UNIDAD DIDÁCTICA IV

TRIGONOMETRÍA

Temario:

Ángulos orientados en un sistema cartesiano. Sistema de medición de ángulos: sexagesimal y circular. Circunferencia trigonométrica. Valores de las razones trigonométricas en cualquier cuadrante. Ángulos suplementarios, ángulos que difieren en π y en $\pi/2$. Ángulos opuestos y ángulos que difieren en más de un giro. Cálculo de arcos y sectores circulares. Problemas de aplicación.

Introducción:

"La trigonometría fue desarrollada por astrónomos griegos que consideraban al cielo, como el interior de una esfera, de modo que resultó natural estudiar primero los triángulos sobre una esfera, (por Menelao de Alejandría, año 100 a de C) y que los triángulos en el plano fueron estudiados mucho después. El primer tratado sistemático de trigonometría plana y esférica fue escrito por el astrónomo persa Nasîr ed- din alrededor del 1250 a. de C. Regiomontano (1436-1476) es el autor principal a quien se debe el traslado de la trigonometría astronómica a la matemática. Su trabajo fue mejorado por Copérnico (1473-1543) y por el alumno de Copérnico Rhaeticus (1514 –1576). La obra de Rhaeticus fue la primera en definir las seis funciones trigonométricas como razones entre lados de un triángulo, aunque no le dio a las funciones sus nombres actuales. El crédito de esto se lo lleva Thomas Fincke (1583), pero en su época esa notación no fue aceptada universalmente. La notación quedó establecida a partir de los libros de texto de Leonardo Euler (l707-1783)." (Michael Sullivan, Precálculo, pág. 322).

Desde entonces la trigonometría ha venido evolucionando desde su uso por agrimensores, navegantes e ingenieros, hasta las aplicaciones actuales, como el movimiento de las mareas en los océanos, el alza y caída de los recursos alimenticios en determinadas condiciones ecológicas, patrones de ondas cerebrales y muchos otros fenómenos, no podemos discutir su importante papel en la investigación atómica, electricidad, termodinámica, en el estudio de las vibraciones mecánicas, en óptica y en cada área donde existan fenómenos *iterativos* (periódicos).

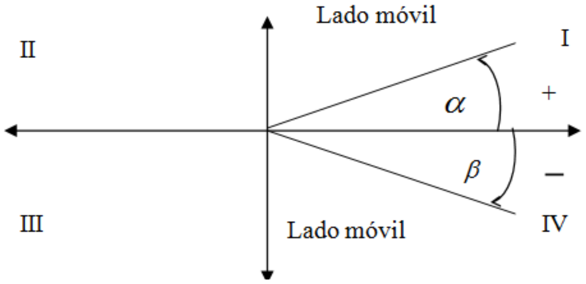
Desarrollo

La palabra trigonometría proviene del griego tri (tres), gono (ángulos) y metría (medida), o sea etimológicamente quiere decir medida de triángulos. Consiste en relacionar la medida de los ángulos y lados de un triángulo.

Es de gran utilidad cuando se trata de medir longitudes inaccesibles al ser humano, como lo son por ejemplo, la altura de montañas, torres y árboles, o la anchura de ríos, pantanos y lagos.

Ángulos orientados en un sistema cartesiano.
Los ángulos en trigonometría se consideran engendrados por la rotación de una semirrecta que parte del origen de coordenadas, desde una posición inicial que coincide con el semieje positivo de las x (lado inicial del ángulo**),** hasta una posición final (lado terminal). Puede tomar cualquier valor real, puede girar más de un giro.
Si el sentido de rotación es antihorario (contrario a las agujas del reloj) se conviene que el ángulo es positivo; cuando el sentido es horario, se genera un ángulo negativo.

α : es positivo y pertenece al primer cuadrante
β : es negativo y pertenece al cuarto cuadrante

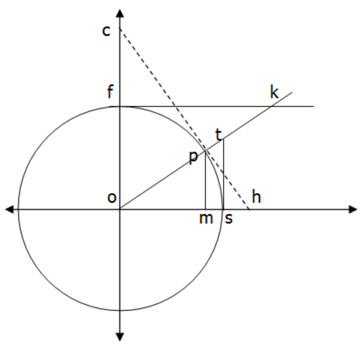


Ángulos congruentes: son los que difieren en un número exacto de giros.
Dado un ángulo α son congruentes con él: α + 1 giro
α + 2 giros
.
.
α + K giros (K $\in \mathbb{Z}$)

Circunferencia Trigonométrica.

Es aquella cuyo centro es el origen de coordenadas de un sistema de coordenadas cartesiano ortogonales , y el radio vale 1 unidad de longitud.

Representación de las Razones Trigonométricas en la Circunferencia Trigonométrica.
Considere un águlo $\hat{\alpha}$ arbitrario, en el primer cuadrante, orientado en el sentido positivo, tal que el lado fijo coincida con el semieje positivo de las x, y el lado móvil esté en el primer cuadrante.(El lado móvil puede estar en cualquier cuadrante son igualmente válidas las relaciones obtenidas, basta considerar el signo que le corresponde a cada una de acuerdo al cuadrante que se encuentre).



