UNIDAD DIDÁCTICA V

POLINOMIOS Y ECUACIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Temario:

Definición de expresiones algebraicas y clasificación. Polinomio, grado. Operaciones. Regla de Ruffini. Factorización de Polinomios. Ecuaciones polinómicas. Factorización de polinomios mónicos aplicando Teorema de Gauss. Mínimo común múltiplo y Máximo común divisor entre polinomios. Resolución de ecuaciones racionales.

Introducción:

En matemática se designa con el término de polinomio a la suma de varios monomios (expresiones algebraicas), porque un polinomio es una expresión algebraica, constituida por una o más variables, utilizando únicamente las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y exponentes numéricos positivos. El polinomio que presenta un único término se denomina monomio, el de dos, binomios y el de tres, trinomios.
Si bien desde la antigüedad, tanto la resolución de ecuaciones algebraicas asimismo como la determinación de las raíces de los polinomios fueron las máximas preocupaciones a resolver por la matemática, la práctica notación de los mismos y que se usa actualmente, recién aparecería para establecerse hasta nuestros días durante el siglo XV.

Expresiones Algebraicas

Expresión algebraica: es una combinación de letras y números que aparecen reunidos a través de las distintas operaciones como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones y pueden aparecer también potencias y raíces. A los *números* se los llama *coeficientes* (y en ocasiones se usan las primeras letras del alfabeto para denominar valores constantes) y a las letras que representan valores variables (generalmente las últimas del alfabeto x, y, z) se las llama *variables*. Cada grupo de letras y números que estén separados por + o – es un término; a aquellos términos que tienen igual parte literal se los llama términos homogéneos.

El **Grado** de cada *término* está dado por la suma de los exponentes de las variables de dicho término. Y el *Grado de una expresión algebraica* está dado por el *mayor* de los grados de sus términos.

Los términos de una expresión algebraica se pueden clasificar en:

1) Término Entero: son aquellos en los que la o las variables aparecen multiplicando o con exponente entero no negativo. Ejemplos: $3xy$, $5x^2y^3$, $2x^2$.

2) Término Racional: son aquellos en los que la o las variables aparecen multiplicando, dividiendo, con exponente entero. Ejemplos: xy, $x^2:y$, xy^{-1}

3) Término Irracional: son aquellos en los que la o las variables aparecen con exponente racional no entero. Ejemplos: $y^{1/3}$, $xy^{2/3}$

Según sus términos las Expresiones Algebraicas se pueden Clasificar en:

1) Expresión Algebraica Entera: son aquellas expresiones algebraicas en las que todos sus términos son enteros. Ejemplo: $\frac{1}{2} x^2 + 4xy - 2xy^3$

2) Expresión Algebraica Racional: son aquellas expresiones algebraicas en las que sus términos son enteros o racionales, pero ninguno es irracional.
Ejemplo: $\frac{x}{y} + 3xy^3 + 2x^{-2}y$

3) Expresión Algebraica Irracional: son aquellas expresiones algebraicas en las que alguno de sus términos es irracional.
Ejemplo: $\sqrt{xy} + 3xy^{-3} + 5y$

Polinomios en una variable:
Se llaman **Polinomios** de una indeterminada con coeficientes reales a las expresiones de la forma:

$$\mathbf{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}$$

$$(a_n \neq 0)$$

para los cuales adoptamos la siguiente convención:

coeficientes: a_n , a_{n-1} , ... , a_2 , a_1 , a_0

términos: $a_n x^n$; $a_{n-1} x^{n-1}$; ...... ; $a_2 x^2$; $a_1 x$; a_0

Por ejemplo: $P(x)=x^4+5x^2-3x$ es un polinomio de tres términos grado 4.

Un polinomio se dice que está ordenado cuando está ordenado en orden decreciente o creciente según las potencias de la variable x.

Y se dice que es completo cuando aparecen todas las potencias intermedias entre la que le da el grado al polinomio y el término independiente o libre. Un polinomio se llama mónico cuando el coeficiente del término de mayor grado es 1. Por ejemplo el polinomio anterior P(x) es Mónico.

