado A, $\hat{\beta}$ es el ángulo opuesto al lado B y $\hat{\gamma}$ es el ángulo opuesto al lado C, se verifica que:

$$\frac{\boldsymbol{sen\ \hat{\alpha}}}{\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{sen\ \hat{\beta}}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{sen\ \hat{\gamma}}}{\boldsymbol{C}}$$

Teorema del coseno

Sea $\overset{\Delta}{abc}$ un triángulo oblicuángulo, de lados A, B y C.



Si $\hat{\alpha}$ es el ángulo opuesto al lado A, $\hat{\beta}$ es el ángulo opuesto al lado B y $\hat{\gamma}$ es el ángulo opuesto al lado C, se verifica que:

$$\boldsymbol{A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B\,C\,cos\,\hat{\alpha}}$$

Ejemplos:
Sean A, B, y C las medidas de los lados de un triángulo, mientras que $\hat{a}, \hat{b}\ y\ \hat{c}$ son las medidas de los ángulos opuestos a esos lados, respectivamente.

- Si son conocidas las medidas de los lados A y B, y la medida del ángulo $\hat{a}$, ¿cómo se podría calcular la medida del ángulo $\hat{b}$?
- Si son conocidas las medidas de los ángulos $\hat{a}\ y\ \hat{b}$, ¿cómo se podría calcular la medida del lado A?
- Si son conocidas las medidas de los lados A y B, y la medida del ángulo $\hat{a}$, ¿cómo se podría calcular la medida de lado C?

Resuelve los siguientes ejercicios

23)En los siguientes ítems: A, B, y C son las medidas de los lados de un triángulo, mientras que $\hat{a}, \hat{b}\ y\ \hat{c}$ son las medidas de los ángulos opuestos a esos lados, respectivamente. A partir de cada grupo de datos, calcula el resto de las medidas desconocidas en cada caso:

a) A = 10 cm B= 12 cm $\hat{c}$ = 35º

b) A = 7 m B = 6 m C = 4 m

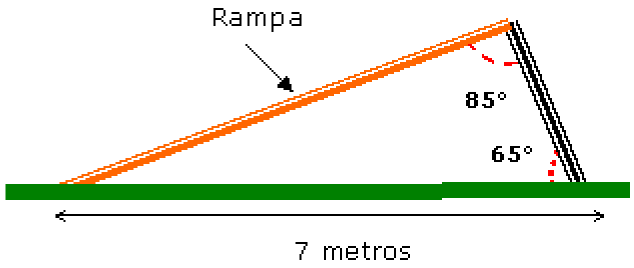
c) C= 10 cm $\hat{b}$ = 40º $\hat{c}$ = 70º

24)Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 metros, y entre Berto y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20º. Realiza un esquema de la situación y calcula la distancia entre Alberto y Camilo.

25)Una valla que rodea un terreno de forma triangular, mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y 60º en el ángulo que forman entre ambos. Realiza un esquema de la situación y calcula cuánto mide el perímetro de la valla.

26)Un avión sale de un aeropuerto y se eleva manteniendo un ángulo constante de 10º hasta que logra una altura de 6 km. Determina a qué distancia horizontal del aeropuerto se encuentra en ese momento.

27)Un arquitecto necesita construir una rampa como se muestra en la siguiente figura:



Calcula cuál es la longitud de esta rampa.

28)Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8 metros del suelo y observa el edificio de enfrente de la siguiente manera: la parte superior, con un ángulo de elevación de 35º y la parte inferior, con un ángulo de depresión de 43º. Realiza un esquema de la situación y determina la altura del edificio de enfrente.

29)Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50º, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60º. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 km del pueblo B. Realiza un esquema de la situación y calcula la distancia entre los pueblos A y B.

30)Dos lados adyacentes de un paralelogramo se cortan en un ángulo de 36º y tienen longitudes de 3 y 8 cm. Determina la longitud de la diagonal menor.

31)Dos trenes parten simultáneamente de una estación en dirección tal que forman un ángulo de 35º. Uno va a 15 km/h y el otro a 25 km/h. Determina a qué distancia se encuentran separados después de dos horas de viaje.

32)Dos observadores colocados a 110 metros de separación en los puntos a y b, en la orilla de un río, están mirando una torre en la orilla opuesta en el punto c. Midieron los ángulos $c\hat{a}b$ y $c\hat{b}a$, que fueron de 43º y 57º respectivamente. Realiza un esquema de la situación y calcula a qué distancia está el primer observador de la torre.

33)Luego de un choque muy fuerte con un tractor, el poste de una red eléctrica no quedó perpendicular al suelo. Su sombra es de 5,5 m cuando el ángulo de elevación del sol es de 68º, con respecto a la horizontal. Realiza un esquema de la situación y calcula la variación del ángulo de inclinación entre el poste y el suelo, si antes del choque proyectaba una sombra de 5 m a la misma hora.

34)Dos corredores A y C parten del mismo punto b a las 12:00 del día. Uno de ellos se dirige hacia el norte a 36 km por hora, y el otro, a 68º al noreste a 38 km por hora. Realiza un esquema de la situación y calcula la distancia entre ellos a las 3:00 de la tarde.