Considere $\alpha = p\hat{o}m$

$sen\alpha = \dfrac{\overline{pm}}{\overline{op}} = \dfrac{\overline{pm}}{1} = \overline{pm}$ por tanto la medida del segmento (incluye al signo aunque quedó sin unidades pues éstas se cancelaron con las del radio en la división[1]) es el valor de *sen*α. Esta medida no es otra cosa que la ordenada del punto móvil " p".

$$\boxed{sen\,\alpha = \overline{pm}}$$

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{om}}{\overline{op}} = \dfrac{\overline{om}}{1} = \overline{om}$ (o sea la abscisa del punto móvil "p ").

$$\boxed{\cos\alpha = \overline{om}}$$

$\overset{\Delta}{omp} \cong \overset{\Delta}{ost} \Rightarrow$ lados homólogos , proporcionales

$$\tan\alpha = \frac{\overline{pm}}{\overline{om}} = \frac{\overline{ts}}{\overline{os}} = \frac{\overline{ts}}{1} = \overline{ts}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \overline{ts}}$$

$\overset{\Delta}{omp} \cong \overset{\Delta}{ofk}$

$$\cot\alpha = \frac{\overline{om}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{fk}}{\overline{fo}} = \frac{\overline{fk}}{1} = \overline{fk}$$

$$\boxed{\cot\alpha = \overline{fk}}$$

$\overset{\Delta}{omp} \cong \overset{\Delta}{opc}$

$$\csc\alpha = \frac{\overline{op}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{oc}}{\overline{op}} = \frac{\overline{oc}}{1} = \overline{oc}$$

$$\boxed{\csc\alpha = \overline{oc}}$$

$\overset{\Delta}{omp} \cong \overset{\Delta}{oph}$

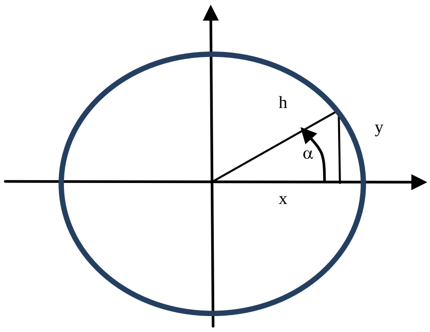
$$\sec\alpha = \frac{\overline{op}}{\overline{om}} = \frac{\overline{oh}}{\overline{op}} = \frac{\overline{oh}}{1} = \overline{oh}$$

$$\boxed{\sec\alpha = \overline{oh}}$$

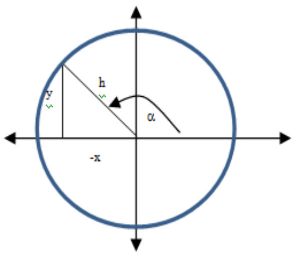
[1] Lo mismo ocurre con las demás funciones trigonométricas, por lo que todas son *adimensionales*.

Signos de las Razones Trigonométricas según Cuadrante.
Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo, lo representamos en la circunferencia trigonométrica, por lo que en el triángulo rectángulo que dibujamos la hipotenusa coincide con el radio de la circunferencia, es decir tiene una longitud de 1 unidad, y los catetos son paralelos a los ejes **x** e **y**. El cateto opuesto se lee sobre el eje **y**, y el adyacente sobre el eje **x.**

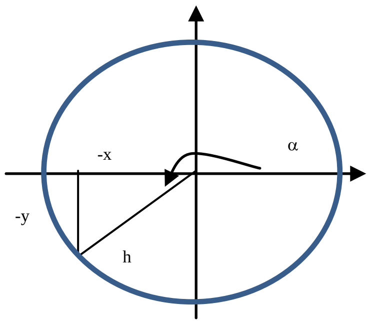
I Cuadrante:
Si el ángulo es un ángulo agudo es decir $0º<\alpha<90º$ los catetos se leen sobre los semiejes positivos por lo tanto todas las razones trigonométricas son entre valores positivos por lo que para los ángulos incluídos en el primer cuadrante las seis razones trigonométricas son positivas , $\operatorname{sen}\alpha$: (+), $\cos\alpha$: (+) , $\tan\alpha$: (+) y sus recíprocas.



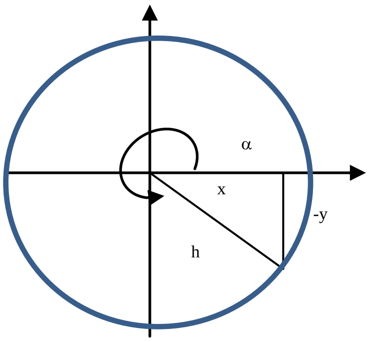
II Cuadrante:
Si el ángulo es obtuso es decir $90º<\alpha<180º$ el cateto opuesto se lee sobre el semieje positivo y el adyacente sobre el semieje negativo, por lo tanto los signos de las razones trigonométricas para los ángulos incluídos en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}\alpha$:(+) , $\cos\alpha$: (-) , $\tan\alpha$:(-) , $\csc\alpha$: (+) , $\sec\alpha$: (-) y $\cot\alpha$:(-).



III Cuadrante.
Si el ángulo es un ángulo cuya amplitud $180º<\alpha<270º$ los dos catetos se leen sobre los semiejes negativos por lo tanto todas las razones trigonométricas para los ángulos incluídos en el tercer cuadrante los signos de las seis razones trigonométricas son , $\operatorname{sen}\alpha$: (-), $\cos\alpha$: (-) , $\tan\alpha$: (+), $\csc\alpha$: (-), $\sec\alpha$: (-) y $\cot\alpha$: (+).