Ejemplo:

$P(x) = 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 1/2\ x + 1$

coeficientes: 4, 3, -2, 7, -1/2, 1

términos: $4x^5$, $3x^4$,$- 2x^3$, $7x^2$,$- 1/2\ x$, 1

Valor numérico de un polinomio:

Si en el polinomio reemplazamos el valor de x por el valor de una constante (cualquier número), se obtiene un número real al que se denomina **valor numérico del polinomio para x = k.**

Ejemplo:

$P(x) = 3x^2 - 2x + 5$

si x = -1 entonces $P(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 5 = 10$

si x = 0 entonces $P(0) = 3.\ 0^2 - 2.\ 0 + 5 = 5$

si x = 3 entonces P(3) = ...(complete)

Realiza los siguientes ejercicios:

1) Indica cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

a) $P(x) = x^2 - 3x + \sqrt{2}$ c) $R(x) = \dfrac{3x + 2x^4}{x}$ e) $T(x) = \dfrac{3}{5}x^3 - \dfrac{1}{7}x^{-1/2}$

b) $Q(x) = \dfrac{1}{x} + x^2 - 6x^5$ d) $S(x) = 4x^7 - ¼\ x$ f) $U(x) = ½\ x^2 - 1$

2) Dados los siguientes polinomios indica el grado de cada uno y calcula el valor numérico para el número indicado.

a) $Q(x) = x^6 - x^4 + x^3 - x^2$; Q(1) ; Q(- 1)

b) $R(x) = ½\ x + 5 - ¾\ x^5$; R(2) ; R(0) ; R(- 1)

3) Dados los polinomios $P(x) = x^3+x^2+x+2$ y $Q(x) = x^2+2x-1$, calcula:

a) P(-1)+Q(0) =....................................

b) 2. P(-2) - Q(3) =...............................

3) Dado el polinomio $P(x) = x^3 -3x^2-6x+8$, calcula:

a) P(1) = ...

b) P(-2) = ...

¿cuáles son los resultados obtenidos ?

Decimos entonces que 1 y -2 son **raíces** del polinomio dado.

4) Elabora una definición de **raíz de un polinomio**

....

Raíces de un Polinomio:

Son los valores de x para los cuales el polinomio se anula, es decir, todos los x tales que P(x)=0. El grado del polinomio nos indica el número máximo de raíces que puede tener. Por ejemplo si el grado del polinomio es 4 puede tener hasta 4 raíces.

Por ejemplo:

$P(x) = x^2 -3x - 10$, analizar si 5,1,0 y -2 son raíces de P (es un polinomio de grado 2 es decir puede tener hasta 2 raíces)

$P(5) = 5^2-3(5) -10 = 0$; 5 es raíz de P
$P(1) = 1^2-3(1) -10 = -12$; 1 no es raíz de P
$P(0)= 0^2-3(0) -10= -10$; 0 no es raíz de P
$P(-2)= (-2)^2-3(-2) - 10= 0$; -2 es raíz de P

Polinomios ordenados y completos:

Observa los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3-(1/2) x^2 +2x-1$

$R(x) = -1/4 +2x^2-5x^3+x$

Ambos están completos, sin embargo, existe una diferencia entre ellos. ¿Cuál es? ....

....

Ordena el polinomio R(x) en forma decreciente.

....

6) Ordena en forma decreciente cada uno de los siguientes polinomios, indicando cuáles de ellos no están completos.

   $P(x) = (3/2)x^3-2x^4+1$ ....

   $R(x) = ¼\ x^4+2x^3-6x^5+3$...

   $S(x) = x^2-(2/5)x+x^4+3x^3-1$ ....

   $M(x) = x^3+3-x^2$ ....

   $T(x) = -(2/7)x^3 + x^4 -2$ ....

Completar un polinomio significa agregarle los términos faltantes, de modo tal que el polinomio dado no se vea alterado.

Volviendo a los ejemplos:

$$P(x) = -2x^4+(3/2)x^3+\mathbf{0}.x^2+\mathbf{0}.x+1$$

Completa de la misma manera los polinomios del ejercicio anterior.

R(x) = ...

M(x) = ...

T(x) = ...

¿Por qué no incluimos en esta lista al polinomio S(x)?

....

Polinomios idénticos:

Dados los siguientes polinomios $T(x) =(1/3)x^2 + 2x -1$ y $S(x) = -1 + 1/3\ x^2 + 2x$, ordénalos y complétalos si fuera necesario:

....

¿Qué particularidad presentan sus términos? (Compara sus términos)

....

Decimos que T(x) y S(x) son polinomios **idénticos.**

Teniendo presente lo anterior, completa la siguiente definición:

Dos polinomios son iguales o idénticos si y sólo si
....
....

<u>Polinomios Opuestos:</u>

Dados los siguientes polinomios $M(x)=(1/3)x^2+2x-1$ y $N(x)=1-(1/3)x^2-2x$, ordénalos y complétalos si fuera necesario:

....

¿Qué particularidad presentan sus términos? (Compara sus términos)

....

Decimos que M(x) y N(x) son polinomios **opuestos.**

Si suman M(x) +N(x) que resultado se obtiene:………………

Este resultado es O(x)=0 se lo denomina polinomio **Nulo.**

Teniendo presente lo anterior, completa la siguiente definición:

Dos polinomios son opuestos si y sólo si
....
....

