UNIDAD DIDÁCTICA VI

FUNCIONES

Temario: Funciones: definición, distintas representaciones: simbólica, diagramas de Venn, en sistemas de ejes coordenados. Ceros, tablas. Conjunto de Partida, Dominio, Conjunto Imagen. Dominio natural. Análisis de funciones según sus clasificaciones (inyectivas, suryectivas, biyectivas, crecientes, decrecientes, periódicas). Intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad, negatividad. Relaciones inversas. Álgebra de funciones.

Función polinómica: Función polinómica real. Ceros. Función afín: relación entre la función afín y las ecuaciones de la recta. Análisis de funciones afines, en particular las lineales y constantes. Funciones de proporcionalidad directa. Función cuadrática: elementos, representación gráfica, análisis de los términos para la determinación de las características de la gráfica, desplazamientos y relación (intuitiva) entre la gráfica de una función cuadrática y el lugar geométrico parábola. Uso de fórmulas para hallar los ceros de una función cuadrática. Relación entre los ceros de la función y las raíces de la ecuación de segundo grado. Análisis intuitivo de funciones polinómicas cúbicas.

Función racional: Dominio Natural e imagen, ceros, representación gráfica. Funciones de proporcionalidad inversa.

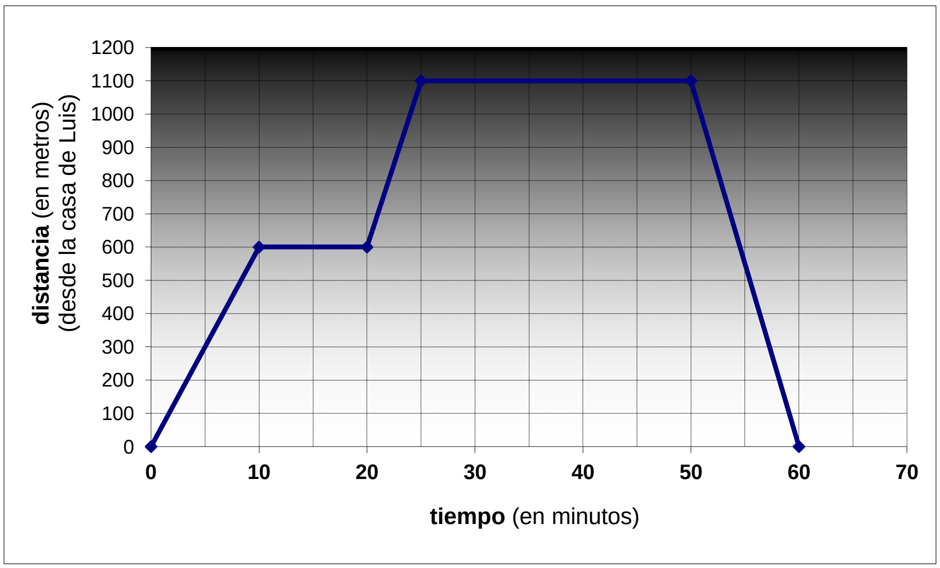
Nociones de las Funciones trigonométricas: Dominio, imagen, Periodos, ceros características y gráficas de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente. Funciones trigonométricas inversas.

Introducción:

Comencemos con algunas situaciones problemáticas que se resuelven con el concepto de funciones numéricas. Intenta plantear alguna de ellas o parte de las mismas con los conocimientos que posee ahora.

1) El sábado, Luis fue a realizar algunas compras. En el camino, se detuvo en la panadería en la que se encontró con una amiga. Luego, se dirigió sin parar hasta la tienda y luego volvió a su casa. El gráfico muestra la distancia a la que se encontraba Luis desde que salió de su casa hasta que volvió, en función del tiempo.

Figura 1

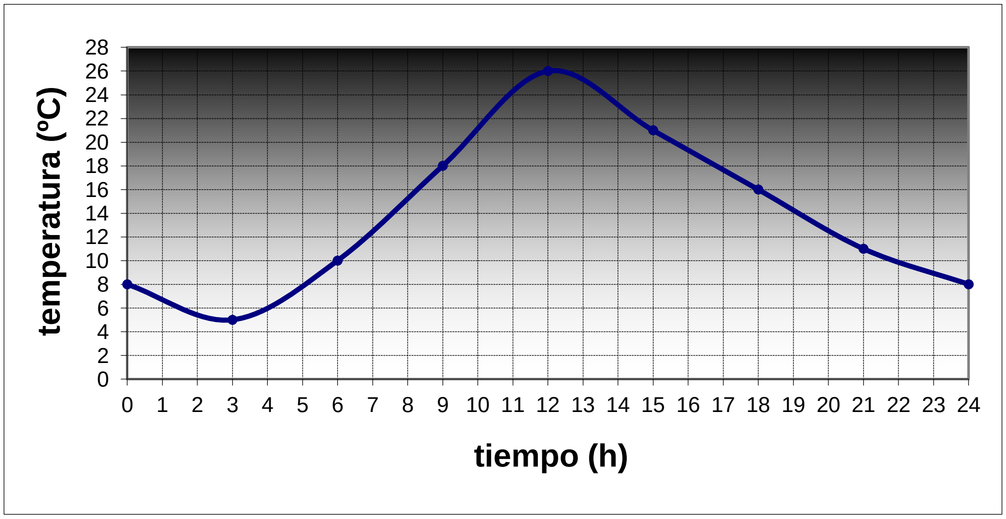


Según lo que muestra el gráfico:
¿Qué variable se representó en el eje horizontal? ¿y en el vertical?
¿Cuánto tiempo tardó Luis en llegar a la tienda?
¿A cuántos metros de la casa de Luis se encuentra la panadería?
¿Cuánto tiempo se quedó en la tienda?
¿Cuánto tiempo empleó para regresar desde la tienda?

2) El costo de transporte de un taxi está compuesto por un valor inicial al abordarlo (bajada de bandera) de $ 8.50 más $ 0.90 por cada 100 metros recorridos. Las fracciones no completas de metros no se cobran. ¿Cuánto costará un viaje de 4 km?¿Y otro de 9,5 km?¿Es esta relación una función? ¿Por qué?¿Cómo se representa?

3) Se muestra la variación de la temperatura exterior de una casa a medida que transcurre el tiempo.

Figura 2



a) ¿Cuál es la medida de la temperatura máxima y a qué hora se registró?
b) ¿Y cuál es la medida de la temperatura mínima?
c) ¿Durante cuánto tiempo se hicieron los registros?

Para poder responder correctamente a las situaciones anteriores, recordemos algunos conceptos que nos llevarán a lo que buscamos.

PRODUCTO CARTESIANO – RELACIONES – FUNCIONES

Para interpretar el concepto de relaciones y funciones entre conjuntos tomaremos un ejemplo con cuatro letras y cuatro números, por lo que los conjuntos que intervendrán serán:

A = {a, b, c, d} y B = {1, 2, 3, 4}

El Producto Cartesiano A x B está formado por todos los pares ordenados que se pueden armar con los elementos de ambos conjuntos, siendo el primer elemento del par, del conjunto A (primer conjunto o conjunto de partida) y el segundo elemento del par, del conjunto B (segundo conjunto o conjunto de llegada).

$$A \times B = \{(a;1),(a;2),(a;3),(a;4),(b;1),(b;2),(b;3),(b;4),(c;1),(c;2),(c;3),(c;4),(d;1),(d;2),(d;3),(d;4)\}$$

Se puede hacer una selección de estos pares obtenidos, estableciendo una vinculación o condición entre la 1º componente del par y la segunda. A esto se le llama **relación** entre el conjunto A y B.

Ejemplos

1) Dados A={x/x es un número dígito} B={x/x $\in$ IR $\wedge$ $|x| < 8$}. Determine los pares de la siguientes relaciones definidas entre A y B :

a) R_1: "x es la mitad de y"
b) R_2: "x es el siguiente de y"
c) R_3: "y=3x"

a) Resolvamos la primera. Para ello necesitamos saber los elementos de los conjuntos:

A={0, 1, 2, 3, ...,9} B=(-8; 8)

Como el conjunto B está formado por números reales, **no se puede** representar en diagramas de Venn, ya que sólo se utilizan para números discretos (los naturales). Hallemos los pares que cumplen con:

R_1={(1, 2), (2, 4), (3, 6)}

Piensa y explica por qué no se ha escrito el par (4, 8) ....

Ahora escribe las relaciones que faltaron
R_2: ....
R_3: ....

2) Escribe otros ejemplos entre conjuntos de:
   a) números reales;
   b) personas;
   c) figuras geométricas (triángulo, cuadrado, rectángulo, trapecio, rombo, romboide, circunferencia, trapezoide) y su área.

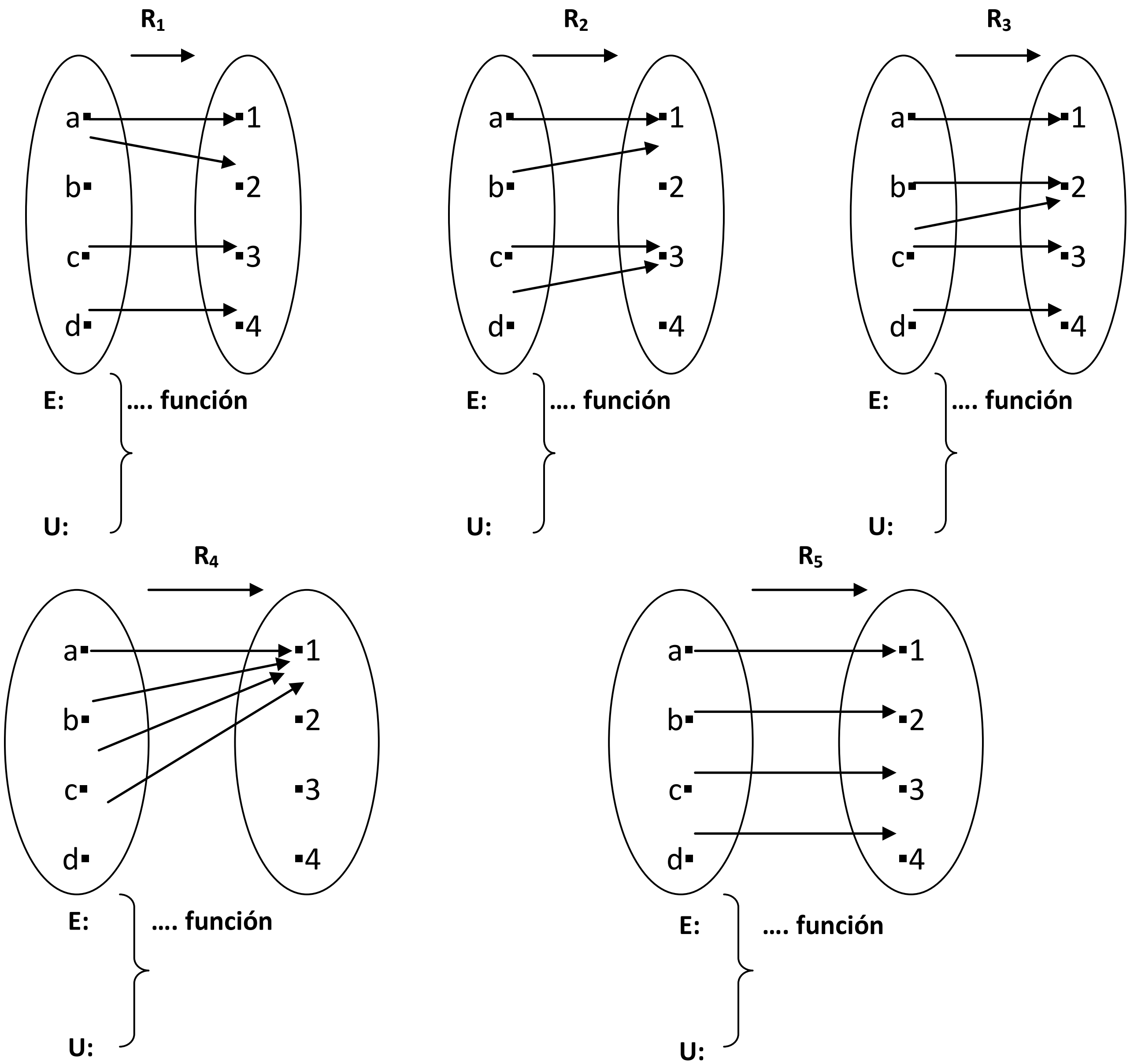
Algunas de las relaciones, cumplen características muy especiales y reciben el nombre de **funciones.**
Para reconocer si una relación es función, es conveniente utilizar primeramente el diagrama de flechas de la relación, y analizar si se cumplen las siguientes condiciones: existencia y unicidad.

Existencia: Todo elemento del conjunto de partida debe poseer imagen. En forma gráfica, de todos los elementos del conjunto de partida deben salir flechas.
Unicidad: Todo elemento del conjunto de partida debe tener imagen única. En forma gráfica, de cada elemento que posee existencia, debe salir solamente una flecha.

Ejemplo

Dadas las siguientes relaciones, determina si son función o no.

Figura 3



El primer elemento del par ordenado se lo llama 1º componente y en general, se lo simboliza con la letra x, pues en el caso de una representación en ejes cartesianos, la 1º componente es la abscisa del punto; el segundo elemento, es la 2da. Componente y se simboliza con la letra y (ordenada del punto). Otra forma de identificar a las componentes del par es como variable independiente y variable dependiente.

Llamamos variable a todo objeto, proceso o característica que está presente, o supuestamente presente, en el fenómeno que se quiere estudiar y reciben el nombre de variables en la medida en que su modificación provoca una modificación en otro objeto, proceso o característica.
Se llama variable independiente a aquella que se le puede asignar algún valor deseado puede cambiar libremente su valor, así como el primero, sin que su valor se vea afectado por alguna otra(s) variable(s). Generalmente, una variable independiente es la entrada de una función o relación y normalmente se denota por el símbolo x, en tanto que frecuentemente y se reserva para la variable dependiente, que depende de x.
Si la relación cumple con ambas condiciones, Existencia y Unicidad, la relación es considerada una **función**.

La relación, en la que a **cada** valor de una variable independiente le corresponde **un único** valor de la variable dependiente llamada imagen, es una **función**.

Veamos con respecto a las situaciones problemáticas planteadas al comienzo de la unidad. En los planteos antes mencionados podemos establecer una relación entre dos variables consideradas: una de estas variables recibe el nombre de variable **dependiente** (distancia recorrida desde la casa de Luis al almacén, el valor del viaje en taxi, la temperatura en el exterior de la casa), y la otra es la variable **independiente** (tiempo que tarda Luis en ir y volver al almacén, tiempo que se está midiendo la temperatura exterior de la casa, cuadras recorridas por el taxi). Podemos decir por ejemplo, que la distancia recorrida, depende del tiempo de marcha.

A una relación la llamamos función, cuando a cada **valor** de la variable independiente (*x*) le corresponde un único **valor** de la variable dependiente (*y*). En este caso se dice que "**y es función de x**" o que *y* depende de *x*, lo que se simboliza **y = f (x)**, siendo *f* el nombre de la función.

Definición: Dados dos conjuntos A y B. se llama función de A en B a la relación o correspondencia que a todo elemento de A le hace corresponder uno y sólo un elemento de B.

$f: A \to B$ quiere decir que la función f está definida de A en B

A es el conjunto de partida y B el conjunto de llegada.

Si a un elemento "x" de A le corresponde "y" a través de la función f, decimos que "y" es la imagen de "x" y lo escribimos f(x).

Dominio de una Función: Es el conjunto formado por los elementos (x) que pertenecen al conjunto de partida (A). Si una relación es función, el *domino* coincide con el conjunto de *partida* porque se debe cumplir la condición de existencia, sino no es función.
Imagen de una Función: Es el conjunto formado por los elementos (y) del conjunto de llegada (B) que son imágenes de elementos del conjunto de partida.
Realiza la siguiente consigna:

a) ¿Cuáles son los dominios de las relaciones anteriores? ¿qué sucede con los dominios en las relaciones que son funciones? Te daremos los dominios de las relaciones.

b) ¿Y los conjuntos Imagen de cada una de las Relaciones son:

Respuestas:

a) D_{R1} = {a, c, d} D_{R2} = {a, b, c, d} D_{R3} = {a, b, c, d} D_{R1} = {a, b, c, d} D_{R1} = {a, b, c, d}

b) I_{R1} = {1, 2, 3, 4} I_{R2} = {1, 3} I_{R3} = {1, 2, 3, 4} I_{R4} = {1} I_{R5} = {1, 2, 3, 4}

FUNCIONES NUMÉRICAS – REPRESENTACIONES – DOMINIO NATURAL

Con el fin de poder cuantificar su estudio trabajaremos con funciones que asignen o hagan corresponder números a números. Por ejemplo, consideremos la longitud de una circunferencia de diámetro "d" (expresado en centímetros). Sabemos que se puede hallar empleando una fórmula:

$$\boxed{\text{longitud circunferencia} = \pi \cdot d}$$

Podemos ordenar las distintas longitudes de circunferencias (*l*) según el diámetro de cada una, en una tabla.

d(cm)	Long *l* (cm)
0	0
0,5	1,57
1	3,14
2	6,28
3	9,42

Destaquemos que a *cada* diámetro de circunferencia le corresponde una *única* longitud.

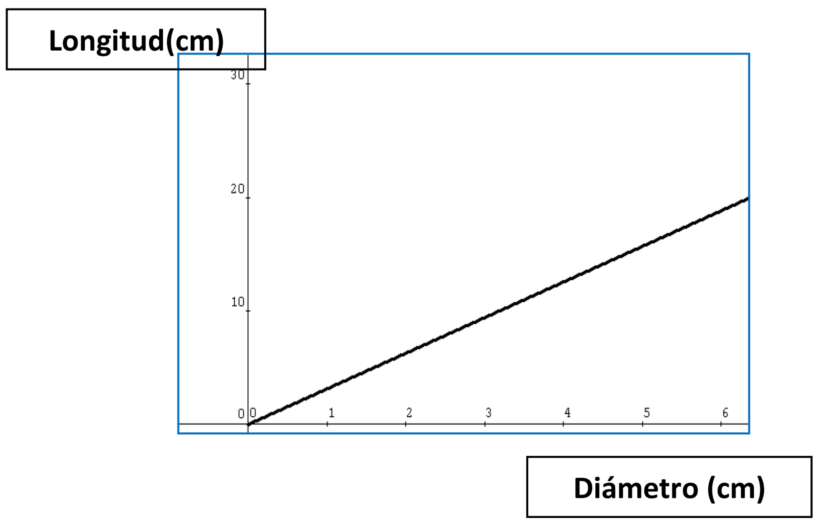
Nuevamente, se relacionan dos variables: diámetro (d) y longitud de circunferencia (*l*). La variable independiente será d y la variable dependiente será *l* . A esta relación la podemos escribir como l =f(d) y leemos : "*la longitud es función del diámetro"*

Según esta función se puede establecer que los valores que puede tomar *d* varían entre 0 e infinito, como también *l. El conjunto de partida y dominio,* son los reales no negativos; el conjunto de llegada, puede ser el conjunto de los números reales, pero la imagen de la función también son los reales no negativos (reales mayores o iguales que cero) y lo escribimos como:

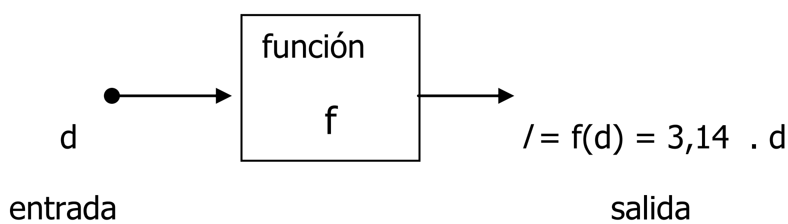
$$D_f = \{ d \in IR \,/\, d \geq 0 \} \quad y \quad I_f = \{ l \in R \,/\, l \geq 0 \}$$

Si se llevan los datos de la tabla a una gráfica cartesiana:

Figura 4



Piensa en la función anterior como una máquina de calcular.