IV Cuadrante:
Si el ángulo es un ángulo cuya amplitud $270^\circ<\alpha<360^\circ$ el cateto opuesto se lee sobre el semieje negativo y el adyacente sobre el semieje positivo, por lo tanto todas las razones trigonométricas para los ángulos incluídos en el cuarto cuadrante, $\operatorname{sen}\alpha$: (-), $\cos\alpha$: (+) , $\tan\alpha$:(-) , $\csc\alpha$: (-) , $\sec\alpha$: (+) y $\cot\alpha$:(-).



Medición de ángulos: Hay varios sistemas de medición de ángulos. Vamos a estudiar dos de ellos

Sistema sexagesimal:
Tiene como **unidad** el grado sexagesimal que se escribe: 1º y se define como el ángulo de un giro dividido en 360 partes.

$$1^\circ = \frac{1\,\text{ángulo de un giro}}{360} \qquad \Rightarrow 1\,\text{ángulo de}\,1\,\text{giro} = 360^\circ$$

O, su equivalente: $\Rightarrow$ 1 ángulo recto = 90º

Tiene dos submúltiplos:

1 minuto sexagesimal $$1' = \frac{1\,\text{grado sexagesimal}}{60} \Rightarrow 1^\circ = 60'$$

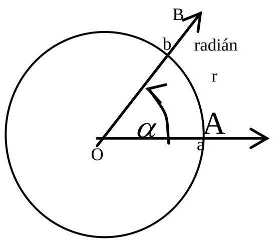
1 segundo sexagesimal $$1'' = \frac{1\,\text{minuto}}{60} \Rightarrow 1' = 60''$$

$$1^\circ = 3600''$$

Sistema circular o radial

En éste sistema se establece como unidad de medida el Radián. Un *radián* es el ángulo que abarca un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia a la cual pertenece.

$|\widehat{ab}| = |r|$ = arco de 1 radián



α ángulo central correspondiente a 1 radián.

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi.r$ y el ángulo central es α = 360º, resulta que la medida de este último en radianes es: $\alpha = \frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi$. Obsérvese que no quedan unidades, aunque por convención se agrega a continuación del número la palabra *radianes*.

1 ángulo llano= π radianes; 1 ángulo recto $= \frac{\pi}{2}$ radianes.

Correspondencia entre los distintos sistemas:

ángulo de un giro	360 º	2π

180 º = π radianes

Ejemplo 1: Expresa en radianes la amplitud de los siguientes ángulos:

a) 30º

Como 360º = 2π

$$30^{o} = \frac{30^{o} \;.\; 2\;\pi}{360^{o}} = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236...$$

b) 42 º 24 ′ 35″ se debe transformar en parte de grados los minutos y los segundos

$$42^{o}\, 24'\; 35'' = 42^{o}{,}41' = \frac{42{,}41^{o}.\pi}{180^{o}} = 0{,}7402...$$

Ejemplo 2: Exprese en grados minutos y segundos sexagesimales la amplitud de los siguientes ángulos:

a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{5}{9}\pi$; c) $\frac{2}{5}$; d) $\frac{4}{3}$

$$\boxed{\textbf{1 rad} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} = 57^{\circ}\, 17'\, 45,''...}$$

a) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.1 = \frac{\pi}{3}.\frac{180^{o}}{\pi} = 60^{o}$

b) 5/9 π = 5/9 π. 180º/π = 100º

c) $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}.\frac{180^{\circ}}{\pi} \cong 22^{\circ}\, 55'\;\; 6''$

d) 4/3 = 4/3.180º/π = 76º23′40″

Medidas de arco de circunferencia

La utilización del sistema radial permite calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia si se conoce el valor del ángulo expresado en radianes.

Si *r* es el radio de la circunferencia y α es el ángulo que abarca el arco *s* :

$$\boxed{\alpha = \frac{s}{r} \quad\Rightarrow\quad s = \alpha\; .\; r}$$

Realiza los siguientes ejercicios:

1) Completa la siguiente tabla

Ángulo	sexagesimal	circular
α_1	*36 º*	
α_2	*225º*	
α_3		$\frac{3}{4}\pi$
α_4		*2,3456*

2) Un ángulo central determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 30cm de radio. Expresa el ángulo central en radianes y en grados, minutos y segundos sexagesimales.

3) El minutero de un reloj mide 12 cm. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero durante 20 minutos?

Relación Pitagórica o Fundamental.

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{sen\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}} \qquad \boxed{cos\,\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha}}$$

Las dos últimas son obvias consecuencias de la primera. Aquélla surge de aplicar el teorema de Pitágoras (de ahí el nombre de las relaciones: "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa") al triángulo de la hoja 3. Entonces:

$\overline{pm}^2 + \overline{om}^2 = \overline{op}^2$; dividiendo ambos miembros por el segundo:
$\frac{\overline{pm}^2}{\overline{op}^2} + \frac{\overline{om}^2}{\overline{op}^2} = 1$ pero el primero y el segundo término son respectivamente los cuadrados de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$, por lo que se llega a la identidad en cuestión.