Operaciones entre Polinomios:

Suma: cuando se suman dos polinomios se suman solo entre aquellos términos los homogéneos de los polinomios (sumando sus coeficientes y la parte literal queda igual). En la suma de polinomios podemos asociar, conmutar y cancelar opuestos.

Ejemplo:

$P(x)= x+5x^2-3x^4 \qquad Q(x)= x^3+2x-7$

$P(x) + Q(x)= x+5x^2-3x^4+x^3+2x-7= -3x^4+x^3+5x^2+3x-7$

Resta: La resta de polinomios se puede resolver como la suma de un polinomio con el opuesto del polinomio sustraendo, es decir:

$P(x)-Q(x)= P(x) + [-Q(x)]$, donde $-Q(x)$ es el polinomio opuesto de $Q(x)$.

Multiplicación: se multiplican los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro polinomio es decir propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta (los coeficientes se multiplican y se suman los exponentes de la variable).
Ejemplo: $P(x)= 3x^3$ $Q(x)= 2x^2-3x$ $R(x)= x^3-2x+4$ $S(x)= x+2$

$P(x).Q(x)=(3x^3)(2x^2-3x) = 6x^5 - 9x^4$

$Q(x).R(x)=(2x^2-3x)(x^3-2x+4)= 2x^5-4x^3+\underline{8x^2}-3x^4+\underline{6x^2}-12x=2x^5-3x^4-4x^3+14x^2-12x$

$Q(x).R(x).S(x)= (Q(x).R(x)).S(x)= (2x^5-3x^4-4x^3+14x^2-12x)(x+2)=$.......

Veamos una disposición práctica, basada en aquella que se utiliza para la multiplicación de números naturales de varias cifras.

Disposición práctica

algoritmo numérico		algoritmo algebraico	
542		$A (x) = 3 x^2 - 2x + 1$	
x 84		**x** $B(x) = x + 3$	
2168	Primer paso 542 por 4	$9 x^2 - 6x + 3$	Primer paso A(x) por 3
+		**+**	
4336	Segundo paso 542 por 8	$3 x^3 - 2 x^2 + x$	Segundo paso A(x) por x
45528	Tercer paso suma y resultado de 542 por 84	$3 x^3 + 7 x^2 - 5 x +3$	Tercer paso suma y resultado de A(x) . B(x)

Resuelve los siguientes ejercicios:

7) Realiza las siguientes operaciones entre polinomios:
   a) $(10 x^3 - 8 x^2) - (3 x^3 - 2 x^2 + 6) =$
   b) $3(x^2 - 3 x + 1) + 2(3 x^2 + x - 4) =$
   c) $(2 x^2 - 3 x) - 2(- 7 x^2 - 2 x - 4) - (3+ x^3 - 3 x + x^2) =$
   d) $(x + 8). (2 x + 1) =$
   e) $(x^2 + x - 1).(x^2 - x + 1) =$
   f) $(2 x - 1). (x + 2) =$

g) $(x^2 +2x + 1).(x^2 - 3x + 4) =$

h) $(x^2 - 2x^3).(x^2 + 2x^3) =$

i) $(-5 +3x -6x^2).(4x -2x^2) =$

División: para dividir polinomios es necesario que el dividendo sea de mayor o igual grado que el divisor. Como en toda división la relación existente entre dividendo D divisor d cociente C y resto R está dada por : D =d.C + R

Al dividir polinomios, tenemos:

polinomio dividendo ——	$A(x)$	$B(x)$ ——————	polinomio divisor
polinomio resto ————	$R(x)$	$C(x)$ ————	polinomio cociente

Cuando en una división entre números el resto es cero se dice que el dividendo es múltiplo del divisor, en el caso de polinomios sucede lo mismo.

Para poder dividir dos polinomios de coeficientes reales, se utiliza la disposición y el mecanismo similar al empleado en la división de dos números naturales de varias cifras.

Pasos:

1) Debemos ordenar los polinomios dividendo y divisor, y completar el polinomio dividiendo con ceros en caso de faltar alguna de las potencias intermedias de la variable x.
2) Dividir el primer término del dividendo entre el primero del divisor este resultado será el primer término del cociente.
3) Multiplicar el primer término del cociente por el divisor y restarlo del dividendo.
4) Dividir el primer término del resultado anterior y dividirlo entre el primer término del divisor, este será el segundo término del cociente.
5) Multiplicar el segundo término del cociente por el divisor y restarlo del resultado anterior.
6) Se prosigue de la misma manera hasta llegar a un resto de menor grado que el divisor.

Ejemplo: siendo $P(x)= 4x^5+2x^3-3x^2-5$ y $Q(x)= x^2-2x+1$

$4x^5+0x^4+ 2x^3-3x^2+0x-5 \backslash \ \underline{x^2-2x+1 \qquad\qquad}$.