La máquina toma un número (la entrada) y produce un resultado (la salida). A cada número en la entrada le corresponde un *único* número como salida.

Cuando no se especifica dominio de la función, siempre se supondrá que es el mayor conjunto de números reales para los que la regla de la función tenga sentido y dé valores de números reales. Este se llama ***dominio natural*** de la función. Observe que para multiplicar π . d, d puede ser cualquier número real, pero por ser una distancia, no corresponde considerar valores negativos.

Si se estuviera analizando una función en base a una gráfica cartesiana como las mostradas al comienzo de la unidad, el dominio natural estará dado por los valores de x "tomados" en ella: en el caso de Luis (distancia respecto del tiempo), se observa que el dominio natural es $D_f=[0, 60]$; para la gráfica que vincula temperatura-hora del día, obviamente, el dominio natural es $D_f=[0, 24]$

Otros ejemplos:

1) El dominio natural de la función $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ es el conjunto de todos los números reales excepto el 3, ya que la función no está definida para x=3. Entonces $D_f = R - \{3\}$

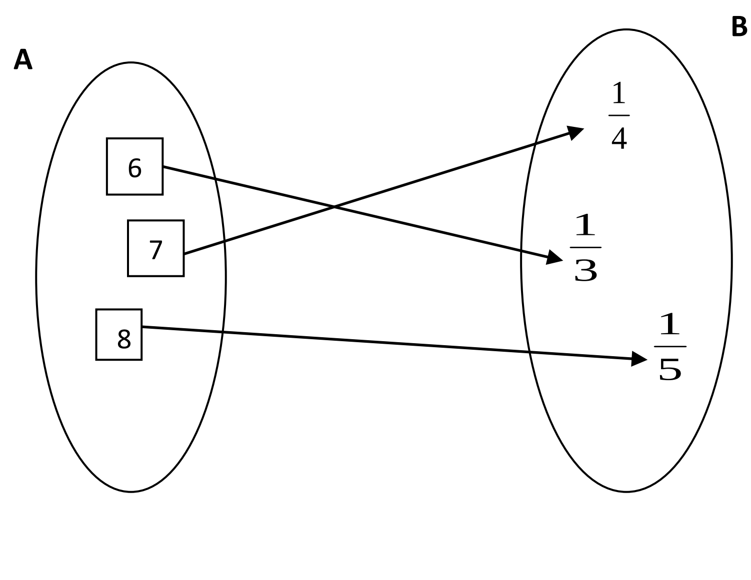
   Si se quiere restringir el dominio, por ejemplo a un conjunto finito de números, se podría definir la siguiente función:

   Si se quiere restringir el dominio escribimos:

$$f:\ \{6\ ,\ 7,\ 8\ \} \rightarrow \left\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\} /\ f(x)=\frac{1}{x-3}$$

   Esta función se puede representar en diagrama de Venn:

   Figura 5



2) El dominio natural y el conjunto imagen de la función: $f(x) = +\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números no negativos, ya que la raíz cuadrada de un número da un número real sólo cuando $x \geq 0$ y para la función $f(x) = -\sqrt{4-x}$ el dominio natural es el conjunto de todos los números reales para los cuales $4 - x \geq 0$, por lo tanto $D_f = (-\infty; 4]$ y la imagen es: $I_f = (-\infty ; 0]$

En ambos casos, el conjunto de llegada puede estar formado por todos los reales.

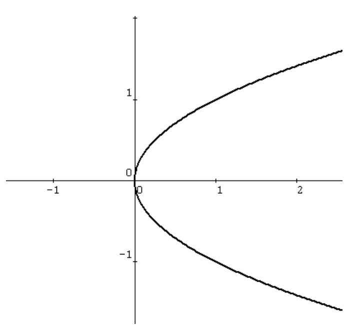
3) La función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 25}$ es una función racional donde el denominador no puede valer cero, por lo tanto tiene como dominio natural el conjunto IR – {5;-5}, porque f(x) toma valores reales para cualquier número real de *x* distinto de 5 y –5.

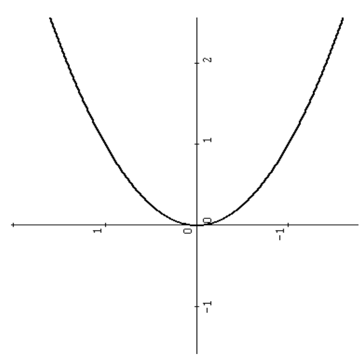
Realiza los siguientes ejercicios:

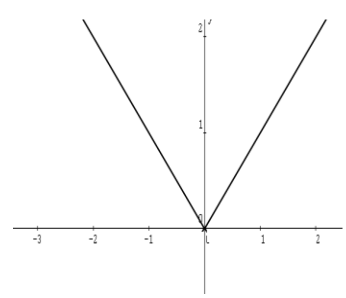
1) Escribe la expresión que representa las siguientes situaciones y determina conjuntos de partida y de llegada:

a) Área de un rectángulo de base 4 cm en *función* de la altura.
b) El perímetro de un rectángulo en *función* de la base, si se sabe que ésta es el doble de la altura.
c) la base de un rectángulo en *función* de la altura si se sabe que el área es de 6 m^2.

2) Sea A el conjunto de partida formado por los números reales, determina cuáles de las siguientes relaciones son funciones:







3) Halla el dominio natural y la imagen de las siguientes funciones y represente en diagrama de máquina.

a) $f(x) = 1 + x^2$ b) $f(t) = 1 - \sqrt{t}$ c) $f(z) = \sqrt{4 - z^2}$ d) $f(x) = |x|$

4) Representa las siguientes funciones en gráficas cartesianas

a) $f : R \rightarrow R / f(x) = 4 - 2x$

b) $f : Z \rightarrow R / f(x) = (x - 2)^2$

c) $f : N_0 \rightarrow R / f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f : [0;\ 10] \rightarrow R / f(x) = x^2 - 2$

Nota: Para realizar un gráfico es conveniente construir una tabla de valores, en donde asignando valores a la variable x se calculan los correspondientes valores de y, obteniéndose los puntos que representarán a la función como pares ordenados (x; y). En esta tabla de valores se asignan los valores a ***x*** y se calculan los valores de ***y***, según el formato que tenga la relación. Una vez determinado los pares (x; y), representarlos en el diagrama cartesiano, verificar que coincidan con puntos de la gráfica. Si no es así, revisar o comprobar dónde está el error.

5) Determina el dominio y la expresión algebraica que define cada una de las siguientes funciones, si se sabe que todas tienen como conjunto de llegada el conjunto de números reales:

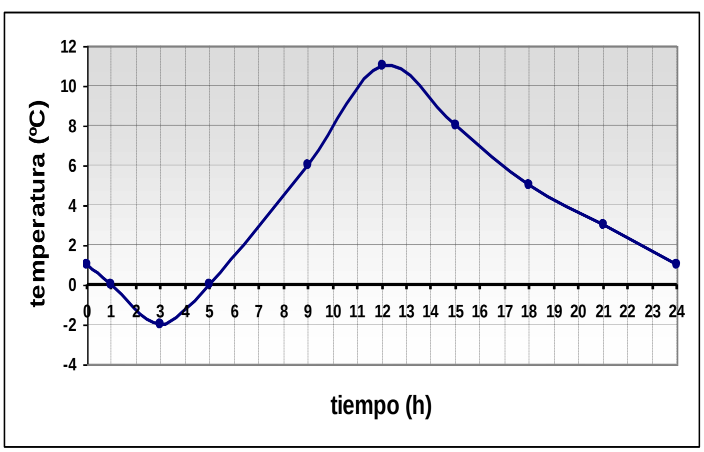
a) A cada número real le corresponde el cuadrado de su mitad.
b) A cada número entero le corresponde como imagen la suma entre su cuadrado y 1.
c) A cada número real le corresponde la diferencia entre 5 y el doble del número dado.

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES DE FUNCIONES

Ya se han definido algunas propiedades o elementos de las funciones: el Dominio, el Conjunto de Partida y la Imagen. Es necesario definir otros elementos que caracterizan a las funciones para poder luego analizarlas.

a. Ceros de una Función

Miremos ahora la variación de la temperatura exterior de otra casa a medida que transcurre el tiempo.

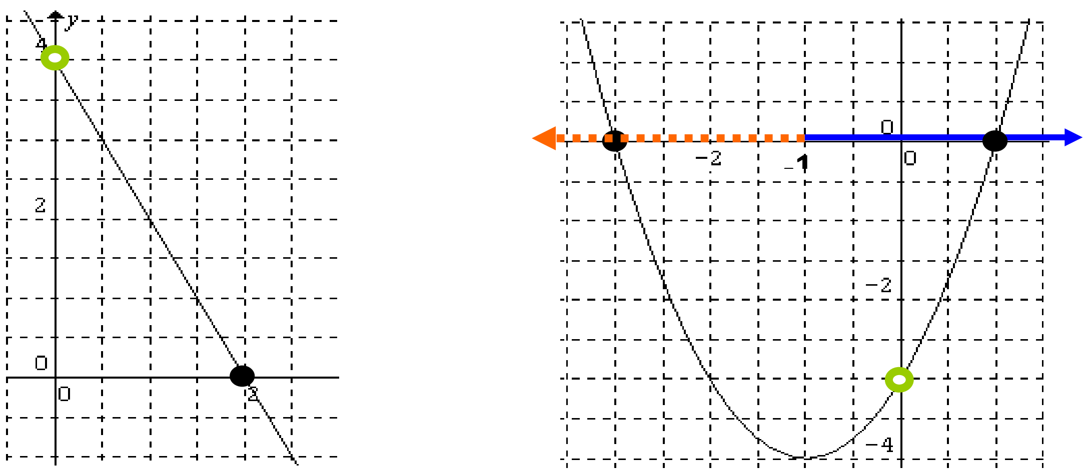


Vemos que a la hora 1, la temperatura es de 0ºC.
En símbolos, si $x_1 = 1$ y $f(1)=0$, entonces decimos que $x_1 = 1$ es un cero de la función porque la imagen de dicho valor de x es cero.
Los ceros de una función son aquellos valores del dominio cuya imagen es cero. En forma gráfica los ceros son aquellos puntos de la gráfica de la función que intersecan al eje x (es decir: $f(x)=0$ o lo que es lo mismo

Figura 6 y=0).

Para hallar analíticamente los ceros de una función, se toma la expresión de ésta y se iguala a 0. La expresión analítica de la función se transforma en una ecuación. Se resuelve la ecuación y los valores de x hallados son las raíces buscadas. Por ejemplo, observe las gráficas de las siguientes funciones:

Figura 7



Se han representado dos funciones, de las cuales se conocen sus expresiones, y se desea calcular los ceros de esas funciones. Por ahora, lo veremos sólo en el gráfico:

Para la gráfica 1, la expresión es $y = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

Para la gráfica 2, $y = x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 1$

b. Polos

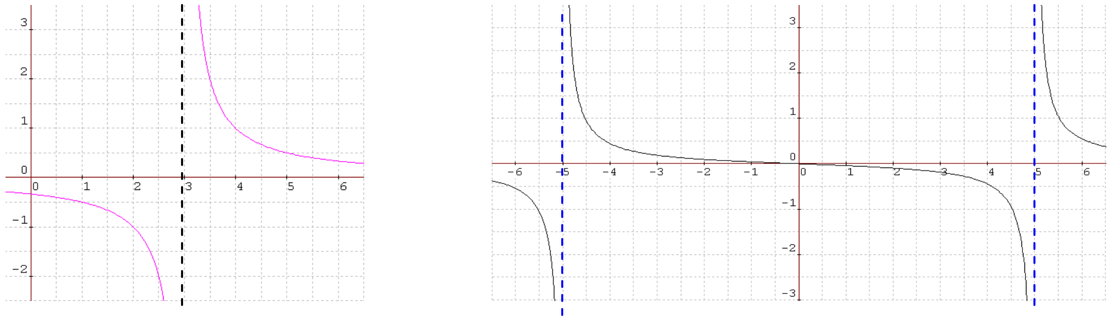
Se llama polos de una función a los valores que no puede tomar el dominio de la función, ya que anulan el denominador, sin anular al numerador. Es decir, que se llama polos a los valores de x para los cuales la función se hace infinita (indeterminada), pues se anula el denominador y no se anula al numerador.

Si algún valor real x_0, anula, simultáneamente numerador y denominador, se dice que la función presenta una laguna en x_0.

Ejemplos: Dadas: 1) $f : IR - \{3\} \rightarrow IR \,/\, y = \dfrac{1}{x-3}$

2) $g : IR - \{-5, 5\} \rightarrow IR \,/\, y = \dfrac{x}{x^2 - 25}$

Figura 8



La función 1) $y = \dfrac{1}{x-3}$ tiene un polo en x_1 = 3. Para este valor de x la función no está definida y tiende a un valor muy grande (infinito). La recta definida por x = 3 es una Asíntota Vertical.

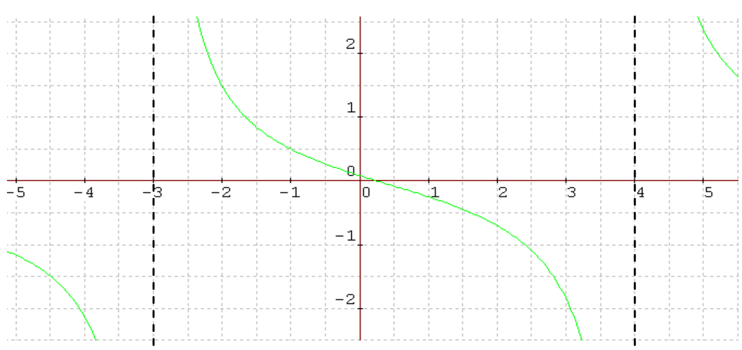
La función 2) $y = \dfrac{x}{x^2-25}$ tiene polos en x_1 =5 y en x_2 = -5, porque para esos valores la función se hace infinita.

Los casos más frecuentes de polos se presentan en el estudio de funciones racionales, es decir funciones con conjunto de partida y llegada los números reales que se pueden expresar como cocientes de funciones polinómicas. Estas funciones las estudiaremos en forma particular y con más detalles, por ahora analicemos gráficamente que significa un polo para una función racional del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

En estos casos los polos serán los ceros del denominador, es decir, cuando Q(x) = 0.

Ejemplo 3) $y = \dfrac{4x-1}{x^2-x-12}$

Figura 9



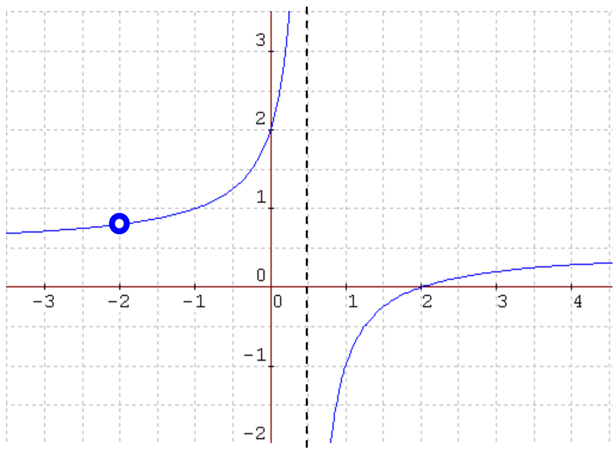
En $y = x^2 - x - 12 = 0$ las raíces son x_1= -3 ; x_2 = 4 (veremos más adelante el cálculo), por lo tanto en esos valores la función tiene polos y asíntotas verticales.

Ejemplo 4) Analice si la siguiente función, presenta polos o lagunas:

$$y = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 3x - 2}$$

Para el denominador $2x^2 + 3x - 2 = 0$, los ceros son x_1= -2 ; x_2= ½ ; no obstante x_1 = -2 **no es un polo** porque anula también el numerador, la función no está definida y se representa con un punto abierto. A estos puntos se los denomina **lagunas.**

Figura 10



c. Ordenada al origen

Se entiende por **ordenada al origen** al valor que toma la función cuando la variable independiente x_0 = 0. Gráficamente representa la intersección de la función con el eje y. En los casos anteriores, por tratarse de funciones polinómicas, que veremos más adelante, la ordenada al origen está representada por el valor del término independiente.

d. Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento

Sea f una función, con conjunto de partida IR y conjunto de llegada IR dada por y=f(x), diremos que:
Un **intervalo de crecimiento** de una función es un subconjunto I del dominio para el cual a mayores valores de la variable independiente x le corresponden mayores valores de la variable dependiente y. En términos de incrementos si Δx>0 (+), Δy>0 (+). En lenguaje simbólico:

$$\forall x \in I : si\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

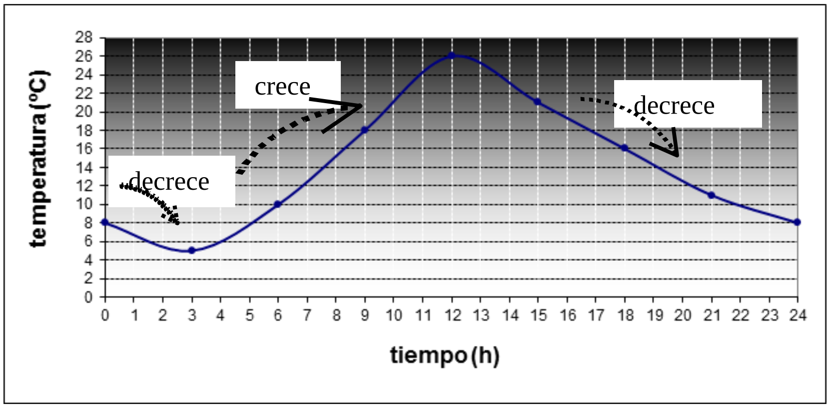
Que se lee: Para todo x perteneciente al intervalo I, si x_1 en menor que x_2, ocurre que la imagen de x_1 es menor que la imagen de x_2.

Un **intervalo de decrecimiento** se presenta en el caso contrario al expuesto:

$$\forall x \in I : si\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

En el caso de las funciones representadas anteriormente en la **Figura 6** , la función cuya gráfica es una recta, será siempre decreciente; mientras que la otra función, posee ambos tipos de intervalos, a cada lado del valor x_1 = -1, que corresponde a la abscisa del vértice de la parábola. El intervalo (-∞;-1) es el Intervalo de Decrecimiento. El intervalo (-1;+∞) es el Intervalo de Crecimiento.

Recordemos el caso de la situación representada en la **Figura 6**



podemos decir además:

1) La **máxima** temperatura está dada por 26ºC a la hora 12, es decir que la mayor de las medidas de temperatura es 26.
2) La temperatura **mínima** es 5ºC registrada en la hora 3, es decir que la menor de las medidas de temperatura es 5.

Como la temperatura varía entre 5ºC y 26ºC, y a su vez, puede tomar valores reales intermedios, podemos decir que la imagen de la función está dada por el intervalo real cerrado [5,26].

De la misma manera, como el tiempo varía entre 0 h y 24 h (con sus valores reales intermedios), podemos decir que el dominio de la función está dado por el intervalo real cerrado [0,24].