Esta relación pitagórica admite otras dos relaciones también llamadas pitagóricas y que son su consecuencia. Dividiéndola por $cos^2\alpha$ y por $sen^2\alpha$, respectivamente y ordenando:

$$\boxed{1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha} \quad \text{y} \quad \boxed{1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha}$$

Razones trigonométricas en función de una sola de ellas

Agregando a las relaciones recién vistas entre las razones trigonométricas, las "pitagóricas, pueden lograrse estas relaciones:

Por ejemplo en función del senα

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\,\alpha}$$

En función de secα:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1}$$

Ejemplo: Determina en qué cuadrante puede estar α , si se sabe que:

a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan\alpha = -1$.

Halla el valor de α

Si sen α (+) y tan α (-), α pertenece al 2º cuadrante .

Si sen $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}$

α = 45º pero por pertenecer al

2ºcuadrante

se debe reducir al 2º cuadrante, o sea, α = l80º - 45º

$$\boxed{\alpha. = 135º}$$

Valores de las Razones Trigonométricas de un ángulo de cualquier cuadrante . Reducción al Primer Cuadrante.

A veces es necesario emplear ángulos del primer cuadrante (por ejemplo al trabajar con funciones inversas en la calculadora o al resolver ecuaciones trigonométricas, más adelante veremos esto en detalle al esudiar las funciones).

Para ello se estudian relaciones entre ángulos: suplementarios, que difieren en $\frac{\pi}{2}$, que difieren en π, simétricos u opuestos α y $-\alpha$; entre otros.

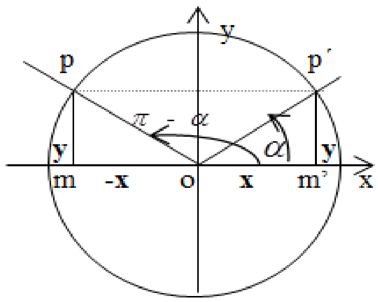
Se han definido las razones trigonométricas para un ángulo α agudo en el primer cuadrante.Tomando como referencia este ángulo se pueden determinar los valores de las razones trigonométricas en los otros cuadrantes a través de sus proyecciones sobre los ejes x e y.
Para ello conviene recordar la representación de las razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica.

Relaciones entre Ángulos Suplementarios.
Recordaremos dos **ángulos son suplementarios**, cuando la suma de sus amplitudes da un ángulo llano o sea de 180º .

$\alpha + \beta = \pi$; α suplemento de β y β suplemento de α

Si α supl. $\beta \Rightarrow \beta = \pi - \alpha$

Considerar un ángulo suplemetario del ángulo α en el segundo cuadrante.
Este ángulo con respecto a α, es el suplemento.

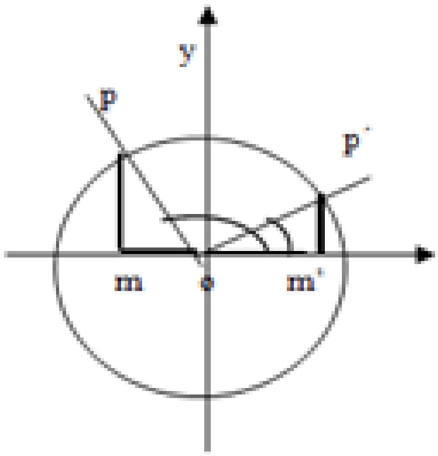


Compara los triángulos : $\overset{\Delta}{opm} \approx \overset{\Delta}{op'm'}$. Como se ve en el gráfico, las proyecciones sobre el **eje y** son iguales y positivas, por lo que el valor del seno de ambos ángulos son iguales. En cambio, las proyecciones sobre el **eje x** son de igual valor absoluto pero de distinto signo, por lo que el coseno del ángulo del segundo cuadrante es igual al del primero cambiado de signo. Para obtener la relación entre las otras razones se utiliza las relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo y se pueden ver con los gráficos correspondientes.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \end{array}}$$

Relaciones entre Razones Trigonométricas de Ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$

β pertenece al $2°$ cuadrante $\qquad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$



Comparar y demostrar que los triágulos $\overset{\Delta}{opm} \approx \overset{\Delta}{op'm'}$.

La ordenada del punto p es igual a la abscisa de p' en valor absoluto y signo, por lo tanto,

$$\text{sen}\,\beta = \cos\alpha$$

La abscisa de p es igual a ordenada de p' pero de signo contrario

$$\cos\beta = -\text{sen}\,\alpha.$$

Usa las relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo para deducir las otras relaciones.

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha \\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= -\text{sen}\,\alpha \end{aligned}}$$

Resuelve el siguiente ejercicio:

4) Completa las siguientes relaciones para ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$:

$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

$\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

$\sec\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

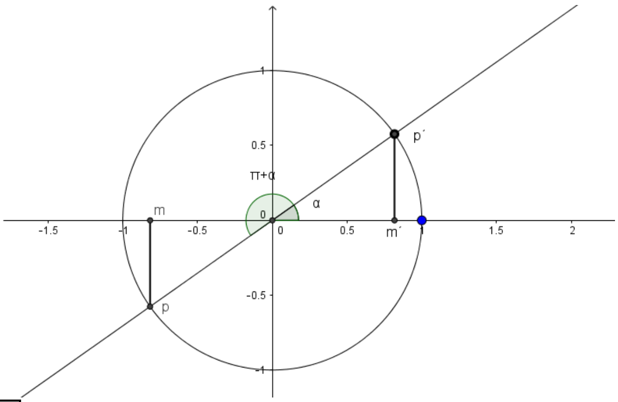
$\csc\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

Relaciones entre ángulos que difieren en π.