$\underline{-4x^5+8x^4- 4x^3} \qquad\qquad 4x^3+8x^2+14x+17$ Cociente

$8x^4- 2x^3-3x^2+0x-5$

$\underline{-8x^4+16x^3-8x^2}$

$14x^3-11x^2+0x-5$

$-\underline{14x^3+28x^2-14x}$

$17^2-14x -5$

$-\underline{17x^2+34x -17}$

$20x -22$ Resto

Compruebe el resultado de la división anterior: verificando que cociente por divisor más resto es el dividendo.

Regla de Ruffini: esta regla nos ayuda a resolver más rápidamente divisiones de un polinomio entero entre un polinomio de la forma x-a. Consiste en trabajar con los coeficientes de dividendo y divisor, para hallar los coeficientes del cociente y el resto

Ejemplo:

$P(x)= 4x^5+2x^3-3x^2-5$ $\qquad\qquad$ $Q(x)=x+1= x-(-1)$

Coeficientes de Dividendo Ordenado en forma decreciente y Completo

	4	0	2	-3	0	-5
		+	+	+	+	+
a: -1		(-4)	4	-6	9	-9
multiplicamos	4	-4	6	-9	9	-14 resto

Coeficientes del cociente : por lo que el cociente es el polinomio $C(x)= 4x^4-4x^3+6x^2-9x+9$

Teorema del resto:

El resto de dividir un polinomio entero P(x) entre un polinomio de la forma x-a es igual a valor del polinomio cuando la x toma el valor de a o sea R(x)=P(a).

Por ejemplo, en la división anterior:

$P(-1)= 4(-1)^5+2(-1)^3-3(-1)^2-5 = -14$ resto de dividir P(x): (x-(-1))

Realice los siguientes ejercicios:

8) Resuelva los siguientes cocientes P(x):Q(x).

a) $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 - 1$

b) $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 + x$

c) $P(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 - 2$

d) $P(x) = 3x^4 - x^2 + x - 2$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 + 2x - 1$

e) $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2x + 5$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 - x + 1$

9) Resuelva los siguientes cocientes P(x):Q(x) aplicando la regla de Ruffini.

a) $P(x) = x^5 + 32$ $\qquad$ $Q(x) = x + 2$

b) $P(x) = x^3 – 27$ $\qquad$ $Q(x) = x - 3$

c) $P(x) = x^3 - 7 x^2 + 14 x - 21$ $\qquad$ $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = 4 x^3 – 3 x^2 + x + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x - 1$

e) $P(x) = 3 x^3 – x^2 + x - 2$ $\qquad$ $Q(x) = x + 2$

Reconstrucción de un polinomio a partir de sus raíces:
Supongamos el polinomio P(x)= (x-3)(x+2). ¿De qué grado es?........
Escríbelo en la forma estándar P(x)=..........................Si calculas P(3)=....................... Y P(-2)=....................... ¿qué observas? ¿Cuáles son las raíces de P(x)?...... y ....
Por lo tanto si queremos construir un polinomio que tenga como raíces los valores x_1 y x_2, ¿cómo podemos construirlo? ....

x_1 y x_2 son raíces del polinomio $(x-x_1).(x-x_2)=x^2 + (-x_1-x_2)x +(-x_1)(-x_2)$ es un polinomio de grado 2 cuyas raíces son x_1 y x_2.
Teorema de Gauss: todo polinomio puede factorizarse como producto de polinomios a partir de sus raíces.

<u>Algunos productos especiales:</u>

Resuelve aplicando el concepto de potenciación y la propiedad distributiva de la multiplicación:

$(a + b)^2 =$ ....

$(a - b)^2 =$ ....

$(a + b)^3 =$ ....

$(a - b)^3 =$ ....

$(a - b) . (a + b) =$ ....

Realice los siguientes ejercicios:

10) Calcula las siguientes potencias y resuelve.

a) $(-¼ x^3 - 2)^2 =$ $\qquad$ b) $(x^2 + a)^2 =$ $\qquad$ c) $(x^2 + b)^3 =$
d) $(-2x^2 + x)^3 =$ $\qquad$ e) $(- x^3 +½ x)^3 =$ $\qquad$ f) $(3x^2 + 2x)^2 =$
g) $(x + 1)^3 – (x +2)^3 =$ $\qquad$ h) $(x + 1)^3 – (x – 1)^3 =$

Factorización de Polinomios.

La factorización de polinomios consiste en expresar un polinomio como producto de sus factores primos.
Por ejemplo $P(x)= (x-2)\ (x+3)$ y $P(x)=x^2+x-6$, en ambos casos definimos el mismo polinomio P(x), en el primer caso está factorizado o expresado como producto de dos polinomios primos y en el segundo caso no está factorizado sino definido como suma de sus términos.