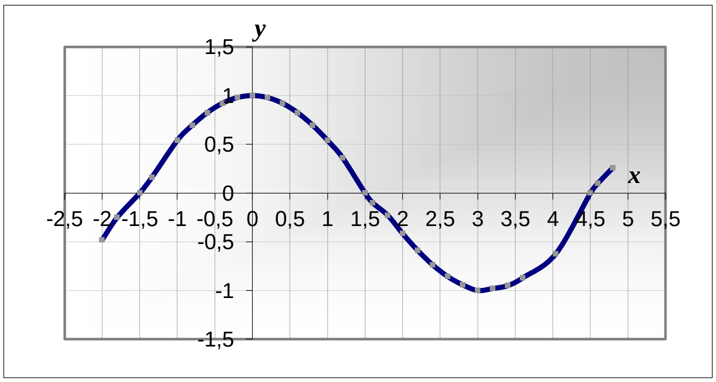
3) La función es **creciente** de 3h a 12h, puesto que al aumentar el tiempo, también aumenta la temperatura (en el gráfico la curva que representa este aumento de temperatura es ascendente, siempre observándola de izquierda a derecha, es decir la curva "sube") desde 5ºC hasta los 26ºC. En este caso el incremento (o variación) de la función es 21ºC.
4) La función es **decreciente:**
   i) de 0h a 3h puesto que a medida que aumenta el tiempo, la temperatura disminuye (en el gráfico observándolo de izquierda a derecha la curva que representa esta disminución de temperatura es descendente, es decir la curva "baja") desde 8ºC a 5ºC. Por lo tanto el incremento (o variación) de la función es de –3ºC. Note que el incremento, en este caso, es negativo para indicar que

la temperatura bajó durante ese período de tiempo. De 12h a 24h, la temperatura vuelve a disminuir, como también lo hace de 26ºC a 8ºC.la variación de la temperatura es de -18ºC. Note que el incremento es negativo para indicar que la temperatura bajó durante ese período de tiempo.

Por lo cual esta función presenta dos intervalos decrecientes y un intervalo creciente que son ....

Realiza los siguientes ejercicios:

6) En la siguiente gráfica, que representa a una función f, cuyo Dominio es el conjunto de números reales:



a) Indica los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas ....
b) Da las coordenadas (x, y) de dichos puntos: ....
c) ¿Cuántos ceros presenta esta función?...............
d) En caso de ser posible, contesta:
   i) ¿Cuál es el mínimo valor de la función?. Escribe las coordenadas de dicho punto..................
   ii) ¿Cuáles son las coordenadas de un máximo local de la función?........................ Escribe las coordenadas de dicho punto....................
e) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

7) Para la función $f: D_f \to IR / y = 2x - 4$ halla, de ser posible:

a) El dominio de f
b) los ceros
c) los polos
d) intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

8) Dada la función $g: D_g \to R \quad dada\ por\ g(x) = \frac{x^2-9}{x^2}$ halla, de ser posible:

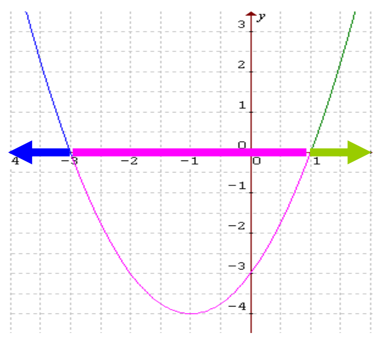
a) El dominio de g

b) los ceros
c) los polos

e. Conjunto o intervalos de Positividad y Negatividad

Dada una función que aplica un conjunto D en los reales, los Conjuntos de Positividad y Negatividad son Intervalos del Dominio (D) de la Función y representan los valores de x para los cuales la función toma valores positivos o negativos.
El **Conjunto o intervalo de Positividad (C^+)** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números positivos.
El **Conjunto o intervalo de Negatividad (C^-)** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.
Ambos subconjuntos están formados por la unión de los intervalos donde se cumple la condición definida.
Por ejemplo, en el gráfico de la función cuadrática definida como $g: IR \to IR / y = x^2 + 2x - 3$, determinamos los conjuntos C^+ y C^-:

Figura 11



$C^+ = (-\infty;-3) \cup (+1;+\infty)$

$C^- = (-3;1)$

<u>Recuerda</u>: Los conjuntos de Positividad, Negatividad y los Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento son subconjuntos del Dominio, por lo tanto, son subconjuntos formados por valores de la variable x y se consideran en el eje de las abscisas.

f. Funciones Pares y Funciones Impares

Sea f una función que aplica un conjunto D en los reales, una función ***f*** es **par** si para todo valor de x perteneciente al dominio se verifica que:

$$f(x) = f(-x)$$

Gráficamente se identifica una función par cuando es simétrica respecto del eje y.
En el ejemplo siguiente, para la función $f: IR \to IR / y = -x^2 + 4$, resulta:

$$f(1) = f(-1) = 3$$

Una función ***f*** es **impar** si para todo valor de x perteneciente al dominio se verifica que:

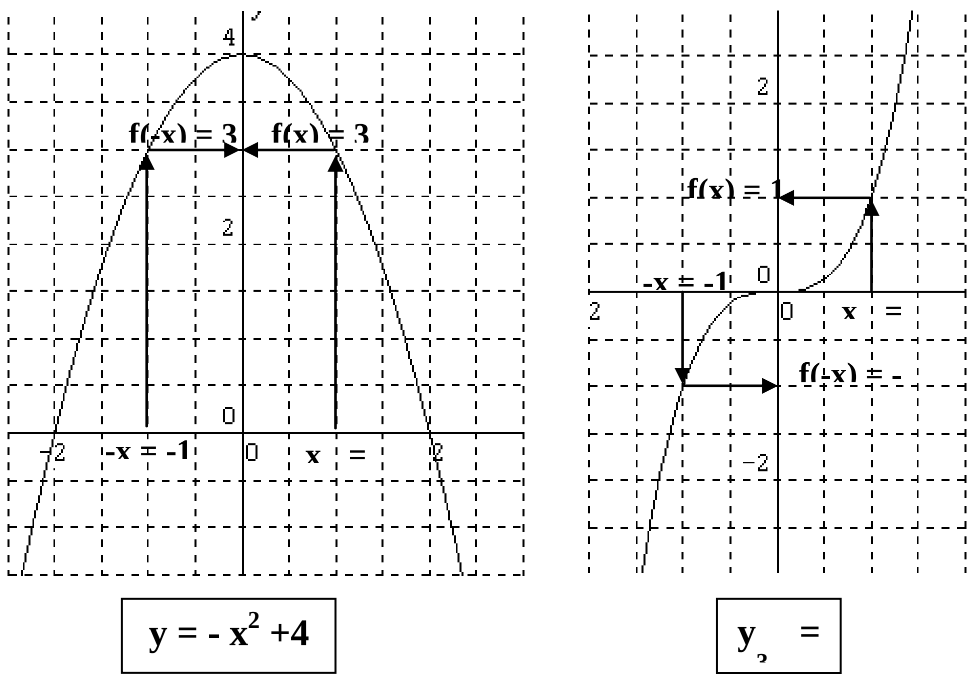
$$f(-x) = - f(x)$$

Gráficamente se identifica una función impar cuando es simétrica respecto del origen de coordenadas.

En el ejemplo siguiente, para la función $f : \mathrm{IR} \to IR / y = x^3$ y = x^3, resulta:

$$f(1) = 1 \; ; \; f(-1) = -1 = - f(1)$$

Figura 12



g. Funciones Periódicas

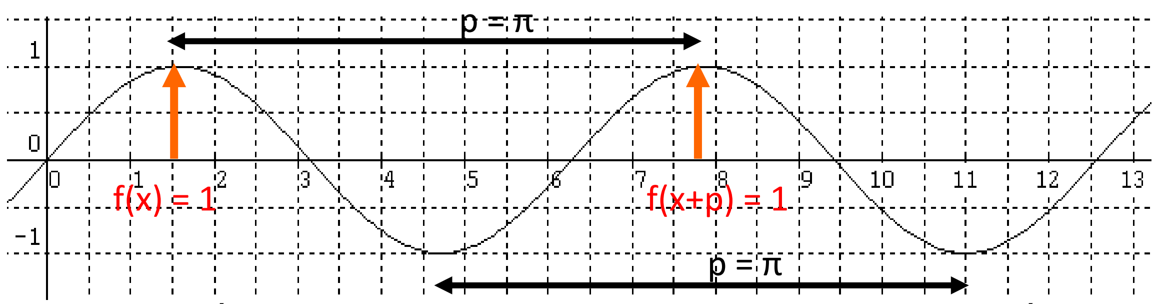
Sea f una función que aplica un conjunto D en los reales, una función ***f*** es **periódica** si existe un número ***p*** tal que:

$$f(x + p) = f(x)$$

para todo x que pertenece al dominio de f, donde ***p*** es el período, o intervalo para el cual se repite el valor de la función.

Las funciones trigonométricas, que veremos más adelante, son un ejemplo clásico de funciones periódicas, pero no las únicas.

Ejemplo: ***y = seno x*** **Figura 13**



Vemos que la función seno, luego de un valor en el eje x, que llamamos período p, vuelve a repetirse.

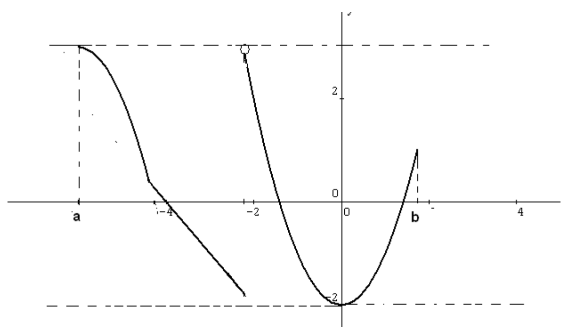
h. Funciones acotadas

Una función f está acotada superiormente si existe un número real k tal que para toda x es f(x) ≤ k. El número k se llama cota superior.
Una función f está acotada inferiormente si existe un número real k' tal que para toda x es f(x) ≥ k'. El número k' se llama cota inferior.
Una función esta **acotada** si lo está a superior e inferiormente.

$$k' \leq f(x) \leq k$$

Desde el punto de vista geométrico, esto significa que en el intervalo [a,b] toda la gráfica está entre dos rectas horizontales y = -k e y = k.

Figura 14

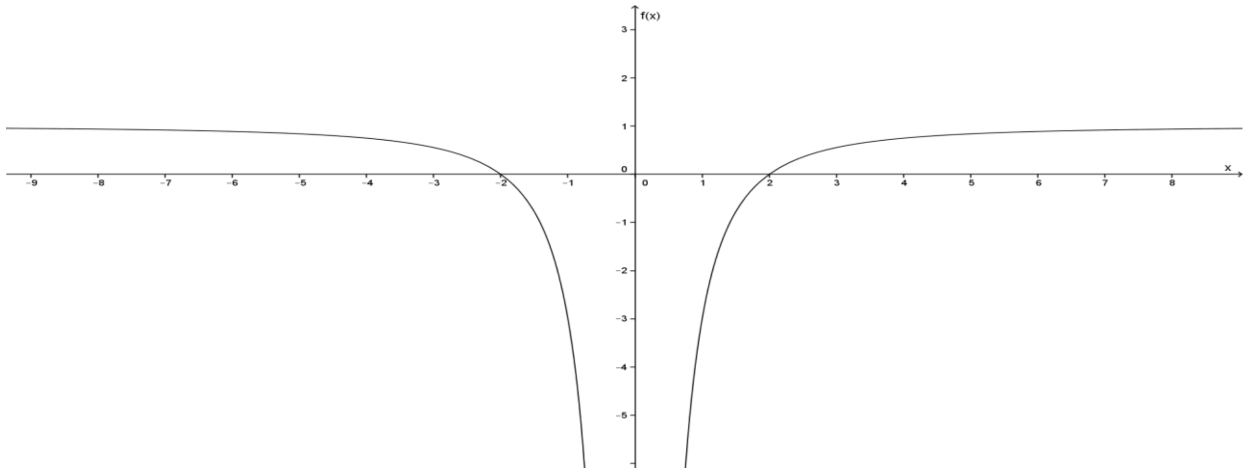


Si una función está acotada, presenta un conjunto de cotas inferiores y superiores y entre los elementos de éste conjunto, existe la menor cota superior, llamada supremo y la mayor cota inferior llamada ínfimo, que pueden pertenecer o no a la imagen de la función.
Hay funciones que no son acotadas, escribe un ejemplo ....

Realiza los siguientes ejercicios

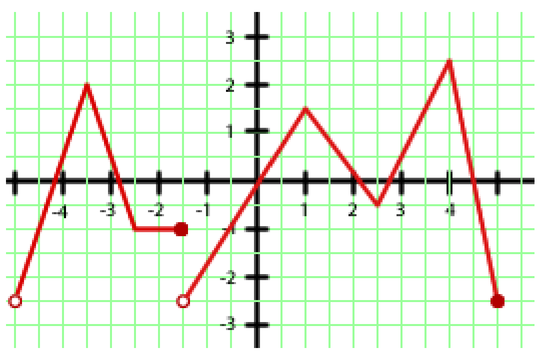
9) Responde las preguntas del ítem anterior para las siguientes funciones:
   a) $f : D_f \rightarrow IR / y = 2x - 4$
   b) $\mathrm{h} : D_h \rightarrow IR / y = 4x^2 - 3x$

c) $g: D_g \to IR / y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ (a partir de la gráfica que figura debajo)



10) Escoge la opción correcta en cada caso para la siguiente gráfica:

Figura 16



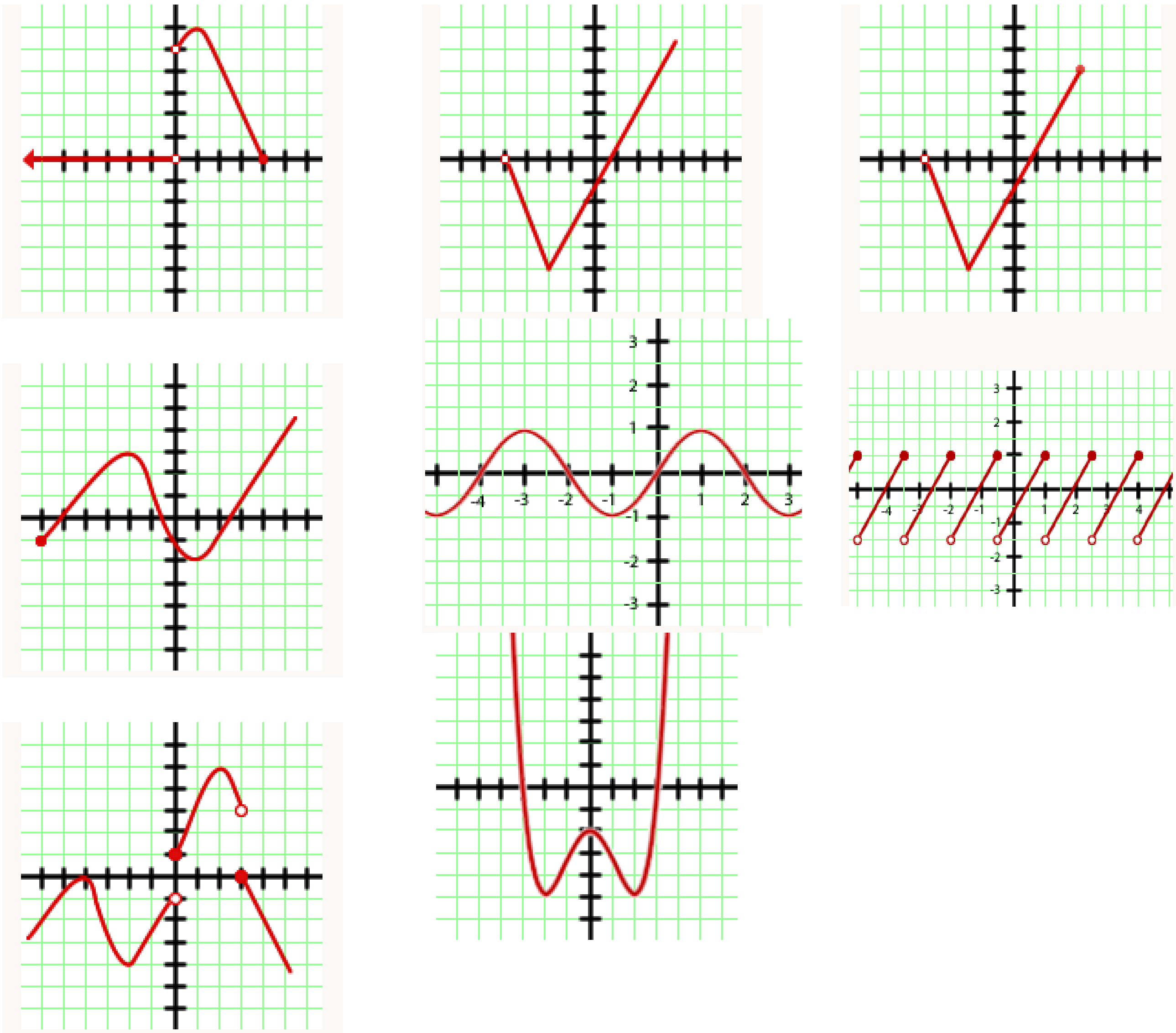
a) La función es estrictamente decreciente en:
$(-3.5, -1.5) \cup (1, 2.5) \cup (4, 5)$
$(-3.5, -2.5) \cup (1, 2.5) \cup (4, 5)$
$(-3.5, -2.5) \cup (1, 2.5) \cup (4, 5]$

b) La función es estrictamente creciente en:
$(-5, -3.5) \cup (-1.5, 1) \cup (2.5, 4)$
$(-\infty, -3.5) \cup (-1.5, 1) \cup (2.5, 4)$
$(-5, -3.5) \cup (-2.5, 1) \cup (2.5, 4)$

11) Dada la gráfica de las siguientes funciones, con dominio en un intervalos I, responde:

a) Determina el intervalo I
b) ¿Es acotada? Indica por qué.
c) ¿Es periódica? Determina el período.
d) ¿Es par o impar?
e) Presenta intervalos de positividad o de negatividad? Escríbelos.

Figura 17

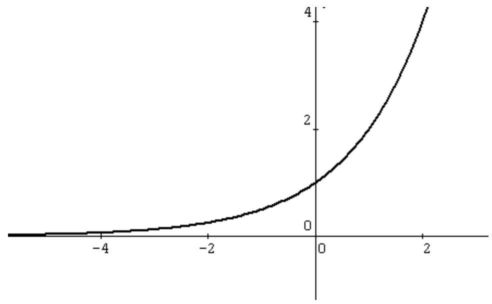


CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES EN SURYECTIVAS, INYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Hasta ahora, al analizar relaciones, hemos analizado solamente lo que ocurre en el conjunto de partida o primer conjunto. No nos ha preocupado ver qué pasa en el segundo conjunto. Como el primer análisis ha permitido determinar cuáles de las relaciones son funciones, el análisis seguirá solamente para las funciones.

- FUNCIONES SURYECTIVAS:
  Una f una función definida de A en B es *suryectiva* sí y sólo sí, todos los elementos del conjunto B tienen, por lo menos una pre-imagen en A.

Por ejemplo, la siguiente gráfica de una función f definida de IR en IR$^+$, esta función es suryectiva.