γ pertenece al 3er cuadrante y $\gamma = \pi + \alpha$

Compara y demuestra que los triágulos $\overset{\Delta}{opm}$ y $\overset{\Delta}{op'm'}$ son congruentes.

La ordenada del punto p es igual a la de p' pero de signo contrario (la de p es negativa). La abscisa de p es igual a la de p' pero de signo contrario.



$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

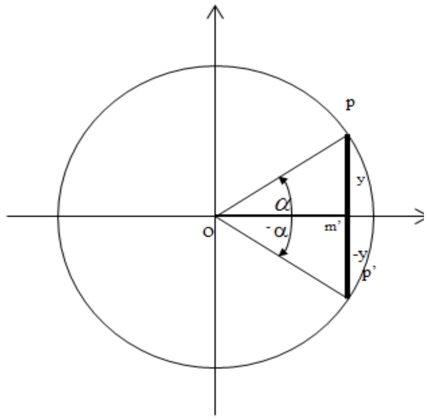
Resuelve el siguiente ejercicio:

5) Completa las siguientes relaciones para ángulos que difieren en π:

$\tan(\pi + \alpha) =$
$\sec(\pi + \alpha) =$
$\csc(\pi + \alpha) =$
$\cot(\pi + \alpha) =$

Relaciones entre las Razones Trigonométricas de Ángulos opuestos o simétricos: α y $-\alpha$

Comparar y demostrar que los triágulos $\overset{\Delta}{opm} \approx \overset{\Delta}{op'm'}$. La ordenada del punto **p** ,es igual a la de **p'**en valor absoluto pero de signo contrario (la ordenada de P es negativa). Las abscisas de **p** y de **p'** son iguales en valor absoluto y signo.



$$sen\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha$$

Para obtener la relación entre las otras razones se utiliza las relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo y se puede ver con los gráficos correspondientes.

Resuelve el siguiente ejercicio:

6) Completa las siguientes relaciones para ángulos opuestos:

$\tan(-\alpha) = ...$

$\cot(-\alpha) = ...$

$\sec(-\alpha) = ...$

$\csc(-\alpha) = ...$

Relaciones entre las Razones Trigonométricas de dos Ángulos que difieren en un número entero de Giros.

En este caso si uno de los ángulos es α, el otro es $(\alpha + 2k\pi)$,donde k es un número entero, luego los dos ángulos difieren en un número exacto de giros, es decir son ángulos congruentes y sus lados coinciden, en consecuencia sus razones trigonométricas son idénticas.

Valor de las razones Trigonométricas de Ángulos Notables.

Por considerarse buena práctica de las ideas fundamentales y para facilitar la comprensión de textos anteriores a la aparición de las calculadoras, seguidamente se obtienen los valores de las razones trigonométricas de los llamados *ángulos notables*. Existen motivos que justifican que se llamaran así a los que tienen por medida sexagesimal: 0º, 30º, 45º, 60º, 90º y 180º.

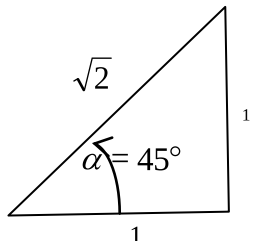
Cuando el ángulo vale 45 º, su complementario también vale 45º, por lo que estamos en presencia de un triángulo isósceles,que por simplicidad se considera de lado igual a 1.

Hipotenusa = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

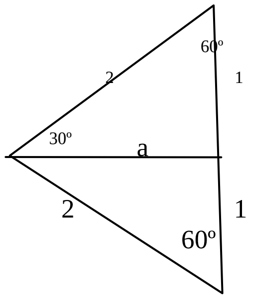
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 1$$



Cuando el ángulo α vale 60º, su complemento vale 30º, por lo que se trata de un triángulo equilátero que ha sido dividido en dos partes. Para realizar cálculos más sencillos considerar un triángulo equilátero de lado igual a 2.



$$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

sen 30º = ½

sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos 30º= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos 60º = ½

tan 30º = $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

tan 60º = $\sqrt{3}$

Se puede realizar un cuadro para recordar estos valores:

Ángulo	sen α	cos α	tan α
0º	0	1	0
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90º	1	0	No existe
180º	0	-1	0

Identidades Trigonométricas.

A veces es necesario demostrar que dos expresiones aparentemente distintas significan lo mismo, o hallar un expresión más reducida. Para ello se utilizan las identidades trigonométricas.

Por ejemplo si queremos verificar las siguientes identidades :

I) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha + \cot\alpha}{\cot\alpha} = 1 + \text{sen}\,\alpha \,.\, \tan\alpha$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha + \cot\alpha}{\cot\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha + \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}} = \left(\frac{\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right) . \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \text{sen}\,\alpha \,.\, \tan\alpha + 1$$

Se puede partir del primer miembro y llegar al segundo o viceversa.

II) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha}$

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha}{\cos\alpha \,.\, \text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha}$$

III) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)^2 = 2$

$$(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)^2 =$$

$$sen^2\alpha + 2\text{sen}\alpha.\cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\text{sen}\alpha.\cos\alpha + \text{sen}^2\alpha =$$

$$(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) =$$

$$1 \quad + \quad 1 \quad = \quad 2$$

Otro ejemplo:

Utilizando las relaciones entre las razones trigonométricas, hallamos el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) sen $(\pi - \alpha)$ + sen$(-\alpha)$ = sen α - sen α = 0

b) $$\frac{sen\,(2\pi - \beta) + \text{sen}\,(-\beta)}{\cos\,(\dfrac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{sen(-\beta) + sen(-\beta)}{sen\beta}$$

$$= \frac{-2sen\beta}{sen\beta}$$

$$= -2$$

c) $\text{sen}^2(-\alpha) + \cos^2(\pi - \alpha) = (-\text{sen}\alpha)^2 + (-\cos\alpha)^2 = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

d) $\dfrac{\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} - \dfrac{\tan(-\alpha)}{\tan(.\pi+\alpha)} = \dfrac{-\cos\alpha}{-\cos\alpha} - \dfrac{-\tan\alpha}{\tan\alpha} = 1+1 = 2$

e) $\text{sen}(\pi-\alpha)\ .\ \sec(\pi+\alpha).\ \cot(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) = \text{sen}\,\alpha.\dfrac{1}{\cos(\pi+\alpha)}.\dfrac{1}{\tan(\dfrac{\pi}{2} - \alpha)} =$

$$sen\ \alpha.\frac{1}{-\cos\alpha}\ .\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = -\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} = -tan^2\alpha$$

Fórmulas de senos y Cosenos de Suma y Diferencia de Ángulos, y ángulo doble:

Estas son relaciones importantes que pueden aparecer en las identidades, no nos detendremos en sus demostraciones, pero el que tenga la inquietud puede encontrarlas por ejemplo en Matemática 3 de DE GUZMÁN, M.; COLERA JIMÉNEZ, J.

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha$
$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\text{sen}\alpha$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\text{sen}\alpha$
$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

Resuelve los siguientes ejercicios:

7) Calcula todas las razones trigonométricas sabiendo que:

a. 0º < x < 90º cos x = $\frac{4}{5}$
b. 90º < x < 180º sen x = $\frac{1}{3}$
c. 0º < x < 360º sen x = $\frac{5}{13}$
d. tan x < 0 cos x = $\frac{7}{25}$
e. sen x < 0 tg x = $\frac{12}{25}$

8) Sea x un ángulo. Clasifica como V ó F las siguientes afirmaciones:

b) Para algún x sen x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) Existe un ángulo x tal que tan x = - 4

d) Para algún ángulo x sen x = $\sqrt{3}$
e) Para algún ángulo x sen x = -1
f) Para algún ángulo x, la tangente no está definida.

9) Calcula el número real x

a) $x = \cos 0° + 2sen30° + \cos^2 45°$

b) $x = \dfrac{2\cos 60° - \cos 30°}{2\cos 60° + \cos 60°}$

c) $x = \dfrac{\cos 0° \cdot \cos 30° + sen60° \cdot sen90°}{tg30° \cdot \cos 45° \cdot sen45°}$

d) $x = (sen90° + tg45°) \cdot (sen30° + \cos 90°)$

e) $x = a^2\ tg\ 45° + 2\ ab \cos 0° + b^2 sen^2 90°$

10) Elija la respuesta correcta: En un triángulo rectángulo siendo α y β los ángulos agudos se verifica:

A. $\cos^2 \beta$ + sen ^{2} α = 1
B. $\cos^2 \beta$ - sen $^2 \alpha$ = 1
C. sen $^2 \beta$ - sen $^2 \alpha$ = 1
D. sen $^2 \beta$ + sen$^2 \alpha$ = 1
E. Ninguna respuesta anterior es correcta

11) ¿Cuál de estas relaciones es correcta?

A. $\tan^2 \beta$ - sen$^2 \beta$ = sec$^2 \beta$ + cos$^2 \beta$
B. sen$^2 \beta$ - tan$^2 \beta$ = sec$^2 \beta$ - cos$^2 \beta$
C. tan$^2 \beta$ + sen$^2 \beta$ = sec$^2 \beta$ - cos$^2 \beta$
D. tan$^2 \beta$ + sen$^2 \beta$ = sec$^2 \beta$ + cos$^2 \beta$
E. Ninguna respuesta anterior es correcta.

Ecuaciones Trigonométricas.

Frecuentemente se presentan situaciones que determinan condiciones que deben verificar ciertos ángulos y/o sus razones trigonométricas, y se desea conocer qué valores son aceptables para estos ángulos. Al expresar esas condiciones en lenguaje simbólico, aparecen las ecuaciones trigonométricas. Para resolverlas se emplean los conocimientos vistos anteriormente.

Ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación:

$$sen\,(2\theta) = cos\,(2\theta) \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Dividiendo ambos miembros por $cos\,(2\theta)$ se obtiene: $tan\,(2\theta) = 1$; de donde:
(usando la calculadora se puede buscar el ángulo cuya tangente es 1, es decir $tan^{-1}1$)

a) $2\theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{8} \quad ; \quad (22^o\,30')$

b) $2\theta = \frac{5\pi}{4}$; difiere en π del anterior valor de $2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{5\pi}{8} \quad ; \quad (112^o\,30')$

c) $2\theta = \frac{9\pi}{4}$; difiere en π del anterior valor de $2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{9\pi}{8} \quad ; \quad (202^o\,30')$

d) $2\theta = \frac{13\pi}{4}$; difiere en π del anterior valor de $2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{13\pi}{8} \quad ; \quad (292^o\,30')$

Los otros valores de θ que satisfacen la primera ecuación no verifican la segunda condición.