FACTOR COMÚN

Se puede aplicar a todo polinomio que tenga dos o más términos, en los que es posible extraer al menos un factor común en todos sus términos (una opción es extraer el M.C.D. entre coeficientes y la menor potencia de la indeterminada x, otra es realizar algún paso que haga que el coeficiente que acompaña a la indeterminada sea uno).

Ejemplos:

a) $3x^2 + 5x = x.(3x + 5)$

b) $3\,x + 1 = 3\,.\,(\,x + \frac{1}{3}\,)$

c) $4x^2\,a + 8x^3a^2 - 2ax = 2xa\,(\,2\,x + 4\,x^2\,a - 1\,)$

d) $3\,x + 6\,x^2 + 9 = 3\,.\,(\,x + 2\,x^2 + 3\,)$

11) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^5 - 2\,x^4 + 7\,x^2 =$

b) $5\,x^3 - 10\,x^2 + 20\,x =$

c) $7\,x^5 - 14\,x^7 + 21\,x^4 =$

d) $12\,x^2 - 16\,x^3 =$

e) $169\,x^3 - 13\,x^5 =$

f) $\frac{5}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{15}{32}x =$

FACTOR COMÚN POR GRUPOS

Se puede aplicar cuando el polinomio tiene 4, 6, 8, 9 términos, etc. de manera tal que puedan formarse grupos con igual cantidad de términos.

Una vez extraídos los factores comunes de cada grupo, los paréntesis que quedan deben ser iguales, para poder factorizar el polinomio.

Ejemplos:

a) $2\,x^2 + 2\,a\,x + x + a = 2\,x^2 + x + 2\,a\,x + a$
$= x\,(\,2\,x + 1\,) + a\,(\,2\,x + 1\,)$
$= (\,2\,x + 1\,)\,.\,(\,x + a\,)$

b) $mx+6ay - 5m + 2ax - 10a + 3\,my = m\,x + 2\,a\,x - 5\,m - 10\,a + 3\,m\,y + 6\,a\,y$
$= x(m+2a) - 5(m + 2a\,) + 3y\,(m + 2a)$

$= (m + 2 a) . (x - 5 + 3 y)$

12) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x - 3x^2 - 6 =$

c) $x^2 - 5x + x^4 - 5x^3 =$

b) $2x^3 + 2x + 3 + 3x^2 =$

d) $xa + 3x + x^2 + 2a + 6 + 2x =$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Para aplicar este caso de factoreo, el polinomio debe tener:

1. tres términos
2. dos de ellos deben ser cuadrados, es decir, que se les pueda calcular la raíz cuadrada.
3. el término restante debe tener la forma: 2 a b siendo a y b las raíces de los términos cuadrados.

Cumplidas las condiciones anteriores, el polinomio se factoriza colocando las raíces a y b de la forma:

$(a + b)^2$ ó $(a - b)^2$

El signo que separa las raíces dependerá del signo del término no cuadrado.

Ejemplos:

a) $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

x a

$2\ a\ x$

b) $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$

x -1

$2\ x\ (-1)$

¿En el ejemplo b) podría ser $(1-x)^2$?

13) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^4 + 20x^2 + 25 =$

d) $-8x + 16 + x^2 =$

b) $36x^2 + 1 - 12x =$

e) $9x^2 + 4 - 12x =$

c) $\frac{1}{4} a^2 + 49 x^4 b^2 + 7 x^2 ab =$

f) $\frac{1}{4} x^2 + a^6 + x a^3 =$

CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Para aplicar este caso de factoreo, el polinomio debe tener:

1. cuatro términos
2. dos de ellos deben ser cubos, es decir, que se les pueda calcular la raíz cúbica.
3. los dos términos restantes deben tener la forma: $3\,a^2\,b$ y $3\,a\,b^2$ siendo a y b las raíces de los términos cúbicos.

Cumplidas las condiciones anteriores, el polinomio se factoriza colocando las raíces a y b con su signo correspondiente todo elevado al cubo.

Ejemplos:

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$

x $\qquad$ -2

$3\,x^2\,(-2)$

$3\,x\,(-2)^2$

b) $-x^6+27+9x^4-27x^2 = (-x^2 + 3)^3$

$-x^2$ $\qquad$ 3

$3\,(-x^2)^2\;3$

$3\,(-x^2)\;3^2$

14) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $27\,x^3 + 8 + 54\,x^2 + 36\,x =$

b) $x^6 - 6\,x^4 + 12\,x^2 - 8 =$

c) $1 - 27\,m^3 - 9\,m + 27\,m^2 =$

d) $x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1 =$

e) $27 + 36x^2 + 54x + 8x^3 =$

f) $x^3 +3x +1 +3x^2 =$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Se aplica cuando el polinomio tiene:

1. dos términos de distinto signo.
2. ambos términos deben ser cuadrados, es decir, se les puede calcular la raíz cuadrada.