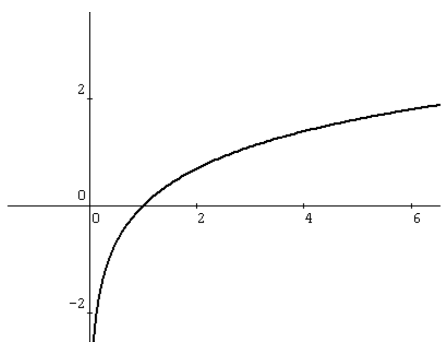
¿Sería suryectiva esta función si la definiéramos de IR en IR? Justifica.

....
....

- FUNCIONES INYECTIVAS:

  Una f una función definida de A en B es inyectiva, sí y sólo sí todo par de elementos distintos del dominio tiene imágenes distintas. Es decir, cada elemento del conjunto de llegada es imagen de un sólo elemento del dominio de f.

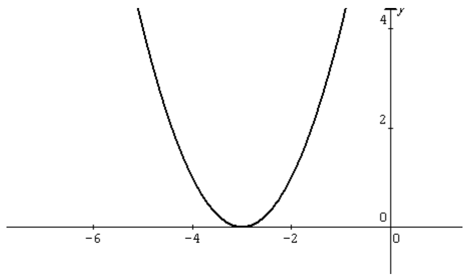
  Por ejemplo, dada la gráfica de una función f definida de IR$^+$ en IR, se observa que esta función es inyectiva.



- FUNCIONES BIYECTIVAS:

  Si una función es Suryectiva e Inyectiva a la vez, decimos que la función es Biyectiva y decimos que la función es uno a uno.

  Dada la gráfica de la siguiente función g, definida de IR en IR, se observa que no es inyectiva



g no es inyectiva ya que, por ejemplo, 2 es la imagen de más de un elemento del dominio.

Proponga otros ejemplos de funciones que no sean biyectivas y diga por qué ....

Otro ejemplo importante:
12)Analiza si la función f: IR→IR/ f(x)= x, llamada función identidad, es biyectiva.

RELACIONES Y FUNCIONES INVERSAS

El estudio y uso de relaciones y funciones inversas nos acompañará en el análisis de varias funciones: lineales, exponenciales, trigonométricas.

Si se trabaja con la relación R(x) = x + 2 (llamaremos imagen de la variable independiente a sumar 2), en diagrama de máquina sería:

$$x \longrightarrow \overset{f}{\boxed{+2}} \longrightarrow x+2$$

¿Qué se puede hacer con la imagen de x para recuperar a x?

Lo único que se puede hacer es restar 2. A esta relación la llamaremos ***inversa de f.***

y se escribirá : $f^{-1}(x) = x-2$. La inversa "deshace lo que hace f". Esto se puede representar como:

$$x \longrightarrow \overset{f}{\boxed{+2}} \longrightarrow \mathbf{x+2} \longrightarrow \overset{f^{-1}}{\boxed{-2}} \longrightarrow x$$

Una aclaración: el símbolo $f^{-1}(x)$ no significa $\frac{1}{f(x)}$, que representa lo que se conoce como relación recíproca.

Dada una relación **R** que aplica A en B, se llama **relación inversa** de **R** y se designa $\mathbf{R}^{-1}$, a otra relación tal que para cada par ordenado (x; y) que verifica a **R**, el par ordenado (y;x) verifica a $\mathbf{R}^{-1}$.

Para encontrar la relación inversa se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se intercambian las variables **x** e **y**.
2. Cuando algebraicamente es posible, se despeja la variable y, para que quede de la forma más usual.
3. Se realiza la representación en el diagrama cartesiano. La gráfica resultante es simétrica respecto de un eje a 45° (y=x).

Ejemplo

$y = 2x - 2$ intercambiamos variables

$x = 2y - 2$

$x + 2 = 2y$ Despejamos y → $y = \frac{1}{2}x + 1$

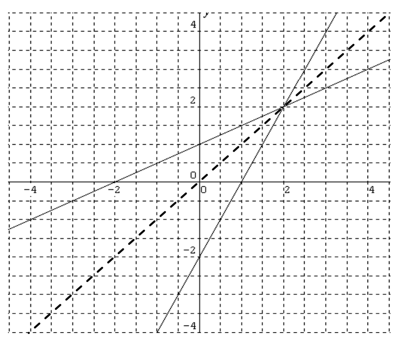
$\frac{x+2}{2} = y = \frac{x}{2} + \frac{2}{2}$

Calculamos las tablas de valores de las dos funciones para compararlas

x	y =2x - 2	(x ; y)		x	y =1/2 x + 1	(x ; y)
0				-2		
1				0		
3				4		

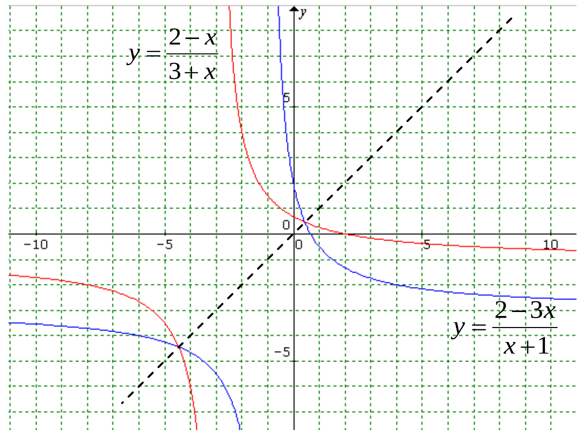
Realizamos la gráfica de ambas funciones para comprobar la simetría de ambas respecto del eje y = x (recta a 45º)

Figura 18



A continuación resolveremos otro ejercicio de función inversa:

Figura 19



Sea $f: IR-\{-3\} \rightarrow IR \,/\, y=\dfrac{2-x}{3+x}$

$$1^{\circ}\; x=\frac{2-y}{3+y}$$

$$x\cdot(3+y)=2-y$$

$$3x+xy=2-y$$

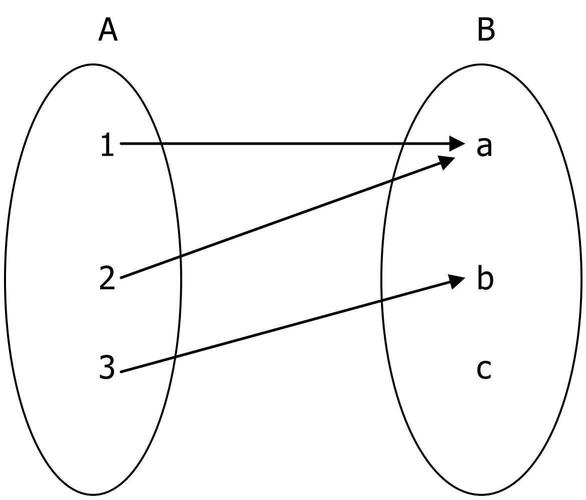
$$xy+y=2-3x$$

$$y\cdot(x+1)=2-3x$$

$$y=\frac{2-3x}{x+1}$$

Importante:

Para todas las funciones es posible hallar su *relación inversa*, pero no para todas las funciones, su inversa es **función**. La condición que se debe verificar para la inversa sea una función es que "la función debe ser biyectiva". ¿Por qué? Observemos la siguiente función y su inversa:



La función $f^{-1}: B \rightarrow A$ no sería función porque el elemento "a" tendría dos imágenes (por lo que no verifica la unicidad exigida para ser función); la función f no es inyectiva. Además, el elemento "c" no tendría imagen (no se verifica la existencia exigida para ser función); la función no es suryectiva.

Realiza los siguientes ejercicios

13) Grafica, para cada ítem, una función de D en IR que sea:

a) inyectiva y no suryectiva,
b) suryectiva y no inyectiva,
c) biyectiva
Nota: Define D

14) Indica si las siguientes funciones son biyectivas:

a) f le hace corresponder a cada persona el país en el que nació
b) f le hace corresponder a cada persona su domicilio
c) f le hace corresponder a cada auto su patente.

15) a) Determina dominio y el conjunto de llegada.

b) Encuentra la relación inversa de f.

c) De ser necesario, restringe dominio e imagen de f para que su inversa sea función.

a) $f(x)=\dfrac{2x+5}{5x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{2-x}{3+x}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ e) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+1$ f) $f(x)=\sqrt{x-2}$

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Al igual que los números, las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (restringiendo el dominio a aquellos valores para los cuales no anulen el denominador), y así obtener otras funciones.

Si f y g son dos funciones definidas de A en B, para cada x que pertenece al dominio de ambas, se definen las funciones f + g; f - g y f . g mediante las expresiones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Además, en cualquier punto de $D_f \cap D_g$, en el cual $g(x) \neq 0$, se pueden también definir la función f/g a partir de la expresión: $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si "c" es un número real, entonces la función c.f está definida para toda x en el dominio de f mediante

$$(c.f)(x) = c.f(x)$$

Realiza los siguientes ejercicios

16) Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$, entonces:

a) Encuentra el dominio natural de f y g para que sean funciones:

b) Determina el dominio de la función que se obtiene al realizar las siguientes operaciones entre f y g (como se muestra en el ejemplo):

i. $3.g(x) = 3.\sqrt{1-x}$ ....

ii. $(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ ....

iii. $(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$ ....

iv. $(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$ ....

v. $(f.g)(x) = \sqrt{1-x} . \sqrt{x} = \sqrt{(x(1-x)}$ ....

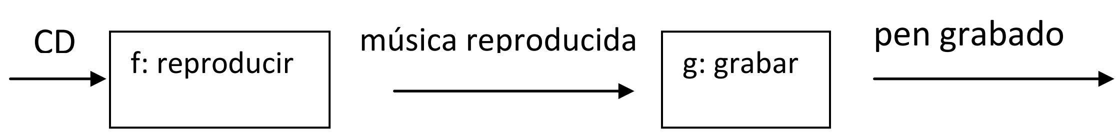
vi. $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ con dominio [0,1)

vii. $(g/f)(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ con dominio (0;1]

Composición de funciones

Esta es otra manera de combinar funciones. Se puede analizar desde un ejemplo:

"Si disponemos de un equipo de sonido y queremos grabar música de un CD en un pen-drive ¿qué funciones debe realizar el equipo?



Se observa que g actúa sobre el resultado de aplicar f. Esto se puede escribir como g[f(x)] y se lee: "g aplicada a f de x"

A ésta operación entre las funciones f y g se llama **composición**, y el resultado es otra función que anotamos $g \circ f$.

Definición

Sean las funciones g y f, donde g está definida de A en B y f de B en C, la composición $f \circ g$ es una nueva función, tal que:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

El dominio de $f \circ g$ consiste en todos los números x del dominio de g para los cuales g(x) está en el dominio de f, es decir: $I_g \subseteq D_f$.

El dominio de la función compuesta es el dominio de la primera función aplicada (g) y el conjunto imagen de la función compuesta está incluido en el conjunto imagen de la segunda función (f).

Por ejemplo, si se tiene que componer f con g, ambas definidas de IR a IR, siendo $f(x)=x^2$ y $g(x)=x-4$, verificamos que la composición es una función ya que D_f = IR, $I_f=[0; +\infty)$, D_g =IR y I_g = IR. Para la composición $(g \circ f)$ se comprueba que $I_f \subseteq D_g$.

Primero se identifica qué "hace" cada función: f(x) eleva al cuadrado y g(x) resta 4.

Aplicando la definición:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2] = x^2 - 4$$

Por lo tanto : $(g \circ f)(x) : IR \to [-4 , +\infty)$

¿ Es $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$?

Si quisiéramos encontrar $(f \circ g)$, se verifica que $I_g \subseteq D_f$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x - 4] = (x - 4)^2$$

Para esta función $(f \circ g)$: $IR \to [0; +\infty)$; y su representación gráfica es una parábola desplazada horizontalmente 4 unidades hacia la derecha.

Por lo tanto se puede decir que la composición no es conmutativa ya que $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.¿Qué pasaría si componemos una función con su inversa?

Por ejemplo:

Dadas las funciones biyectivas: f y su inversa f^{-1}, tal que: $f(x) = x + 3$ y $f^{-1}(x) = x - 3$.

a) Halle f^{-1}.
b) Realice $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$. ¿Qué obtienes? Concluye …………………….
c) Represente mediante un diagrama de cajas.

$$\xrightarrow{x} \boxed{\textbf{f: : suma 3}} \xrightarrow{x+3} \boxed{\textbf{g: resta 3}} \xrightarrow{x+3-3=x}$$

La composición de una función y su inversa aplicada a un elemento del dominio da como resultado ese mismo elemento. Por lo tanto, al componer una función con su inversa, el resultado es la función identidad.

Ejemplos

1) Sean los conjuntos A = {3, 5,10), B = {20, 10, 6}, C = {9, 23, 13) y las funciones

$f: A \rightarrow B \,/\, f(x)= 2x$ $\qquad$ f = {(3; 6), (5; 10), (10; 20)} y

$g: B \rightarrow C \,/\, g(x) = y + 3$ $\qquad$ g = {(20;23), (10;13), (6;9)}

Completa:

f(3)=……………… $\qquad$ f(5)=……………… $\qquad$ f(10)=……………..

g(f(3))=………….. $\qquad$ g(f(5))=………….. $\qquad$ g(f(10))=………..

Generalizando:

$$g \circ f: A \rightarrow C \,/\, (g \circ f)_{(x)} = 2x + 3$$

$$g \circ f = \{(3;9), (5;13), (10;23)\}$$

2) Sean las funciones $f: IR \rightarrow IR / f(x) = 5x^2$ y $g: IR \rightarrow IR / g(x) = 1/2\, x - 3$

Obtengamos $g \circ f$ y $f \circ g$, si es posible.

Solución

D(f) = IR $\qquad$ D(g) = IR

$I(f) = IR_0^+$ (explica por qué) $\qquad$ I(g) = IR

La condición de posibilidad para la obtención de la función compuesta ($g \circ f$) es que I(f) esté incluido en D(g). Se verifica, luego

$$g \circ f: IR \rightarrow IR \text{ tal que}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(5x^2) = \frac{5}{2}x^2 - 3$$

La condición de posibilidad para la obtención de la función compuesta **f o g** es que I(g) esté incluido en D(f). Se verifica, luego

f o g: IR→IR tal que

$$(f \circ g)\,(x) = f\left[g(x)\right] = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2$$

Lo que indica, como ya vimos, que la composición de funciones no es conmutativa, es decir:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Realiza los siguientes ejercicios:

17) Dadas las expresiones: $f(x) = \sqrt{x}$ y g(x) = x+1 . Encuentra cada una de las siguientes funciones, en el caso que sea posible, y su dominio.

a)(fog)(x)
b) (gof)(x)
c) (fof)(x)
d) (gog)(x)

18) a) Dada las siguientes expresiones, determine un dominio y conjunto de llegada conveniente para que la relación inversa, resulte ser una función.

b) Determine para cada caso la función inversa.

c) Comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = x$. (Esta es una manera de verificar el resultado obtenido)

I. $f(x) = x^3 + 1$ II. $f(x) = x^5$ III. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $x > 0$ IV. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ $x \neq 0$

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

- **Funciones**
  - **Algebraicas**
    - **Racionales**
      - **Enteras**
      - **Fraccionarias**
    - **Irracionales**
  - **Transcendentes**
    - **Exponenciales**
    - **Logarítmicas**
    - **Trigonométricas**
    - **Hiperbólicas**

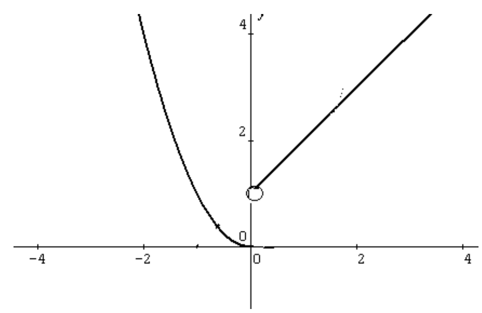
Algebraicas: Son aquellas en las que la variable independiente x está afectada por operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.
Racionales: Son aquellas en las que x posee un exponente entero.
Enteras o Polinómicas: Son aquellas en las que x posee un exponente natural.
Fraccionarias: Son aquellas en las que x tiene un exponente entero negativo.
Irracionales: Son aquellas en las que x está afectada por un exponente fraccionario.
Trascendentes: Son aquellas no algebraicas.
Exponenciales: Son aquellas en las que x está como exponente.
Logarítmicas: Son las inversas de las exponenciales.
Trigonométricas: Son las que establecen relaciones entre lados y ángulos de un triángulo.
Hiperbólicas: Son combinaciones de funciones exponenciales.

FUNCIONES DEFINIDAS POR TRAMOS

Hay ciertas funciones que no se pueden definir usando una sola expresión, estas se denominan *funciones definidas por tramos o a trozos.* Estas funciones utilizan distintas expresiones para diferentes partes de su dominio.

Por ejemplo

$$f : IR \to IR \,/\, f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$



Esta es una sola función que se define utilizando dos expresiones distintas para cada tramo. El dominio de esta función es D_f = IR   y la imagen I_f = [0;∞]

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

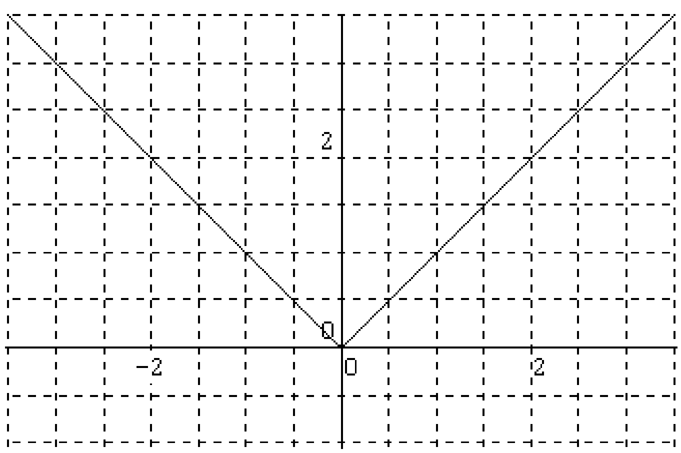
Es una función de IR en IR, definida por tramo donde:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Realicemos el siguiente ejemplo:

a) Completa la tabla de valores y determina los pares ordenados (x; y).
b) Representa esos pares ordenados en el diagrama cartesiano.
c) Verifica que los pares ordenados coincidan con la gráfica realizada.
d) Realiza el análisis de la gráfica completando el cuadro de la derecha.

x	y = f(x) = $\lvert x \rvert$	(x;y)
-2		
-1		
0		
1		
2		



Df: **If:**

Biyectiva:

Ceros: **Ord.Origen:**

Intervalo de Crecimiento:

Intervalo de Decrecimiento:

C+: **C-:**

Par: **Impar:**

Período:

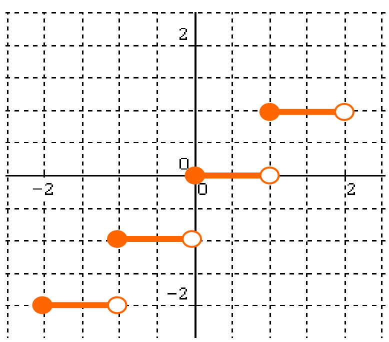
FUNCIÓN PARTE ENTERA

Sea $f: IR \to IR \,/\, f(x) = [x]$ (parte entera de x). La Parte Entera de un número real x es el menor de los dos enteros entre los cuales está comprendido el número x cuando x no es número entero y al mismo número x si éste es entero. Por lo tanto Parte Entera del número real x es el número entero E si y sólo si: $E \leq x < E + 1$

Realicemos el siguiente ejemplo:

e) Completa la tabla de valores y determina los pares ordenados (x; y).
f) Representa esos pares ordenados en el diagrama cartesiano.
g) Verifica que los pares ordenados coincidan con la gráfica realizada.
h) Realiza el análisis de la gráfica completando el cuadro de la derecha.

x	y = f(x) = [x]	(x;y)
-2		
-1,5		
-1		
-0,5		
0		
0,5		
1		
1,5		
2		



Df: **If:**

Biyectiva:

Ceros: **Ord.Origen:**

Intervalo de Crecimiento:

Intervalo de Decrecimiento:

C+: **C-:**

Par: **Impar:**

Período:

FUNCIÓN MANTISA

Es una función definida en los números reales tal que a cada número real x le hace corresponder la diferencia entre x y el mayor entero que no supera a x, es decir, la diferencia entre x y la parte entera de x.

$$f : IR \rightarrow IR /\ f(x) = mant(x) = x - [x]$$

Realicemos el siguiente ejemplo:

i) Completa la tabla de valores y determina los pares ordenados (x; y).
j) Representa esos pares ordenados en el diagrama cartesiano.
k) Verifica que los pares ordenados coincidan con la gráfica realizada.
l) Realiza el análisis de la gráfica completando el cuadro de la derecha.

x	$f(x) = mant(x) = x - [x]$	(x, y)
-2		
-1,5		
-1		
-0,5		
0		
0,5		
1		
1,5		

Df: **If:**

Biyectiva:

Ceros:

Ord.Origen:

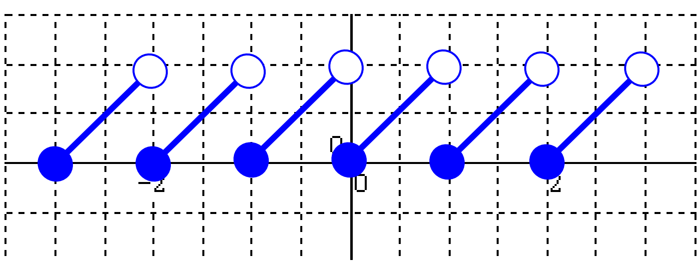
Intervalo de Crecimiento:

Intervalo de Decrecimiento:

C+: **C-:**

Par: **Impar:**

Período:



19) Dadas las siguientes expresiones definidas de A en B. Define dominio y conjunto de llegada para que sean funciones y luego halla si existen los ceros y los polos.

a) $f(x) = \dfrac{-3}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{5}{(x-3)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2x+x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+x}{x}$

20) Para cada una de las siguientes funciones que aplican D en IR, indica dominio, si es par, impar o ninguna de las dos.

a) $f(x) = 5$
b) $f(x) = x^2+1$
c) $f(x) = x^3 + x$
d) $f(x) = x^2 + x$
e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
f) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

21) ¿Cómo es el producto de dos funciones reales impares?