Otras ecuaciones trigonométricas:

Encuentre el ángulo x del primer cuadrante que cumple:

a. 3 tan x –3 = 0
   3 tan x = 3
   tan x = $\frac{3}{3}$
   tan x =1
   x=tan^{-1} 1
   x = 45°

b. 3csc x – 6 = 0
   3csc x = 6
   csc x = $\frac{6}{3} = 2$
   sen x = $\frac{1}{2}$
   x = sen^{-1} $\frac{1}{2}$
   x = 30°

c. 2 sen 2 x – 1 = 0
   sen 2 x = $\frac{1}{2}$
   2 x = sen^{-1} (½)
   2 x = 30°
   x = 15°

Resuelve los siguientes ejercicios:

12) Calcula en grados el valor del ángulo, tal que $0 < x < 90º$ y que satisfaga la ecuación

a) $-2\,sen\,x = \sqrt{2}$
b) $2\csc x - 4 = 0$
c) $2\cos x = \sqrt{3}$

13) Determina todos los ángulos x tales que $0 < x < 2\pi$

a) $2\ sen\ x = \cos x$
b) $2(\cos^2 x - sen^2 x)=1$
c) $sen^2\, x - sen\, x = \cos^2 x$
d) $2\, sen^2 x - sen\, x + 1 = 0$

14) Verifica las siguientes identidades

a) $sen\alpha \cdot \sec\alpha + 1 = \dfrac{sen\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}$
b) $\sqrt{(1+sen\alpha)\cdot(1-sen\alpha)} = \dfrac{1}{\sec\alpha}$
c) $\dfrac{sen^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha(sen\alpha + \cos\alpha)} = tg\alpha - 1$
d) $\dfrac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{\cos x} = \sec x - \cos x$
e) $\dfrac{1}{1-sen^2 x} - \dfrac{1}{\cos ec^2 x - 1} = 1$

15) Calcula el valor de "x" usando las relaciones circulares inversas (con el uso de la calculadora).

a) $senx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\tan 2x = 1$
c) $sen\dfrac{x}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

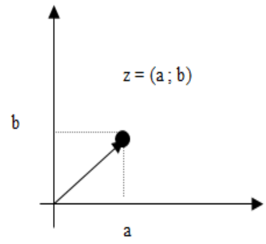
16) Encuentra las soluciones, comprendidas entre 0 y 2π , de las ecuaciones que siguen:

a) $\cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) = 0$
b) $sen^2\alpha = 2 \,.\, \cos\alpha + 2$
c) $3 - sen\,\beta = \cos(2\beta)$
d) $\cos(2\rho) + 5 \,.\, \cos\rho + 3 = 0$
e) $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$

Expresión trigonométrica y polar de un número complejo.
Como vimos en la unidad 1 los números complejos tienen una parte real y una imaginaria, por lo que podemos representarlos como puntos del plano, donde sus coordenadas son la parte real y la parte imaginaria. Otra manera de expresar un número complejo es la forma polar:

Módulo y Argumento de un Complejo

A cada número complejo z = (a;b) le está asociado un vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto (a;b) . De este modo se puede hacer corresponder a cada número complejo un vector.
Gráficamente:



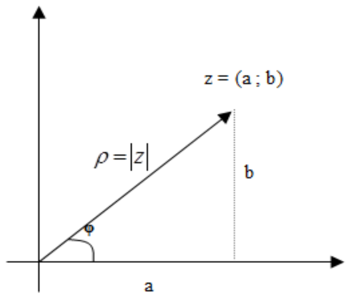
El módulo de ese vector es el módulo del complejo y se representa con la letra ρ
Al ángulo φ se lo llama argumento:

$$\boxed{\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{b}{a} \qquad \boxed{\varphi = arctg\,\frac{b}{a}}$$

A la expresión (ρ ;φ) de un número complejo se la denomina forma polar.

ρ: módulo del vector con origen en el origen de coordenadas y extremo el punto (a;b) que representa al complejo y es el módulo del complejo.
φ: argumento, que el ángulo que barre el vector en el plano, a partir del semieje positivo de las x.



Probemos en un ejemplo como un complejo de la forma binómica (a + bi) se puede expresar en la forma polar (ρ ; φ)

Forma binómica z = (3 + 4 i) Forma Polar z= (ρ;φ)

$$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = arctg = \frac{4}{3} = 53^{o}\ 7'\ 48''$$

Luego el complejo en forma polar: z = (ρ;φ) = (5 ; 53º 7´ 48")

Probemos ahora ir de la forma polar a la forma binómica

Forma polar: z=(2;60°) Forma binómica: z = (a + bi) ?

a = ρ . cos φ = 2 . cos 60º = 2 . 0.5 = 1

b = ρ . sen φ = 2 . sen 60º = 2 . 0.866 = 1.732

Luego el complejo en forma binómica: z = a + bi = 1 + 1.732 i

Pero aún queda otra forma de expresar un número complejo es la forma Trigonométrica.

Teniendo en cuenta la forma binómica (a + bi) y puesto que

a = ρ . cos φ y b = ρ. sen φ

z = (a + bi) = ρ . cos φ + i ρ . sen φ = ρ . (cos φ + i sen φ)

Luego: $\boxed{\mathbf{z = \rho \,.\, (\cos\varphi + i\ sen\ \varphi)}}$

Es la forma Trigonométrica de un número complejo.