Cumplidas las condiciones anteriores, el polinomio se factoriza multiplicando la suma de las raíces por la resta de las misma. De la siguiente forma:

$(a + b)\,.\,(a - b) =$...............................

¿Recordás los productos notables que mencionamos anteriormente?

Si el polinomio está expresado de manera tal que el 1° término es negativo, por ejemplo $-81 + x^2$, es aconsejable conmutar los términos $x^2 - 81$, es decir, 1° el positivo y luego el negativo, antes de factorizar.

Ejemplos:

a) $a^4 - x^2 = (a^2 - x)\,(a^2 + x)$

$a^2 \qquad x$

b) $36x^6 - 1 = (6x^3 + 1)\,(6x^3 - 1)$

$6\,x^3 \qquad 1$

15) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $1 - 144x^2 =$ b) $25a^2 - 49x^2 =$ c) $4a^8 - x^{10} =$ d) $-81 + x^2 =$

SUMA O DIFERENCIA DE POTENCIAS DE IGUAL GRADO

Se puede aplicar a binomios, cuyos términos puedan expresarse como potencias de igual grado. A excepción de las sumas de binomios de potencias pares.

El polinomio se expresará como producto de dos factores. El 1° factor estará determinado por las raíces de cada uno de los términos del polinomio con su signo correspondiente.

El 2° factor tendrá tantos términos como indique el grado de los términos del polinomio y sus signos estarán dados por la siguiente regla:

- Si los términos del polinomio tienen igual signo, los signos del 2° factor van alternados comenzando con +.

- Si los términos del polinomio tienen distinto signo, los signos del 2° factor son todos positivos.

Los términos del 2° factor se completarán realizando la división correspondiente utilizando por ejemplo la regla de Ruffini.

Ejemplos:

a) $x^5 - 1 = (x - 1)\,(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

$x \qquad -1$

b) $x^3 + a^3 = (x + a)\,(x^2 - xa + a^2)$

$x \qquad a$

16) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $y^5 - 243 =$ b) $125x^3 - 27 =$ c) $a^5 + 32 =$ d) $1 + 128x^7 =$

TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

- Se puede aplicar a cualquier polinomio de grado 2.

1. el polinomio tiene la forma, con $a \neq 0$:

$$a\,x^2 + b\,x + c =$$

2. y las raíces del mismo son raíces reales, preferentemente enteras. Las cuales se obtendrán mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Cumplidas las condiciones anteriores, y conocidas las raíces x_1 y x_2 del polinomio, este se factoriza de la siguiente forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Ejemplos:

a) $x^2 - 2 + x = (x + 2)(x - 1)$ b) $3x^2 - 45 + 6x = 3(x - 3)(x + 5)$

17) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 - 10x - 28 =$

b) $35 + 12x + x^2 =$

c) $3x^2 + 4x + 1 =$

d) $-12x + x^2 - 108 =$

e) $54 - 27x + 3x^2 =$

f) $4x^2 + 3x - 1 =$

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO A PARTIR DE SUS RAÍCES (TEOREMA DE GAUSS)

Si el polinomio P(x), de grado n, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional **p/q** (fracción irreducible), siendo **p** divisor del **término independiente** y **q** divisor del **coeficiente principal**

Nota: Si **a** es raíz del polinomio P(x) entonces a P(x) lo podemos factorizar como

$$P(x) = (x - a).\ C(x)$$

donde C(x) es el cociente de P(x): (x – a)

Ejemplo de aplicación del Teorema de Gauss

Dado el siguiente polinomio.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

Divisores del término independiente (6): p $\longrightarrow$ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6

Divisores del coeficiente principal (2): q $\longrightarrow$ 1, -1, 2, -2

Posibles raíces del polinomio: p/q

Entonces pueden ser posibles raíces: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 1/2, -1/2, 3/2, -3/2

Aplicando el teorema del resto se buscan aquellas divisiones en donde el resto de 0.