22) ¿Puede ser una función real par e impar a la vez?

23) Toda función que no es par ¿es impar?

24) Determina los intervalos en donde las siguientes funciones reales son crecientes, constantes o decrecientes.

a) $f_1(x) = (x-3)^2$
b) $f_2(x) = x^2 - 2$
c) $f_3(x) = 3.x^2$
d) $f_4(x) = 3(x+1)^2$

25) Dibuja una función f real continua que sea:

a) creciente en el intervalo [-2;6) y decreciente en el intervalo (6;13]
b) creciente en el intervalo [2;7) y constante en el intervalo [7;∞)

26) ¿Cuáles de las funciones del ejercicio 20) son inyectivas?

27) Grafica las siguientes funciones como transformaciones de $f(x) = x^2$

a) $f_1(x) = -x^2$
b) $f_2(x) = (-x)^2$
c) $f_3(x) = (x - 3)^2$
d) $f_4(x) = (x+1)^2 - 2$
e) $f_5(x) = 3.x^2$
f) $f_6(x) = -2.x^2$

28) En una cartulina cuadrada de 12 cm de lado se cortan las esquinas iguales en forma de cuadrados de lado "x", con el fin de hacer una caja (sin tapa). Se desea saber para qué corte "x" tendrá volumen máximo la caja así obtenida.

a) expresa el volumen V de la caja como función V(x) de la longitud "x" del corte.
b) ¿cuál es el dominio de esta función?
c) Realiza un dibujo que muestre la situación.
d) Según tu dibujo: ¿cuál es el volumen máximo que se puede logra?

29) Encuentra la función que expresa el área de un rectángulo de perímetro 16, en función de la medida de su base

a) ¿cuáles deben ser las longitudes de los lados del rectángulo para que el área sea máxima?

30) Sabiendo que el producto de dos números reales es 12, responde:

a) ¿Qué función relaciona estos dos números?
b) ¿Cuántas soluciones enteras puedes encontrar?
c) ¿Cuál es su representación gráfica?
d) ¿Cuál es el dominio y la imagen de esta función?

31) ¿Para qué valores del dominio las siguientes funciones reales toman valores positivos?

a) f(x) = 5
b) f(x) = $\frac{-1}{2}x + 7$
c) f(x) = (x+4)(x+3)(x-2)

32) ¿Para qué valores del dominio las funciones reales anteriores toman valores negativos?

33) Sean f y g dos funciones definidas de D en IR

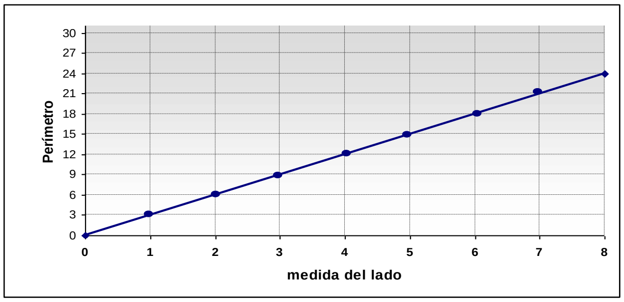
a) Grafica e indique el dominio D y el conjunto imagen incluido en IR:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \in N \\ x-2 & x \in R-N \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-1 & x<-2\\ x^2 & -2\le x\le 2\\ x-1 & x>2\end{cases}$$

FUNCIÓN AFÍN

Para comenzar a desarrollar el siguiente tema, planteemos la siguiente situación:



Se muestra la variación de la medida del perímetro de un triángulo equilátero, en función de la medida de su lado. Responda:

¿Cómo están los puntos representados en esta gráfica?......

a) Por esa característica ¿qué nombre recibe este tipo de funciones? Escríbelo ....

b) ¿Cuál es la variable independiente (*x*)?...........¿Cuál es la dependiente (*y*)? ....

c) Anota la fórmula que relaciona ambas variables: ....

d) ¿Es una función? ¿Por qué? ....

A las funciones que presentan las características observadas en el ejemplo, se las denomina **función afín**.

La función afín es un caso particular de las funciones reales. Está definida por la siguiente expresión:

$$\boxed{y = a \cdot x + b}$$

siendo **a** y **b** números reales.

Su representación geométrica es una recta, donde, recordemos:

a es la **pendiente de la recta** (inclinación de la recta)

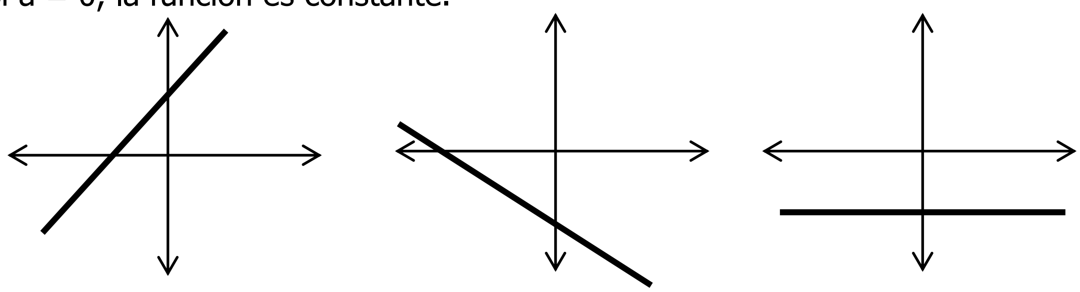
b es la **ordenada al origen** (intersección con el eje y, es decir para x=0)

Al determinar la intersección de la recta con el eje x, estamos hallando los ceros de la función. Una función afín posee solamente uno, salvo el caso de que la función sea constante que no tiene ninguno. Denominarse $\mathbf{x_0}$ al cero de la función y se calcula como:

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{a}}$$

Además:

- Si el coeficiente principal a > 0 (positivo), la función es creciente.
- Si a < 0 (negativa), la función es decreciente.
- Si a = 0, la función es constante.



a > 0 **a < 0** **a = 0**

Analicemos la siguiente situación:

Una empresa compra cajas para embalar a $2 cada una. Para que el proveedor, entregue en el domicilio de la empresa las cajas, debe abonar $5 más, importe fijo que no depende de la cantidad de cajas que se compren. ¿Cuánto habrá que pagar si se compran 10 cajas y la entrega se hace en el domicilio de la empresa?

Antes de comenzar a resolver, observa que el dominio corresponde al número de cajas, por lo cual, ten en cuenta que D_f = IN.

Para resolver la situación planteada se puede pensar en resolver un cálculo como el siguiente, que se muestra con el resultado correspondiente:

$$\underbrace{2}_{\text{precio de cada caja}} \cdot \underbrace{10}_{\text{N° de cajas}} + \overbrace{5}^{\text{Costo de entrega}} = 25$$

¿Y si se desea solicitar 5 cajas a domicilio?

Así el cálculo para esta nueva compra es: $2 \cdot 5 + 5 = 15$

Si se quiere comprar bajo las mismas condiciones 6 cajas. ¿Cuál es el monto a pagar? ¿Cómo sería para 8 cajas?

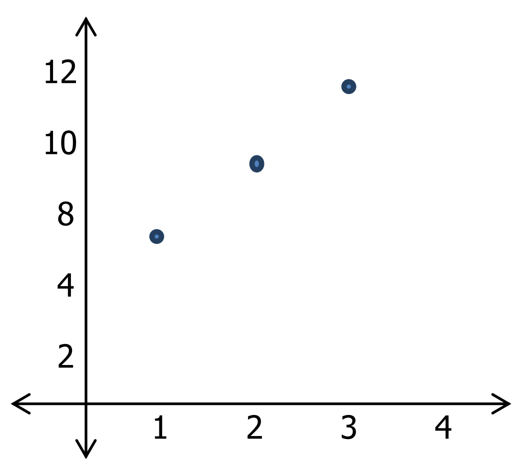
Ahora se propone que: se simbolice con "y" el número de pesos a pagar por la compra, y con "x" el número de cajas que se compran, ¿Qué expresión se obtendrá?

Esta relación que existe entre el número de pesos a pagar por la compra y el número de cajas que se compran, es una ***función***. Para cada número de cajas existe uno y sólo un número correspondiente que indica cuántos pesos hay que pagar por la compra, esta característica que a cada valor de la variable independiente (x) le hace corresponder uno y sólo un valor de la variable dependiente (y) es la que permite decir que dicha relación es una función.

Para la representación de la función que relaciona las variables antes indicadas que intervienen en este problema se sugiere completar la siguiente tabla y luego ubicar dichos puntos en un sistema de coordenadas, que se muestra a continuación:

x (número de cajas)	y (número de pesos a pagar por la compra)
5	15
6	....
10	....
....	29

Como la expresión algebraica que se obtuvo anteriormente fue: $y = 2 \cdot x + 5$, seguramente la gráfica que se obtuvo tiene las siguientes características:



Funciones de Proporcionalidad directa

Observemos en las siguientes tablas en las que se indica el precio del pan y del tomate:

Pan					
Peso (x_1)	1	2	4	4,5	5
Precio (y_1)	11.00	22.00	44.00	49.50	55.00

Tomate					
Peso (x_2)	1	2	4	4,5	5
Precio (y_2)	15.00	30.00	60.00	67.50	75,00

Para el precio del pan:
Si se calcula el cociente entre cada valor de la variable precio con el valor correspondiente de la variable peso para el pan: $\frac{y}{x}$

$$\frac{11.00}{1}=11 \;; \quad \frac{22.00}{2}=11 \;\ldots\ldots\ldots \;; \quad \frac{55.00}{5}=11$$

Todos los cocientes arrojan la misma respuesta: 11. A este resultado se lo denomina **razón,** es decir, es la relación entre el precio del pan y la cantidad de kilos que se compre.
Por lo tanto, se puede decir que los valores de la variable precio y los de la variable peso del pan son **directamente proporcionales**.

La variable dependiente es el precio, que varía de acuerdo a la cantidad de pan que se compre; obviamente, la variable independiente de la cantidad de pan comprado.
Busquemos una expresión que nos permita obtener los diferentes resultados:

$$y = 11x$$

Como ves, la función le hace corresponder a $x_0=0$, $y_0=0$, o sea que la función contiene al origen de coordenadas

Repite el procedimiento para el caso de los tomates.

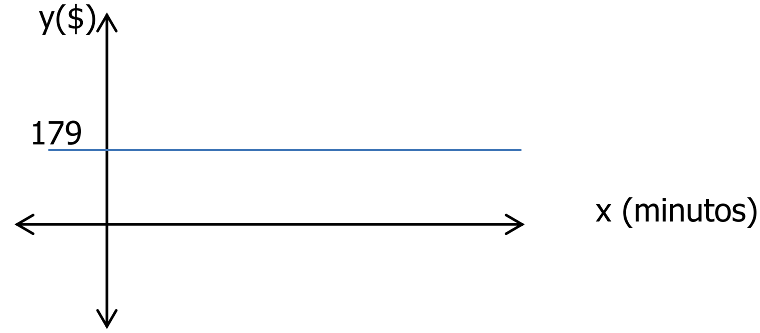
Las funciones afines que contienen al origen de coordenadas, reciben el nombre especial de **funciones lineales** y los valores de ordenada y abscisa son directamente proporcionales.

Veamos otro caso:

Supongamos que eres usuario de una compañía de teléfonos celulares y te ofrecen una promoción por la cual tienes llamadas ilimitadas con un abono de $179, sin ningún costo

adicional, ¿Cómo representarías esta situación?¿Depende tu facturación de los minutos que utilices tu teléfono?
Evidentemente, no. Estas funciones reciben el nombre de funciones constantes, pues el valor de la variable y no depende de x, si no que para todo valor de x, el valor de y es fijo o constante. La representación gráfica, también es una recta, pero de pendiente nula.

Gráficamente:



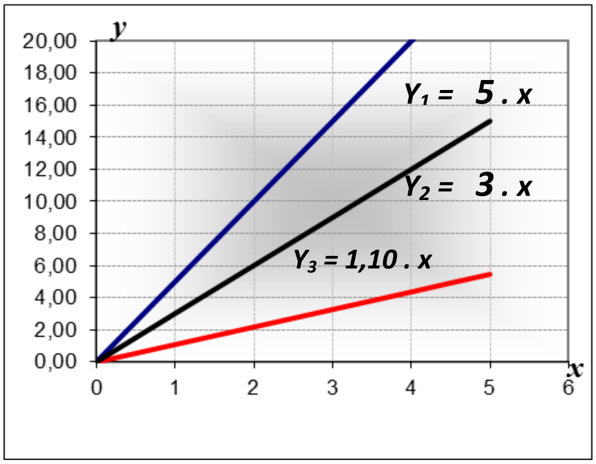
Realiza los siguientes ejercicios

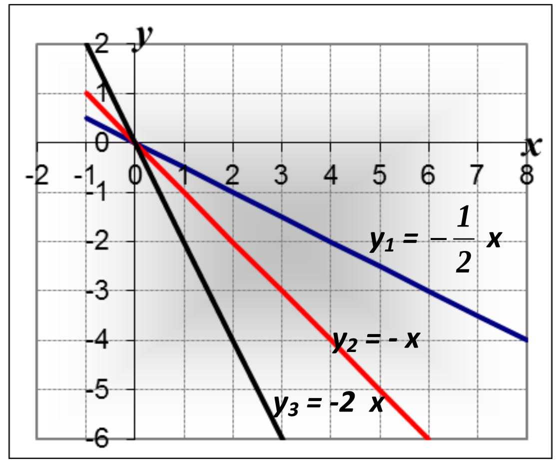
34) Para las siguientes funciones, determina:
   a. Ceros o raíces
   b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Qué observas?
   c. Intervalos de positividad y negatividad
   d. Grafica cada caso. ¿Qué diferencias observas?

   i. f: $y = -3x+2$
   ii. g: $y = \frac{1}{2}x - 4$
   iii. h: $y = 2x$
   iv. j: $y = 5$
   v. k: $y = -3$

35) Gastón está construyendo su casa y quiere comprar arena a una empresa que cobra $9 (fijos) por gastos de envío y además cobra $7 el metro cúbico de arena. ¿Cuál es el monto que va pagar Gastón si compra 5 m^3 de arena?

36) Dadas las gráficas de las siguientes funciones:





Responde:

a) Las funciones representadas, ¿son crecientes o decrecientes?.............

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta dada por y_1?...........

c) ¿Y la pendiente de y_2? ....

d) ¿Y la de y_3? ....

37) Resuelve los siguientes problemas:

a. En el plano de un departamento, un segmento de 5 cm representa 12,5 m, si las medidas del departamento son de 35,6 m de largo y de 20,2 m de ancho, ¿qué dimensiones tiene el plano?
b. Un viajante cobra en concepto de sueldo una suma fija de $600 y una comisión del 4% sobre las ventas. Si un mes vendió un total de $16400, ¿Cuánto cobró el viajante ese mes?
c. Luis quiere comprar un centro musical, en el cartel aparecen los siguientes precios:

Precio de lista : $ 180
Pago efectivo : 12 % de descuento
Pago con tarjeta: 3 cuotas de $ 69 cada una

¿Cuánto dinero tiene que juntar Luis para pagarlo en efectivo?¿Qué porcentaje de recargo sufre el precio con respecto al precio de lista, si lo paga con tarjeta?
d. Una persona ha estado ausente el 32% de las 450 horas de trabajo. ¿Cuántas horas ha estado ausente? Si por el total de horas cobra 1500 pesos, ¿ésta vez, cuánto cobró?

38) Complete las siguientes tablas. Luego grafique y obtenga la constante de proporcionalidad de cada una de ellas.

Tiempo que tarda un móvil en recorrer una distancia (seg)	Distancia recorrida por el móvil (m)
40	500
……	700
15	……

Banderines (número)	Metros cuadrados de tela necesarios para fabricarlos (m^2)
8	3
49	……..
……..	12
……..	6

Se quiere alambrar un superficie de forma cuadrangular	
Medida del lado (m)	Cantidad de alambre (m)
1	……………
……………	36
…………….	6
0,5	……………..

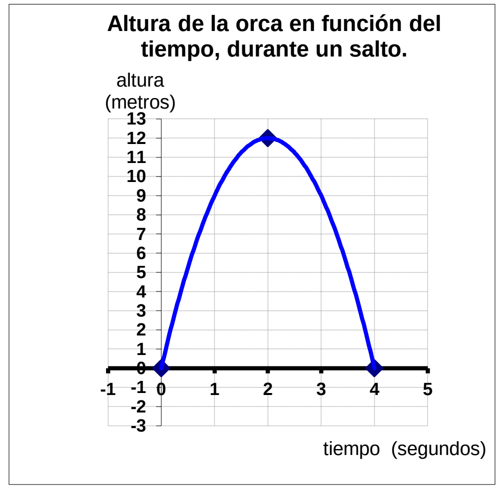
En una planta embotelladora, un visitante contó que una de las máquinas llenó 100 envases en 8 minutos	
Tiempo (min)	Envases (cantidad)
4	………….
……….	200
60	…………..
75	……………..