Probemos expresar el complejo z = (3+4i), trabajado anteriormente, en forma trigonométrica.

Forma binómica: z =(3 + 4 i) Forma Trigonométrica

$$z = \rho . (\cos \varphi + i . \operatorname{sen} \varphi)$$

tomando los valores de ρ y φ calculados previamente:

$$z = 5 (\cos 53º\, 7´\, 48'' + i \operatorname{sen} 53º\, 7´\, 48'').$$

Resuelve los siguientes ejercicios:

17) Dados los siguientes números complejos:

$z_1 = 5-3i$;	$z_2 = 1/2+3/4i$	$z_3 = -5i$;
$z_4 = 7$;	$z_5 = -1-i$;	$z_6 = -2+i$

a) Calcula el módulo (ρ) y el ángulo que forman con el eje positivo de las x (φ).
b) Expresa estos complejos en su forma trigonométrica y en su forma polar.

18) Escribe en forma binómica los siguientes número complejos y grafica en el plano.

$z_7 = 8 (\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$
$z_8 = 2 (\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$
$z_9 = 3 (\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$
$z_{10} = \frac{1}{2} (\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$
$z_{11} = 2 (\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

19) Representa gráficamente a los números complejos que verifican que $|z| = 3$. ¿Qué figura queda determinada? Calcula el área y el perímetro de esa figura.

Pero también podemos expresar un complejo a través de la llamada fórmula de Euler o exponencial:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \qquad (1)$$

Donde e= 2. 71828.....(número irracional al igual que π)
θ : ángulo expresado en radianes

Anteriormente habíamos mostrado que podíamos expresar, un número complejo, en forma trigonométrica a través de la expresión:

$$z = \rho . (\cos \varphi + i . \operatorname{sen} \varphi) \qquad (2)$$

De (1) y (2) , se deduce que cualquier número complejo z diferente de cero, puede expresarse:

$$\boxed{z = \rho \;\; e^{i\theta}}$$

Como ejemplo, podríamos querer expresar el complejo:

z = ρ . (cos φ + i . sen φ) = 2 (cos $\frac{5\pi}{4}$+ i sen$\frac{5\pi}{4}$), como

$$z = e^{i\theta} = e^{i \cdot \frac{5}{4}\pi}$$

Para el producto de complejos, la expresión, será:

$$z_1 . z_2 = \rho_1 . \rho_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Para el cociente de complejos, la expresión será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

¿Te animas a proponer un ejemplo, que cumpla con los expresiones del producto y cociente, de complejos según la forma de Euler?.

EN SÍNTESIS:

Forma Binómica a Polar: z = (ρ; φ)	Forma Polar a Binómica: (a + bi)
$\rho = \lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	a = ρ. cos φ
$\varphi = arctg\ \frac{b}{a}$	b = ρ. sen φ
Forma trigonométrica z = ρ . (cos φ + i . sen φ)	Fórmula de Euler o Exponencial $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$ $z = \rho \;\; e^{i\theta}$

Resuelve los siguientes ejercicios:

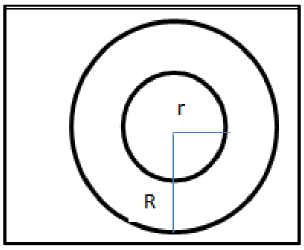
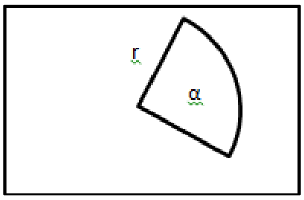
20) Cuáles son las coordenadas del punto que se obtiene al girar 90°, en sentido antihorario alrededor del origen, el afijo del complejo $2 + i$.
21) Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado de centro en el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el punto $(0, -2)$.
22) La suma de los componentes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determina esos complejos en la forma binómica y polar.
23) Expresa en forma polar y binómica un complejo cuyo cubo sea:

$$8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,sen\,\frac{\pi}{2}\right)$$

24) Escribe en las formas polar y trigonométrica, los conjugados y los opuestos de:

a) $14 + 4i$
b) $2-2 + 2i$

Recordemos las siguientes fórmulas de cómo se calcula el perímetro y el área de sectores circulares y coronas circulares.

Figura	Perímetro	Área
	$2\,\pi\,(R+r)$	$\pi\,(R^2-r^2)$
	$\dfrac{2\,\pi\,r\,\alpha}{360°}+\,2\,r$	$\dfrac{\pi\,r^{\,2}\alpha}{360°}$

http://matematicasjjp.webcindario.com/geometria_plana_resuelta.pdf

Resuelve los siguientes ejercicios (http://matematica1.com/category/sector-circular)

25) Ana se ha montado en el caballo que está a 3,5m del centro de una plataforma que gira y su amiga Laura se ha montado en el león que estaba a 2m del centro. Calcula el camino recorrido por cada una cuando la plataforma ha dado 50 vueltas.

26) Los brazos de un columpio miden 1,8 m de largo y pueden describir como máximo un ángulo de 146°. Calcula el espacio recorrido por el asiento del columpio cuando el ángulo descrito en su balanceo es el máximo.

27) Calcula el área del trapecio circular cuyas medidas son: R=3 cm, r=1,5cm, y el ángulo central 104º.