Posible raíz	$x-a$	Teorema del resto $Q(x)$ =2x³ - 3x² - 11x +6	¿Es raíz del polinomio?
1	x -1	$Q(1)= 2(1)^3 - 3(1)^2 - 11(1) + 6= -6$	No
-1	x+1	$Q(-1)= 2(-1)^3 - 3(1)^2 - 11(-1) + 6= 12$	No
2	x-2	$Q(2)= 2(2)^3 - 3(2)^2 - 11(2) + 6= -12$	No
-2	x+2	$Q(-2)= 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 11(-2) + 6= 0$	Si
3	x-3	$Q(3)= 2(3)^3 - 3(3)^2 - 11(3) + 6= 0$	Si
-3	x+3	$Q(-3)= 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 11(-3) + 6= -42$	No
6	x-6	$Q(6)= 2(6)^3 - 3(6)^2 - 11(6) + 6= 264$	No
-6	x+6	$Q(-6)= 2(-6)^3 - 3(-6)^2 - 11(-6) + 6=-468$	No
$\frac{1}{2}$	$x-\frac{1}{2}$	$Q\left(\frac{1}{2}\right)= 2(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2})^2 - 11(\frac{1}{2}) + 6=0$	Si
$-\frac{1}{2}$	$x+\frac{1}{2}$	$Q\left(-\frac{1}{2}\right)= 2\,(-\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{-2})^2 - 11(-\frac{1}{2}) + 6=\frac{21}{2}$	No
$\frac{3}{2}$	$x-\frac{3}{2}$	$Q\left(\frac{3}{2}\right)= 2(\frac{3}{2})^3 - 3(\frac{3}{2})^2 - 11(\frac{3}{2}) + 6=-\frac{21}{2}$	No
$-\frac{3}{2}$	$x+\frac{3}{2}$	$Q\left(-\frac{3}{2}\right)= 2(-\frac{3}{2})^3 - 3(-\frac{3}{2})^2 - 11(-\frac{3}{2}) + 6= 9$	No

El polinomio podría ser divisible por alguno de estos binomios.

Es decir (x - a), siendo "a" una de esas posibles raíces.

Se realiza la división del polinomio original Q(x) por alguna de las raíces del cuadro, en este caso vamos a utilizar x=-2, al dividir $Q(x)$: (x + 2), el resto dá 0:

	2	-3	-11	6
-2		-4	14	-6
	2	-7	3	0
	Cociente: $2x^2-7x+3$			Resto: 0

Por ahora, la factorización sería Q(x)= (x + 2).($2x^2$ - 7x + 3).

En el polinomio de segundo grado que quedó se puede volver a buscar raíces con Gauss, o aplicar el Trinomio de segundo grado, donde para calcular las raíces se utilizaba la expresión $x_{1,2} = \dfrac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$

En este caso vamos a continuar usando Teorema de Gauss:

Nuevo polinomio a factorizar L(x)=$2x^2$ - 7x + 3

Posibles raíces: 1, -1, 3, -3, 2, -2, 1/2, -1/2, 3/2, -3/2

Se prueba dividir por (x - 3), se encuentra que el resto dá 0:

3	2	-7 6	3 -3	
	2	-1	0	
	Cociente: 2x-1			Resto: 0

Como ya se tienen todos polinomios de grado 1, la factorización sería:

Q(x)= (x + 2).(x - 3).(2x – 1)

Y por último del factor (2x – 1) se extrae factor común "2", $2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Por lo tanto una factorización del polinomio $Q(x)$ =$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ es

$$Q(x) = (x+2).(x-3).2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Otro ejemplo: P(x) = $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{TI } (-3): \pm 1, \pm 3 \\ \text{CP } (2): \pm 1, \pm 2\end{array}\right\} \text{posibles raices } \frac{p}{q}: \pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$$

P(-1) = 0 $\Rightarrow$ x_1 = -1, es raíz

P(-1/2) = 0 $\Rightarrow$ x_2 = -1/2, es raíz

P(3) = 0 $\Rightarrow$ x_3 = 3, es raíz

P(x) = $2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$

Realiza los siguientes ejercicios

18)Factoriza los siguientes polinomios

a) $5x^3 + 5$ =

f) $7x^2 + 7x - 14$ =

k) $8x^3 + 20x^2 - 2a^2x - 5a^2$ =

b) $x^2 - 9x + 14$ =

g) $32x^5 - 8x^3 - 4x^2 + 1$ =

l)$x^5 - 16x^3 + 20x^2$ =

c) $x^4 - 2x^2 + 1$ =

h) $x^4 a + x a$ =

m) $x^4 + x^3 + x + 1$ =

d) $4x^2 + 4xy + y^2$ =

i) $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$=

e) $2x^2 + 14x$ =

j) $x^4 + a x^3 - x - a$ =

19) Factoriza los siguientes polinomios combinando casos:

a) $7x^2+7x-14=$

b) $x^4 + 2x^3 + 8x + 16 =$

c) $x^4 - 2x^2 + 1 =$

d) $4x^2 + 4xy + y^2 =$

e) $8x^3 + 20x^2 - 2a^2 x - 5a^2 =$

f) $x^5 - 16x^3 + 20x^2 =$

g) $x^4 + ax^3 - x - a =$

h) $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 =$

i) $x^7 - x^5 =$

j) $x^8 - x^5 =$

k) $2x^2 - 8x =$

l) $x^4a + xa =$

Máximo Común Divisor y mínimo Común Múltiplo:

Si tenemos los polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$, ….y $P_n(x)$, y los factorizamos. De la misma forma que buscamos mcm y MCD de un conjunto de números, podemos hacerlo con un conjunto de polinomios.
Si no recuerdas cómo calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor entre números puedes visitar la siguiente página web
http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/max_y_min.pdf

Es decir:

El **MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO** (mcm) se obtiene multiplicando los factores **COMUNES Y NO COMUNES** con el mayor exponente con el que aparecen.