Alargamiento de un resorte (mm)	Peso colgado en el resorte (kg)
0,5	2
1	……
…….	6
…….	10

FUNCIÓN CUADRÁTICA o FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

Pensemos en la siguiente situación:

En los parques acuáticos podemos disfrutar del show que nos brindan orcas y delfines con sus espectaculares saltos.



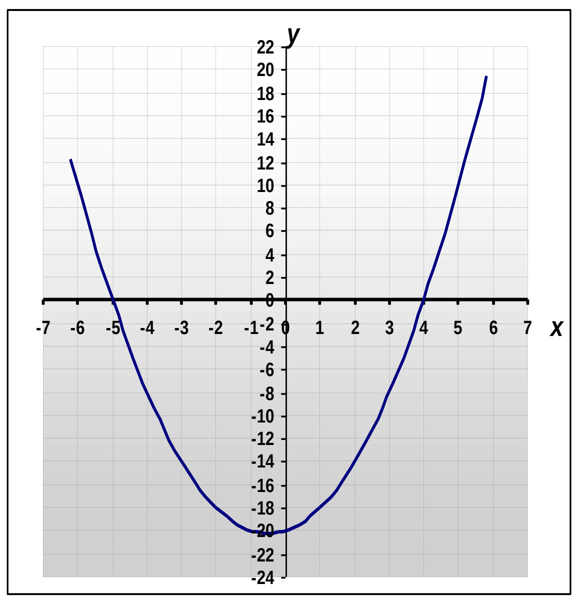
Si representamos en una gráfica las alturas que alcanzan en dichos saltos una orca en función del tiempo, nos surge una curva como la que se muestra. En este caso en particular, observa que no se consideran en el eje x y en el eje y los valores negativos

Sin embargo, desde ahora en más, al referirse a una función cuadrática se considera una función real, es decir, una función definida en el conjunto de los números reales. Es importante que tenga presente que el dominio que se considera en todas las funciones cuadráticas que se analizan es IR.

Observa el siguiente ejemplo:

Dada la función real $\boldsymbol{y = x^2 + x - 20}$. Completa la tabla:

x	$y = x^2 + x - 20$
-6	
-5	
-4	
-2	
0	
1	
2	
3	
4	
5	



Marca en el gráfico con color cada punto correspondiente a los valores mostrados en la tabla.

La curva de la función que se muestra en la gráfica se llama **parábola.**

Observa en la gráfica los puntos que tienen contacto con el eje de las abscisas o eje de las x puntos donde la gráfica "corta" al eje de las x. Recuerda que ellos son ceros de la función y estos son $x_1 = 4$ y $x_2 = -5$ y por ser los ceros, el valor de ordenada de ambos es 0. Es decir: $f(-5) = 0$ y $f(4) = 0$ y ellos **son soluciones de la ecuación** cuadrática asociada.

Estas funciones son un caso particular de las funciones reales y las denominamos **funciones cuadráticas**, donde la variable, algebraicamente, aparece elevada al cuadrado: $\mathbf{y=x^2}$. Las definiremos de acuerdo a su expresión general.

Definición:

Se llama ***función cuadrática*** a toda función real de la *forma general*:

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

donde los coeficientes a, b, c son números reales, siendo $a \neq 0$

A los términos de esta expresión los llamamos:

$$y = \underbrace{a.x^2}_{\text{término cuadrático}} + \underbrace{b.x}_{\text{término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{término independiente}}$$

Si damos distintos valores a los coeficientes a, b, c, se obtienen las expresiones de distintas funciones cuadráticas. Los coeficientes b y c, aparecen en el caso que la función se encuentre desplazada.

Cuando b = 0 ó c = 0 ó alguna de las dos solamente vale 0, se llaman funciones de segundo grado incompletas

$\boxed{\mathbf{y = a\,x^2}}$ Incompleta sin términos .... e ....

$\boxed{\mathbf{y = a\,x^2 + c}}$ Incompleta sin ....

$\boxed{\mathbf{y = a\,x^2 + b\,x}}$ Incompleta sin ....

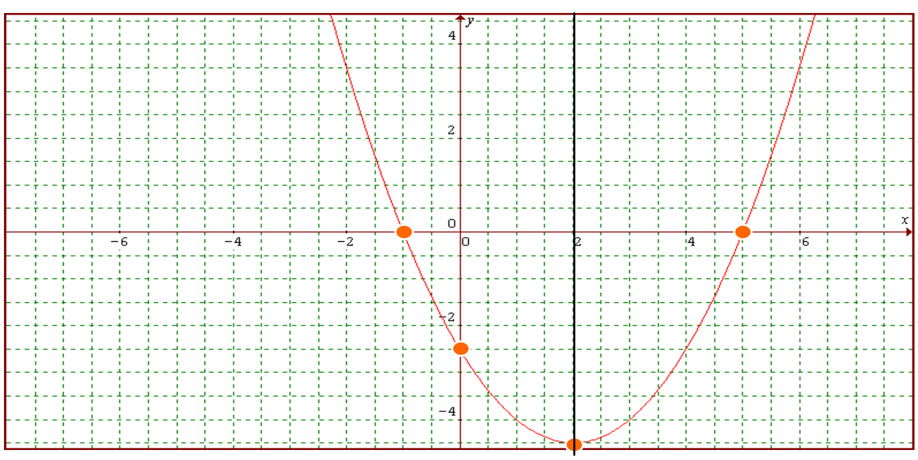
Representación de la función cuadrática: elementos.

Para representar una función cuadrática en un plano cartesiano **x;y**, necesitamos realizar una tabla de valores como en cualquier otra relación o función. Como el resultado a obtener no es una recta, como en el caso de las funciones afines, no bastará con dos puntos, y habrá que obtener varios más (en general un mínimo de 5 puntos si están bien definidos, o más).

Sea, por ejemplo, representar la función: $\mathbf{y = 1/2\ x^2 - 2\ x - 2{,}5}$ donde: a=1/2 ; b=-2 ; c=-2,5

x	$y = 1/2\ x^2 - 2\ x - 2{,}5$	(x; y)
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Si los valores obtenidos en la tabla anterior son correctos, los pares (x;y) hallados coinciden con puntos del gráfico siguiente:



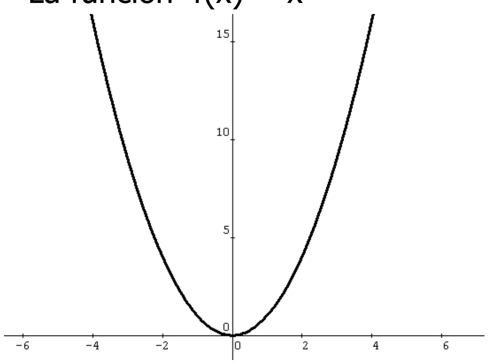
De la observación del gráfico podemos extraer:

- La curva obtenida se denomina **parábola**, que en este caso sus ramas se encuentran hacia arriba.
- El punto más bajo (o más alto) de la parábola se denomina **vértice V**, cuyas coordenadas son las coordenadas **$(x_v;y_v)$.** En este caso V (2; -4,5).
- La intersección de la parábola con el eje y, se denomina ordenada al origen y coincide con el valor del <u>término independiente</u> de la expresión polinómica general.
- Las intersecciones de la parábola con el eje x, se denominan <u>ceros</u> de la función o raíces del polinomio asociado, y se designan como x_1 y x_2. En este caso x_1 = -1 ; x_2 = 5.
- El Vértice divide a la parábola en dos partes o ramas: izquierda y derecha, por lo tanto, por ese punto pasa el eje de simetría de la parábola.

<u>Variación del coeficiente "a" (considerando b y c nulos).</u>

Analicemos la función cuadrática real según el valor de sus coeficientes y obtengamos la gráfica a partir de desplazamientos, reflexiones y contracciones de la función f(x) = x^2.

La función f(x) = x^2



¿Qué valor tiene a?.............

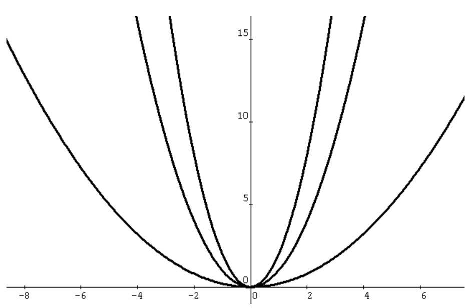
¿Cuál es el dominio de esta función?.............

¿Cuál es la imagen?...........

¿Es inyectiva?.............

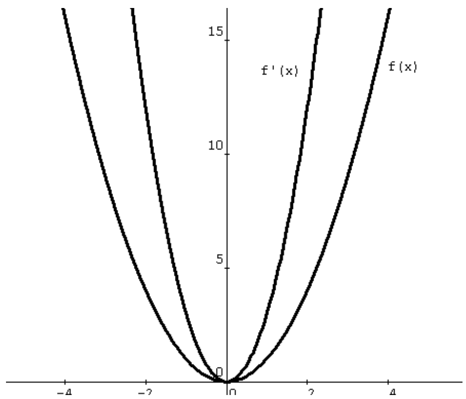
¿Es par?..........

La función f(x) = a.x^2

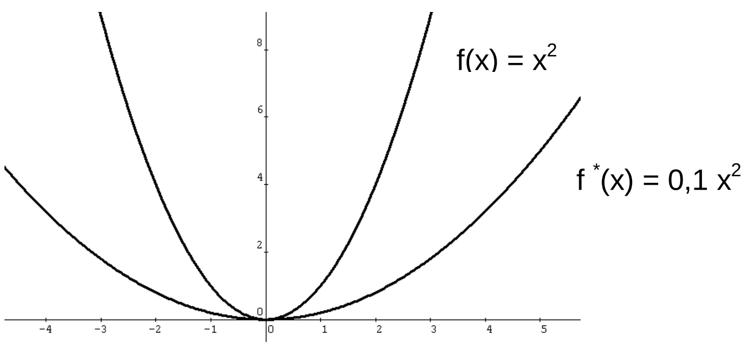


Cuando el coeficiente a es positivo, la representación gráfica de estas funciones son parábolas con las ramas hacia arriba.

Si comparamos la gráfica de la función $f_1(x) = ax^2$ con la función $f(x) = x^2$, se puede ver que si $a > 1$ hay una expansión, lo que acerca las ramas al eje de las ordenadas.

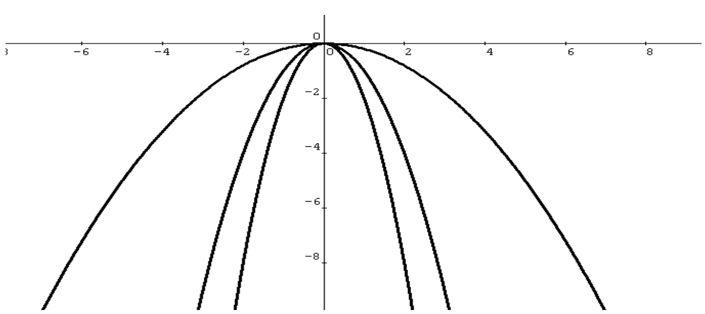


Si se grafica la función $f(x) = x^2$ y la función $f^*(x) = 3x^2$ se tiene una expansión con factor 3.

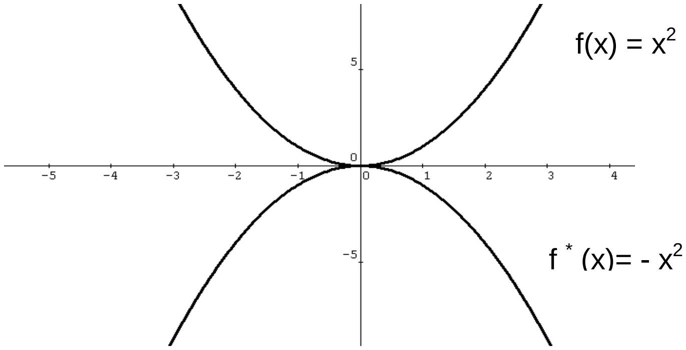


Si se grafica la función $f(x) = x^2$ y la función $f^*(x) = 0{,}1x^2$ se tiene una compresión de factor 0,1.

Para el caso en que $a < 1$ se tiene una contracción, lo que aleja las ramas del eje de ordenadas y las acerca al eje de abscisas.



Cuando el coeficiente "a" es negativo, la representación gráfica de estas funciones son parábolas con las ramas hacia abajo.

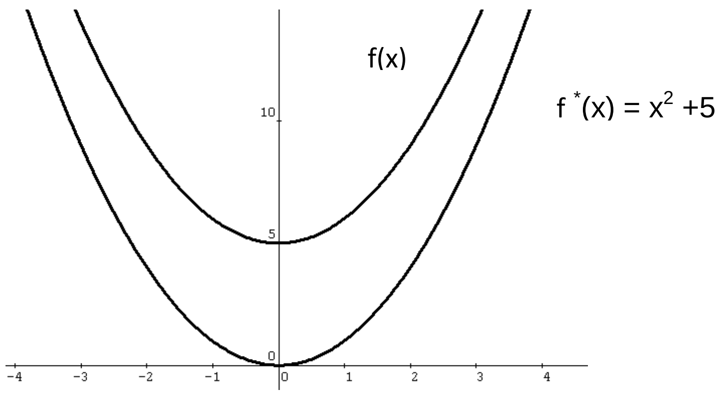


Si se compara la gráfica de la función $f(x) = x^2$ con la función $f^*(x) = -x^2$ se ve que hay una reflexión respecto del eje x

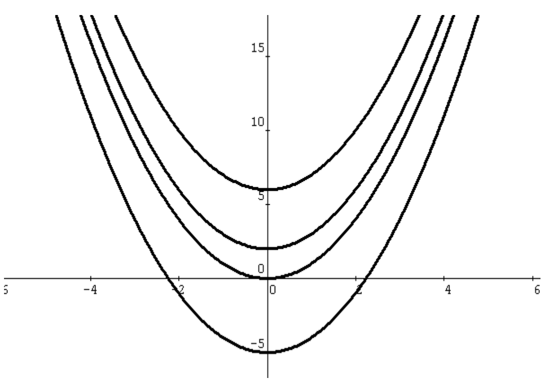
Estas familias de parábolas tienen el vértice en el origen de coordenadas y poseen como eje de simetría al eje de las y.

Variación del coeficiente "c" (con b=0)

La función $f(x) = a.x^2 + c$



La función f es un desplazamiento de $f(x)=x^2$ en 5 unidades para arriba. Se ve que el eje de simetría sigue siendo el eje y.



El término independiente produce un desplazamiento vertical. de la parábola en "c" unidades.

En término generales, las "variaciones" que puede presentar una función cualquiera, según sean los coeficientes que aparecen en su expresión, son:

CONTRACCIÓN, EXPANSIÓN, TRASLACIÓN DE FUNCIONES, REFLEXIONES SOBRE LOS EJES CARTESIANOS.

Contracción y Expansión de Funciones

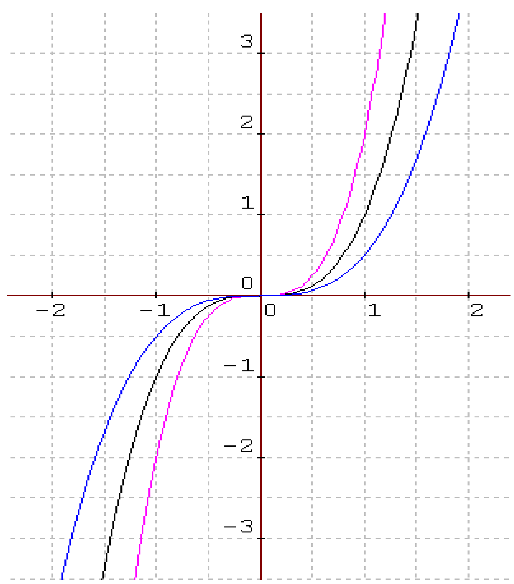
Una función sufre una **expansión** cuando el coeficiente principal de la misma es superior a 1, y por el contrario, sufre una **contracción** cuando el coeficiente principal es menor que 1.

Ejemplo

Tomaremos como base la función real (es decir con conjunto de partida y de llegada los números reales) $y = x^3$. Su coeficiente es 1. Si ahora comparamos esta gráfica con las funciones: $y_1 = 2x^3$ e $y_2 = ½x^3$.

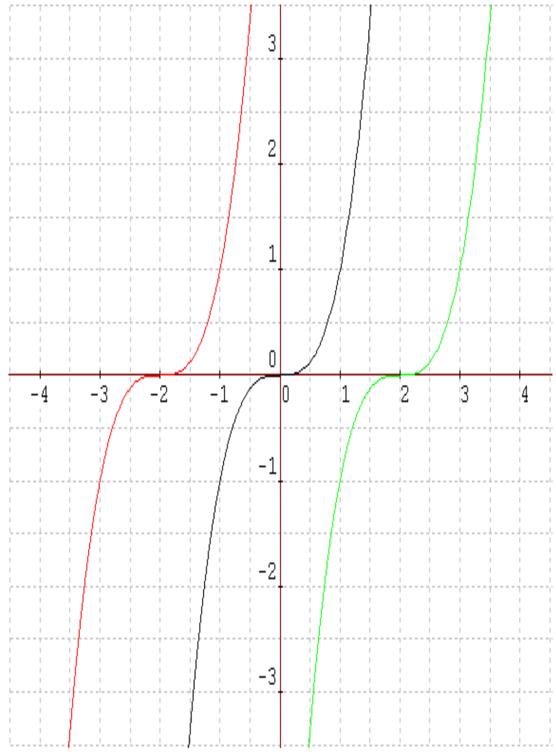
En $y_1 = 2x^3$ al ser el coeficiente mayor que 1, la función crece más rápidamente, produciéndose una expansión o alargamiento de la gráfica, que la aleja del eje x.

En $y_2 = ½x^3$, al ser el coeficiente menor que 1, las función crece más lentamente, produciéndose una contracción de la gráfica, que la acerca al eje x.



Proponga otros ejemplos en donde se observen contracciones y expansiones.

Traslación de Funciones



Las traslaciones pueden ser horizontales o verticales.

Una función se traslada horizontalmente cuando la variable independiente x está afectada por una suma o resta. Si se suma un número a x, la función se desplaza (traslada) hacia la izquierda, es decir, en sentido contrario al signo de la constante.

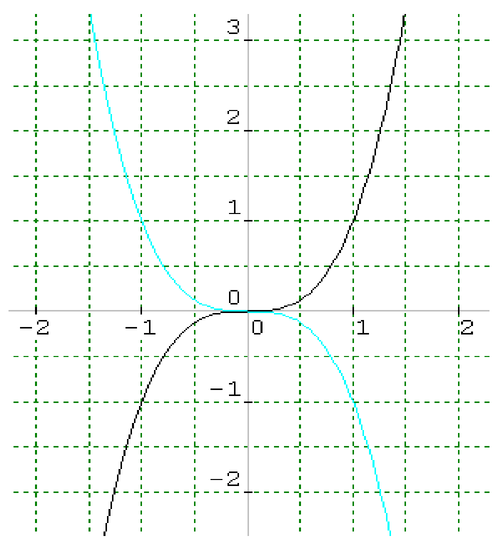
En cambio si se resta un número a la variable independiente x, la función se traslada hacia la derecha, es decir, en sentido contrario al signo de la constante.

Ejemplo:

Tomaremos como base nuevamente la función real $\boldsymbol{y = x^3}$. La compararemos con las funciones $y_3 = (x + 2)^3$ e $y_4 = (x - 2)^3$.

Proponga otros ejemplos en donde se observen traslaciones.