El **MÁXIMO COMÚN DIVISOR** (MCD) se obtiene multiplicando los factores **COMUNES** con el menor exponente con el que aparecen.

Si al buscar el MCD de un conjunto de polinomios no encontramos factores comunes, el MCD será 1.

Ejemplo:

Halla el MCD y el mcm de:

$3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

mcm $= 3x(x+2)(x-2)^2$
MCD $= x - 2$

20) Halla el mcm y MCD de los siguientes grupos de polinomios

a) $x^3 - 8$; $4x^2 + 8x + 16$

b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; $x^2 + 4x + 4$; $x^2 - 4$

c) $9x^2 + 6ax + a^2$; $12x + 4a$; $9x^2 - a^2$

d) $x-1 \ + b\,x - b$; $x^2 + b^2 + 2\,b\,x$; $x^2 - 2\,x \ + 1$

e) $x + 1$; $1 + 2\,x + x^2$; $x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Recuerda que cuando resuelves operaciones entre fracciones de números reales, en el caso de trabajar con expresiones algebraicas racionales, debes seguir el mismo procedimiento:

21) Resuelve las siguientes sumas algebraicas

a) $\dfrac{x}{x^2-7x+6}-\dfrac{x}{x^2-2x-24}=$

c) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+1}{x^2+5x-24}=$

b) $\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{2}{x^2+x-6}=$

d) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{x-4}{x^2-2x+1}=$

22) Factoriza numerador y denominador y simplifica.

a) $\dfrac{3x-6}{5x}.\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}=$

c) $\dfrac{9x^2-25}{2x-2}.\dfrac{1-x^2}{6x-10}=$

b) $\dfrac{4x^2-1}{x^2-16}.\dfrac{x^2-4x}{2x+1}=$

d) $\dfrac{12}{x^2-x}.\dfrac{x^2-1}{4x-2}=$

23) Resuelve numerador y denominador y luego divida.

a) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}}=$

b) $\dfrac{1-\dfrac{x}{x+1}}{2-\dfrac{x-1}{x}}=$

c) $\dfrac{3-\dfrac{x^2}{x+1}}{1+\dfrac{x}{x^2-1}}=$

d) $\dfrac{3x-\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{(x-1)^2}-1}=$

ECUACIONES FRACCIONARIAS

Para resolver una ecuación donde aparece nuestra incógnita o variable en algún denominador, debemos tener en cuenta que no está definida la división entre 0 por lo que debemos primero considerar los valores de ésta que no podrán aceptarse nunca como solución por anular algún denominador.

Luego trabajamos con la expresión hasta encontrar el o los valores que satisfacen la igualdad planteada.

Ejemplo: $\frac{3}{2x-6} = \frac{2}{x+5}$

Primero vemos que valores no puede tomar x por ser valores que anulan los denominadores de la igualdad planteada: $x \neq 3$ y $x \neq -5$

Luego por la proporción planteada podemos:
3(x+5) = 2(2x – 6)

Distribuyendo:
3x + 15 = 4x – 12

Asociando:
3x – 4x = – 12 – 15
-1x = - 27
x= 27

Para verificar la solución encontrada, vemos que no anula ninguno de los denominadores y satisface la igualdad.

24) Resuelve las siguientes ecuaciones fraccionarias y verifica el conjunto solución hallado.

a) $\frac{2}{y} + \frac{4}{y} = 3$

b) $\frac{4}{y} - 5 = \frac{5}{2y}$

c) $6x - 5 = \frac{1}{x}$

d) $x + \frac{12}{x} = 7$

e) $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{3x}{x-1} = 2$

g) $\frac{3}{2x-3} = \frac{2}{x+5}$

h) $\frac{-2}{x+4} = \frac{-3}{x+1}$

i) $\frac{8w+5}{10w-7} = \frac{4w-3}{5w+7}$

j) $\frac{6t+7}{4t-1} = \frac{3t+8}{2t-4}$

k) $\frac{x}{x-3} + 3 = \frac{3}{x-3}$

l) $\frac{3x}{x+2} = -\frac{6}{x+2} - 2$

m) $\frac{2x}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x+2}$

n) $\frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x^2-9}$

o) $\frac{4.(x-2)}{x-3} + \frac{3}{x} = \frac{-3}{x.(x-3)}$