Reflexión de Funciones



Una función sufre una reflexión cuando el coeficiente principal cambia de signo: el eje x trabaja como un espejo.

Ejemplo:

Tomaremos como base nuevamente la función $y = x^3$. La compararemos con las funciones $y_3 = -x^3$

Proponga otros ejemplos en donde se observen reflexiones.

La siguiente tabla presenta una lista de las transformaciones básicas con $c > 0$:

Expresión	Transformación
$g(x)= f(x) + c$	La gráfica de la función g se desplaza c unidades hacia arriba respecto de la gráfica de la función f.
$g(x)=f(x) - c$	La gráfica de la función g se desplaza c unidades hacia abajo respecto de la gráfica de la función f.
$g(x)=f(x + c)$	La gráfica de la función g se desplaza c unidades hacia la izquierda respecto de la gráfica de la función f.
$g(x)=f(x - c)$	La gráfica de la función g se desplaza c unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de la función f.
$g(x)=- f(x)$	La gráfica de la función g se refleja respecto de del eje x.
$g(x)=f(-x)$	La gráfica de la función g se refleja respecto de del eje y.
$g(x)=c.f(x); c>1$	La gráfica de la función g se alarga verticalmente por c, respecto de la gráfica de la función f, alejándose del eje x (Expansión)
$g(x)=c.f(x); c<1$	La gráfica de la función g se acorta verticalmente por c, respecto de la gráfica de la función f, acercándose al eje x (Contracción)

Realiza los siguientes ejercicios

39) Representa gráficamente las siguientes funciones reales, indicando si presentan expansión o contracción.

a) $f_1(x) = -2x^2$
b) $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$
c) $f_3(x) = (-x)^2$

40) Halla la expresión de la función correspondiente a la transformación de $f(x) = x^2$ que se indica en cada caso:

a) expansión con factor 4
b) reflexión respecto al eje de las x

41) Para las funciones del ejercicio 50) indique los intervalos donde la función es creciente o decreciente y analice si la función es acotada.

42) Representa gráficamente las siguientes funciones reales como transformaciones de la función $f(x) = x^2$

a) $f_1(x) = x^2 -1$
b) $f_2 (x) = -x^2 +2$

43) Para las funciones del ejercicio anterior, indica:

a) Ceros y vértice.
b) Intervalos de crecimiento.
c) Intervalos de positividad.
d) Intersecciones con los ejes coordenados.

Expresión general de una función cuadrática

Si tuviéramos una función cuadrática real cuya expresión fuera $y = (x - 1)^2$, no resultaría difícil pensar que es una función cuya gráfica se puede relacionar con una transformación de $y = x^2$, cuya gráfica es la parábola correspondiente a $y = x^2$ pero desplazada horizontalmente una unidad hacia la derecha. Considerando esto, la parábola tiene su vértice en el punto V(0; 1)

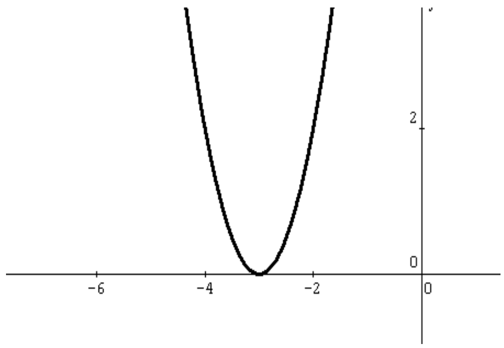
Si se desarrolla el cuadrado de la primera función se obtendría la expresión en forma polinómica:

$$y = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Ejemplos

1) Dada $y = 2x^2+ 12x + 18$, determina la posición del vértice que representa a la función.

Si se quisiera ver a qué transformación de $y = x^2$ corresponde, se tiene que llevar a factorizar como un binomio al cuadrado y para esto se trabaja con los coeficientes a, b y c de la función. En el ejemplo, lo primero es sacar primero factor común: $y = 2(x^2 + 6x +9)$ y luego expresar el paréntesis como un cuadrado : $y = 2(x+3)^2$.



Entonces se podría observar que esta función es un desplazamiento a la izquierda de x^2 en 3 unidades y una expansión vertical de coeficiente 2.

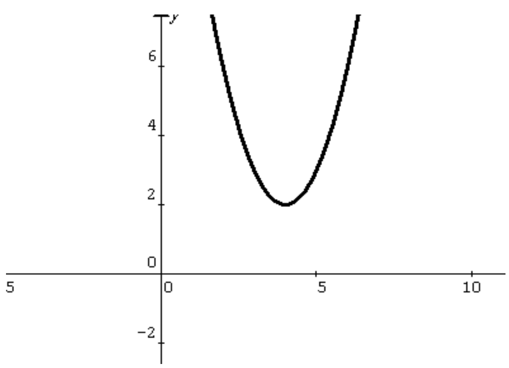
El vértice está en V(.....;.....)

2) Si se tiene la función y = x^2- 8x +18. Los coeficientes son: a = ..., b = ... y c=........... Para observar la transformación respecto de y = x^2 se tiene que buscar una expresión que corresponda al cuadrado de una suma o diferencia, como el 3º término no es un cuadrado exacto se puede proceder de la siguiente manera:

$$y = x^2 - 8x + 18 = y = x^2 - 8x + \underbrace{(16+2)}_{18} = (x^2 - 8x + 16) + 2 =$$

$$y = (x-4)^2 + 2$$

¿Cuál es el vértice de esta parábola?



Esta expresión permite decir que esta nueva función es una transformación de y = x^2 que presenta un desplazamiento horizontal de 4 unidades hacia la derecha y un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia arriba.

Podemos decir entonces que toda función cuadrática de forma y = ax^2+ bx +c se puede expresar de la siguiente forma:

y = a $(x - h)^2$ + k **forma canónica**

Donde **h** representa el desplazamiento horizontal; **k** representa el desplazamiento vertical. El vértice de la parábola que es la representación de esta función está en:

$$V\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Ceros de una función cuadrática: ecuaciones de Segundo Grado.

Supongamos que nos enfrentamos a una situación como la que mostramos en el siguiente ejemplo:

Problema:

"Matías es el encargado de diagramar una revista. Le han pedido que el largo sea 8 cm mayor que el ancho y que la superficie de cada página sea de 1140 cm^2.¿cuáles deben ser las dimensiones de cada página para que se cumplan las dos condiciones?"

Para encontrar la respuesta a este problema se debe plantear la ecuación:

$$x(x+8) = 1140$$

por lo tanto para encontrar el valor de x (ancho de la página) se multiplica en el 1º miembro para obtener:

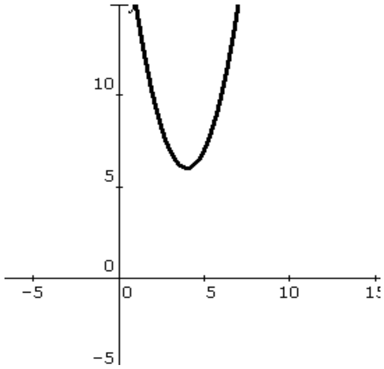
$$x^2 + 8x = 1140$$

igualando a cero: $x^2 + 8x - 1140 = 0 \longrightarrow$ ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática

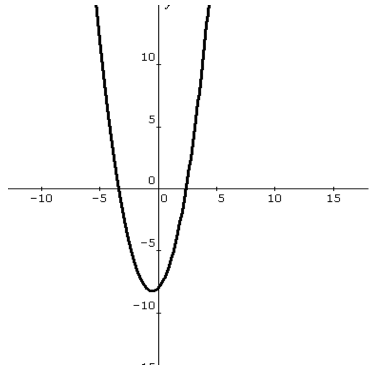
Observa que la respuesta que se busca son los ceros de la función $y=x^2+8x-1140$. Pero ¿cómo se resuelve esta ecuación? Se resuelve mediante la siguiente expresión (demostración en el anexo)

Resolvente $\longrightarrow$ $$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

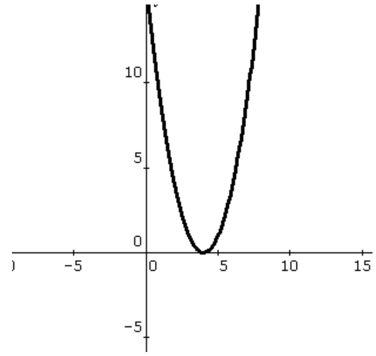
A esta fórmula se la denomina **fórmula resolvente** y se la utiliza para resolver una ecuación cuadrática completa. Si el radicando (o discriminante) de esta expresión es un nº negativo, se dice que la ecuación no tiene solución en el conjunto de los nº reales. Según sean los valores de x obtenidos se pueden tener distintas situaciones.



x_1 y $x_2 \notin$ R



x_1 y $x_2 \in$ R
$x_1 \neq x_2$



x_1 y $x_2 \in$ R
$x_1 = x_2$

Los elementos de la parábola hallados en forma gráfica, pueden obtenerse en forma analítica, como acabamos de ver y son siempre función de los valores de los coeficientes de la función cuadrática, es decir, **a**, **b** y **c**.

En este caso, el cálculo lo haremos para la función **$y = 1/2\ x^2 - 2\ x - 2{,}5$**

donde: **a = 1/2 ; b = -2 ; c = -2,5**

Calculemos las raíces x_1 y x_2 de la ecuación de segundo grado y para ello se utiliza la fórmula del resolvente hallada anteriormente:

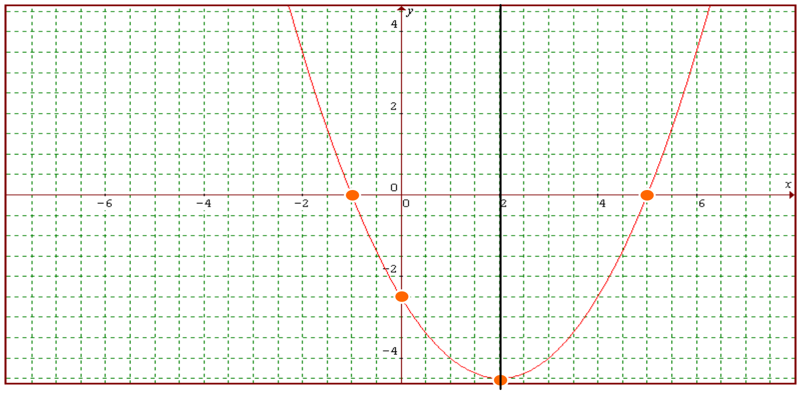
Resolvente

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (1/2) \cdot \left(-2{,}5\right)}}{2 \cdot (1/2)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{1} = \frac{2 \pm 3}{1} =$$

$$x_1 = \frac{2+3}{1} = 5 \qquad x_2 = \frac{2-3}{1} = -1$$

Que coinciden con los valores hallados gráficamente.



Análisis de las soluciones de una ecuación de segundo grado

En la fórmula de las raíces se considera especialmente la expresión que se encuentra dentro de la raíz cuadrada, y se la identifica como **discriminante** Δ:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Si **Δ > 0**, es decir positivo, existirán dos raíces reales y distintas x_1 y x_2, por lo tanto habrá dos puntos de intersección con el eje x.

Si **Δ = 0**, existirán dos raíces reales e iguales $x_1 = x_2$, por lo tanto habrá un solo punto de intersección con el eje x.

Si **Δ < 0**, es decir negativo, existirán dos raíces imaginarias distintas, y no habrá intersección con el eje x.

Cálculo de las coordenadas del vértice x_v e y_v

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}} \qquad \boxed{y_v = -\frac{b^2}{4a} + c}$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = +2 \qquad y_v = -\frac{(-2)^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} + (-2,5) = -2 - 2,5 = -4,5$$

Que coinciden con los valores hallados gráficamente.

Ejemplo

Un niño arroja una piedra hacia arriba con una velocidad de 29,4 m/s. Su compañerito que vive en un departamento en el quinto piso (20 metros) ve pasar la piedra dos veces.
a) ¿En qué instantes pasa por su vista la piedra?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

a) La ecuación de distancia (en este caso altura h) en función del tiempo para tiro vertical y caída libre (movimientos rectilíneos uniformemente variados) son según la Física:

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Para nuestro caso:

$h_0 = 0$
$v_0 = 29{,}4$ m/s
$g = -9{,}8$ m/s^2 (negativa por ser contraria a v_0)

Con lo que la ecuación queda:

$$h = 29{,}4 \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

Si queremos averiguar el tiempo para h = 20 metros

$$-4{,}9 \cdot t^2 + 29{,}4 \cdot t - 20 = 0$$

Donde a = -4,9; b = 29,4; c = -20. Por lo tanto sus raíces t_1 y t_2 serán:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-29{,}4 \pm \sqrt{29{,}4^2 - 4 \cdot (-4{,}9) \cdot (-20)}}{2 \cdot (-4{,}9)} = \frac{-29{,}4 \pm \sqrt{472{,}36}}{-9{,}8} = \frac{-29{,}4 \pm 21{,}73}{-9{,}8} =$$

$$t_1 = 0{,}78 seg$$

$$t_2 = 5{,}21 seg$$

b) Para averiguar la altura máxima usamos la fórmula de la coordenada y_v del vértice para h=0

$$y_v = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{29{,}4^2}{4 \cdot (-4{,}9)} - = 44{,}1m$$

Realiza los siguientes ejercicios

44) Halla los posibles valores de m para que se cumpla la condición pedida en cada caso:

a) $x^2 + mx + 3 = 0$ tiene una raíz doble.
b) $2x^2 - x - m = 0$ no tiene raíces reales.
c) el gráfico de las funciones de forma $f(x) = mx^2 – x –1 = 0$ intersecta al eje de abscisas en dos puntos.
d) el gráfico de las funciones de forma $f(x) = -x^2 - mx - 5 = 0$ tiene contacto con el eje de las x, pero no lo atraviesa.
e) la ecuación $x^2 + m = 0$ tiene solución en R.

45) Halla, si existen, los ceros de las siguientes funciones reales cuadráticas:

a) $f_1(x) = (x-3)^2 - 9$
b) $f_2(x) = 4x^2 – 5x$
c) $f_5(x) = -4x^2 +4x – 1$

46) Halla los números enteros que verifiquen la condición pedida en cada uno de los siguientes casos.

a) la diferencia entre el cuadrado de su triple y el cuadrado de su doble es 125
b) el producto entre su consecutivo y su antecesor es 399
c) la suma del cuadrado de un número y el cuadrado del duplo del consecutivo.

47) Calcula la diagonal de un rectángulo sabiendo que la base es igual a las tres cuartas partes de la altura y que el área es 48.

48) Sea f una función real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a) El gráfico de f es simétrico respecto de una recta vertical.
b) Si el coeficiente **a** es mayor que cero entonces la parábola tiene sus ramas hacia arriba.
c) Si el coeficiente **a** es menor que cero entonces la parábola tiene sus ramas hacia abajo.
d) Si $b^2 – 4ac$ es mayor que cero entonces el gráfico de f corta al eje de abscisas en dos puntos distintos.
e) Si $b^2 – 4ac$ es igual a cero entonces el gráfico de f es tangente al eje de las abscisas y el punto de tangencia coincide con el vértice.
f) Si $b^2 – 4ac$ es menor que cero entonces el gráfico no corta al eje x.

Forma factorizada de la función cuadrática

Si consideramos la función real f(x) = 4(x-2)(x-3), los ceros de esta función son $x_1=2$ y $x_2=3$. Si en la expresión de f aplicamos propiedad distributiva, se obtiene la función cuadrática $f(x) = 4(x-2)(x-3) = 4x^2-20x+24$. Aplicando la fórmula del resolvente se puede verificar que $x_1=2$ y $x_2=3$ son sus ceros.

Este ejemplo nos permite ver que el polinomio asociado a una función de segundo grado, puede factorizarse utilizando sus ceros.

Por lo tanto podemos decir que una función cuadrática de forma $f(x) = ax^2+ bx + c$, donde el polinomio asociado tiene raíces reales x_1 y x_2 se puede expresar en forma factorizada de la siguiente manera:

$$\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)} \longleftarrow \boxed{\textbf{forma factorizada}}$$

Ejemplo

La función $f(x) = 4x^2 + -16x –48$ tiene como ceros $x_1 = 6$ y $x_2 = -2.$, que se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática $4x^2 + -16x –48 = 0$.

Podemos expresar a la función f(x) en forma factorizada escribiendo

$$f(x) = 4(x-6)(x+2)$$

Realiza el siguiente ejercicio

49) En aquellos casos en que la función real cuadrática no esté factorizada, exprésela en forma factorizada.

a) $f_1(x) = x(3x+1)-1/4$
b) $f_2(x) = 6(x-1)^2$
c) $f_4(x) = -2x^2-7x –3$
d) $f_5(x) = (x+2)^2$
e) $f_7(x) = -4x^2$

Reconstrucción de Ecuaciones de segundo grado

Las raíces de la ecuación de segundo grado asociada a la función polinómica, poseen dos propiedades muy importantes, que nos permiten escribir la ecuación: (la demostración se omite)

$$\boxed{(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{(x_1 \cdot x_2) = \frac{c}{a}}$$

Si reemplazamos en la expresión de una ecuación cuadrática reducida cuyo polinomio es mónico, se obtiene:

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0}$$

Fórmula que permite reconstruir una ecuación conociendo los valores de las raíces x_1 y x_2.

Ejemplo:

Reconstruye la ecuación cuadrática cuyas raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$.

$$-\left(x_1 + x_2\right) = -(2-3) = -(-1) = 1$$
$$x_1 x_2 = 2(-3) = -6$$

aplicando la expresión: $x^2 + 1x - 6 = 0$ es la ecuación.

Ejercicios complementarios:

1) Se quiere alquilar un automóvil y para eso se visitan dos empresas. En una de ellas el costo es de $65 por día. La otra en cambio no cobra por día, sino $3,25 por kilómetro recorrido. En ambos casos el combustible corre por cuenta del cliente.

a) ¿De qué variable es función el costo en cada caso?
b) Realiza un gráfico para cada situación.
c) Si necesitamos un auto por 3 días para recorrer 20 km por día ¿qué empresa nos conviene más?
d) ¿Cuál será la empresa que nos conviene para recorrer 60 km en un solo día?

e) ¿Cuándo conviene si alquilamos el automóvil por 2 días para recorrer 13 km por día?
f) ¿Cuándo es indiferente contratar a cualquiera de las empresas?

2) Toma una cuerda de 50 cm, une sus extremos con cinta adhesiva y forma un triángulo isósceles.
a) Construye una tabla de valores en la que la variable independiente ***x*** sea la longitud del lado desigual (base) y la variable dependiente ***y***, la longitud de cada uno de los lados congruentes.
b) Indica el dominio de la función y el conjunto de llegada.
c) Grafica en un sistema de ejes cartesianos.

3) Dada la función $\mathrm{h}: D_h \to IR / y = 4x^2 - 3x$ halla, de ser posible:

a) El dominio de h
b) los ceros
c) los polos
d) intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

4) Dada la gráfica de una función f, cuyo Dominio es el conjunto de números reales, responde:

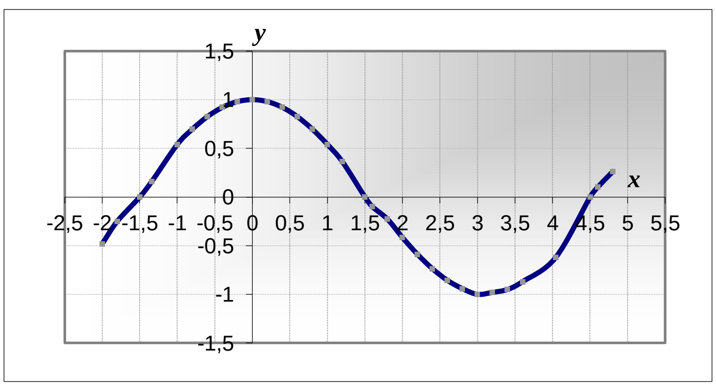


Figura 15

a) ¿Es acotada? Indica por qué.
b) ¿Es periódica? Determina el período.
c) ¿Es par o impar?
d) Presenta intervalos de positividad o de negatividad? Escríbelos.

5) Dadas las siguientes expresiones definidas de A en B. Define dominio y conjunto de llegada para que sean funciones y luego halla los ceros:

a) $f(x) = \dfrac{-2}{5}x + 7$
b) $f(x) = \sqrt{x-2}$
c) $f(x) = 6 - \sqrt{x+1}$
d) $f(x) = (x-1)^2 + 5$
e) $f(x) = \dfrac{(x-3)(x^2-1)}{x+1}$
f) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x^2+1}$

6) ¿Cuándo las funciones reales del tipo $f(x) = x^n + a$ con $n \in N$, $a \in IR$ y $a \neq 0$ son pares?

7) ¿Las funciones reales del tipo $f(x) = a.g(x)$ con g par y $a \in IR$ y $a \neq 0$ son pares?. Justifica tu respuesta

8) Si para el ejercicio anterior, g es impar, ¿cómo es f? Justifica tu respuesta.

9) La suma de dos funciones reales pares, ¿es una función par?¿y si fueran impares?¿y si fuera una impar y otra par? Justifica.

10) Suponga que f es una función real par y g es una función real impar.

a) ¿Cuáles de las siguientes funciones son pares?
b) ¿Cuáles de las siguientes funciones son impares?

a) (f . g) c) (f /g)

b) (f . f) d) (g . g)

11) ¿Para qué valores del dominio las siguientes funciones reales toman valores positivos?

d) $f(x) = 3x + 2$
e) $f(x) = (x-2)(x+1)$

12)Halla, si existen, los ceros de las siguientes funciones reales cuadráticas:

d) $f_3(x) = - x^2 – 4$
e) $f_4(x) = x^2 + 3x + 2$

13)Halla los números enteros que verifiquen la condición pedida en cada uno de los siguientes casos.

d) el triple del cuadrado de su consecutivo es 147
e) el producto de dos números impares consecutivos es 143.

14) Calcula el perímetro de un rectángulo cuya área es 168, sabiendo que la diferencia entre la base y la altura es 2.

15) Calcula la altura de un triángulo de 270,75 de área, sabiendo que la medida de su altura es igual a las dos terceras partes de la medida de la base.

16)Un proyectil, luego de ser disparado, recorre una trayectoria en forma de parábola. Los ingenieros han armado una función que permite calcular la altura h (en metros) alcanzada por el proyectil en función del tiempo t (en segundos): $h(t)= -2{,}2t^2 +2t$. Grafica la función encontrada y responde:

a) ¿La trayectoria del proyectil coincide con la gráfica de la función?
b) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada y en qué momento ocurre?
c) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

17) Una empresa de viajes está planificando su oferta para los viajes de egresados. Uno de los coordinadores (ya egresado), recuerda algunos conceptos matemáticos y arma una función que representa la ganancia g en función de la cantidad x de alumnos:

$$g(x)= 500x- 10x^2.$$

Grafica y responde:

a) ¿Cuántos alumnos deben ir para que la ganancia de la empresa sea la máxima posible y cuál es dicho monto?

b) ¿Cuántos alumnos tendrían que viajar para que a la empresa no le convenga organizar el viaje?

18) Un cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros y están separados una distancia de 500 metros, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros sobre la calzada del puente. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra un automóvil en el momento en que está ubicado a 80 metros del centro del puente? Grafica la situación.

19) Con los requisitos que se piden en cada caso, escribe f:

a) Tiene asíntota vertical x = -2 y pasa por el punto P(2;2)
b) El mayor conjunto real en el que pudo definirse es el intervalo (4;∞) y pasa por el punto C(6;-1)

FUNCIÓN SENO

CONSTRUCCIÓN

Sea $f: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR} / \ f(x) = senx$

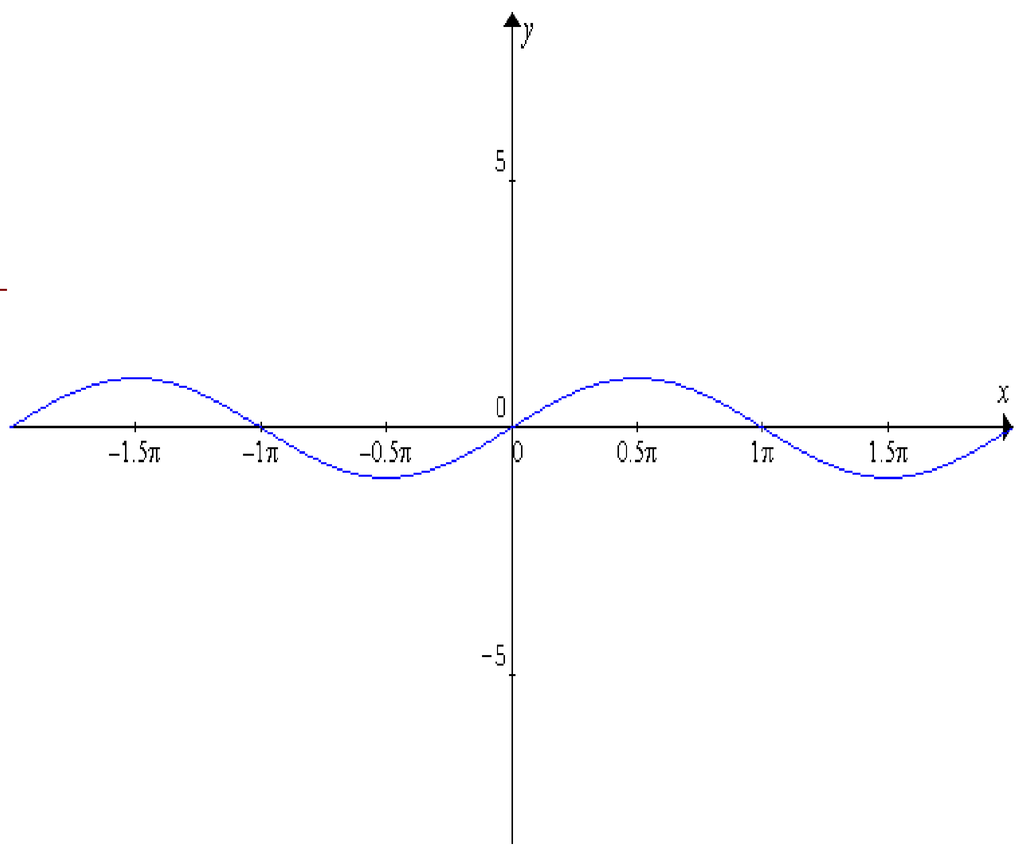
En este ejercicio partiremos de una tabla de valores de *y = sen x* para ángulos de la 1ª vuelta menores de un giro para obtener la gráfica de esta función en ese intervalo.

Se llama ***circunferencia trigonométrica*** a la que tiene su ***centro en el origen*** de coordenadas y de ***radio uno***. Cualquier punto de la circunferencia dista 1 del origen, por lo tanto, si representamos el ángulo con el vértice en el origen de coordenadas y un lado sobre el semieje **OX** positivo, el valor del ***seno*** coincide con la ***ordenada*** del punto de corte del otro lado con la circunferencia ***trigonométrica***

Para construir el grafico de la curva sinusoidal utilizamos la circunferencia trigonométrica dividida en arcos, y a su derecha el sistema de coordenadas cartesianas tomando sobre el eje de ordenadas la misma unidad que la correspondiente al de la circunferencia.

En el eje de abscisas marcamos a izquierda y derecha del origen de coordenadas intervalos de amplitud $\frac{\pi}{6}$. Completa la tabla

x (rad)	y =sen x
0	
...	
...	
...	
...	
....	
....	
....	
....	
....	
....	



¿Qué sucede con los valores del seno tras dar una vuelta completa a la circunferencia?

En esta escena verás que los valores del seno vuelven a repetirse.

Propiedades de la función seno en el intervalo $[0;2\pi]$

Observando el gráfico de la función seno podemos obtener las siguientes conclusiones:
a) dominio e imagen
D: $[0;2\pi]$
I: [-1;+1]

b) periodicidad
La gráfica obtenida en el intervalo $[0;2\pi]$ se repite periódicamente
$\forall x \in IR : sen\left(x+2\pi\right)=senx$ período $p=2\pi$

c) no es inyectiva

d) ceros de la función: resolvemos la ecuación $senx=0$

$$sen0=0 \Rightarrow sen\left(0+2\pi\right)=sen\left(0+4\pi\right)=sen\left(0+2k\pi\right)=0$$
$$\Rightarrow \qquad sen\left(2k\pi\right)=0, \quad con \ \ k \in IR$$
$$sen\pi=0 \Rightarrow sen(\pi+2\pi)=sen(\pi+4\pi)=sen(\pi+2k\pi)=0$$
$$\Rightarrow \qquad sen[(2k+1)\pi]=0, \ con \ \ k \in R$$

en definitiva

$x = k\pi \ (k\epsilon Z)$ es cero de f

el conjunto de ceros de

$f : S\{x / x = k\pi \wedge k \in Z\}$

e) paridad y simetría: es impar.
Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi/2)=1 \\ f(-\pi/2)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\pi/2)=-f(-\pi/2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi)=0 \\ f(-\pi)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\pi)=-f(-\pi)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi/6)=0{,}5 \\ f(-\pi/6)=-0{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\pi/6)=-f(-\pi/6)$$

En general $\forall x \in R\colon f(x) = -f(-x), es\ decir\ \forall x \in R\colon sen\ x = -sen(-x)$ (el gráfico es simétrico respecto del origen)

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
En algunos intervalos es estrictamente creciente y en otros es estrictamente decreciente.

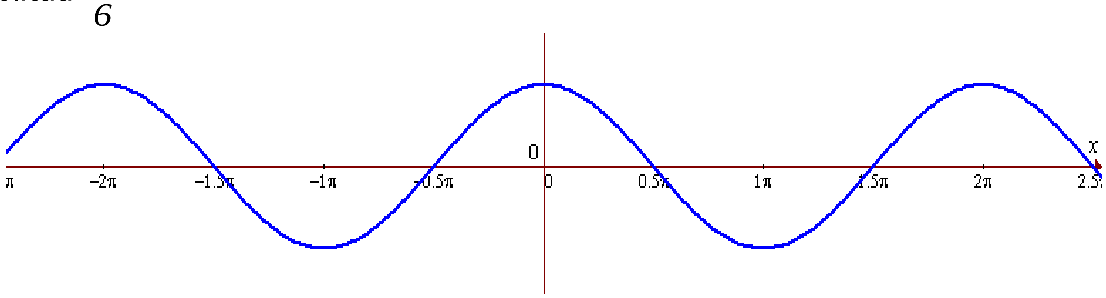
En $(-\pi/2\ ,\pi/2)$, $(-\pi/2+2\pi\ ,\pi/2+2\pi)$, etc. Es estrictamente creciente

En $(-3\pi/2\ ,\pi/2)$, $(-3\pi/2+2\pi\ ,\pi/2+2\pi)$, etc. Es estrictamente decreciente

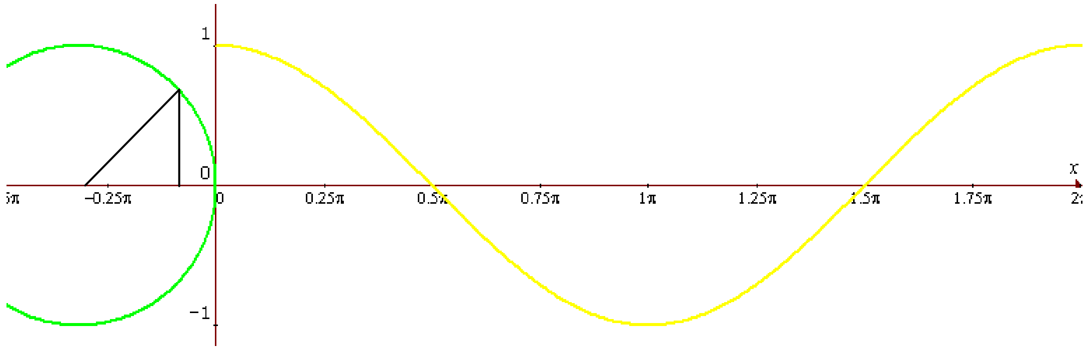
FUNCIÓN COSENO

CONSTRUCCIÓN
Sea $f: \mathrm{IR} \to IR\,/\, f(x) = \cos x$
En este ejercicio partiremos de una tabla de valores de *y = cos x* para ángulos de la 1ª vuelta para obtener la gráfica de esta función en ese intervalo.
Para construir el gráfico de la curva cosinusoidal utilizamos la circunferencia trigonométrica dividida en arcos, y a su derecha el sistema de coordenadas cartesianas tomando sobre el eje de ordenadas la misma unidad que la correspondiente al de la circunferencia.
En el eje de abscisas marcamos a izquierda y derecha del origen de coordenadas intervalos de amplitud $\dfrac{\pi}{6}$

x (rad)	y =cos x
0	
...	
...	
...	
...	
....	
....	
....	



....	
.....	



Propiedades de la función coseno en el intervalo $[0;2\pi]$

Observando el gráfico de la función coseno podemos obtener las siguientes conclusiones:
a) dominio e imagen
D: $[0;2\pi]$
I: [-1;+1]

b) periodicidad
La gráfica obtenida en el intervalo $[0;2\pi]$ se repite periódicamente
$\forall x \in IR : \cos(x+2\pi) = \cos x$ período $p = 2\pi$

c) no es inyectiva

d) ceros de la función
Para determinarlos resolvemos la ecuación $\cos x = 0$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 0,\ con\ \ k \in R$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 0,\ con\ \ k \in R$$

en definitiva $x = \dfrac{2k+1}{2}\pi$ $\quad (\mathrm{k} \in \mathrm{Z})$ es cero de f

el conjunto de ceros de $f : S\left\{x / x = \dfrac{2k+1}{2}\pi \wedge k \in Z\right\}$

e) paridad y simetría: es par.

Por ejemplo:

$f(\pi)= f(-\pi)=-1 \Rightarrow f(\pi)= f(-\pi)$

$f(\pi/2)= f(-\pi/2)=0 \Rightarrow f(\pi/2)= f(-\pi/2)$

$f(\pi/3)= f(-\pi/3)=1/2 \Rightarrow f(\pi/3)=-f(-\pi/3)$

En general $f(x) = f(-x)$ (el gráfico es simétrico respecto del eje y)

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

En algunos intervalos es estrictamente creciente y en otros es estrictamente decreciente.

En $(\pi;2\pi)$ es estrictamente creciente y en $(0;\pi)$ es estrictamente decreciente

FUNCIÓN TANGENTE

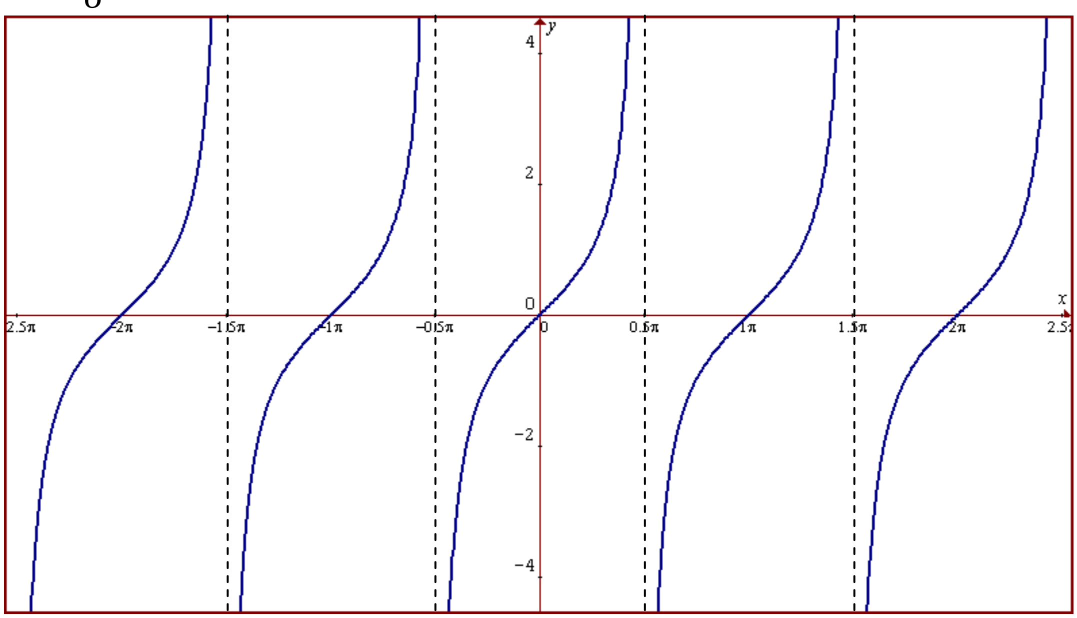
CONSTRUCCIÓN

Sea $f: \mathrm{D} \rightarrow R \,/\, f(x) = \tan x$

En este ejercicio partiremos de una tabla de valores de *y = tan x* para ángulos de la 1ª vuelta y siguientes para obtener la gráfica de esta función en un intervalo mayor.

En el eje de abscisas marcamos a izquierda y derecha del origen de coordenadas intervalos de amplitud $\frac{\pi}{6}$. Completa la tabla

x (rad)	y =tan x
0	
...	
...	
...	
...	
....	
....	



La gráfica muestra que los valores de la tangente vuelven a repetirse, de la misma manera que la función seno y coseno.

Propiedades de la función tangente en el intervalo $[0;2\pi]$

Observando el gráfico de la función tangente podemos obtener las siguientes conclusiones:

a) dominio e imagen
D: $[0;2\pi]$
En dichos valores de x aparecen las asíntotas o polos de la función.
I: (-∞;+∞)

b) periodicidad
La gráfica obtenida en el intervalo $[0;\pi]$ se repite periódicamente

$$\forall x \in R : \tan(x+\pi) = \tan x \quad \text{período} \quad p = \pi$$

c) no es inyectiva

d) ceros de la función: resolvemos la ecuación $\tan x = 0$

$$\tan 0 = 0 \Rightarrow \tan(0+\pi) = \tan(0+2\pi) = \tan(0+k\pi) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad \tan(k\pi) = 0, \;\; con \;\; k \in R$$

en definitiva

$x = k\pi \quad (k \in R)$ es cero de f

el conjunto de ceros de

$$f : S\{x / x = k\pi \wedge k \in Z\}$$

e) paridad y simetría: es impar.

Por ejemplo:
$f(\pi) = -f(-\pi) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

$f(\pi/4) = -f(-\pi/4) = 1$

En general $f(x) = -f(-x)$, el gráfico es simétrico respecto del origen de coordenadas.

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Es una función estrictamente creciente en todo su intervalo.

Los intervalos de crecimiento tendrán una amplitud igual al período: $\ldots\cup\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\cup\ldots.$

VARIACIONES DE LAS FUNCIONES

Tomando como base de comparación alguna de las funciones estudiadas en la sesión anterior, por ejemplo, la función seno, las variaciones que sufre n son las mismas estudiadas: contracción, expansión, desplazamientos, reflexión y pueden representarse según el siguiente esquema:

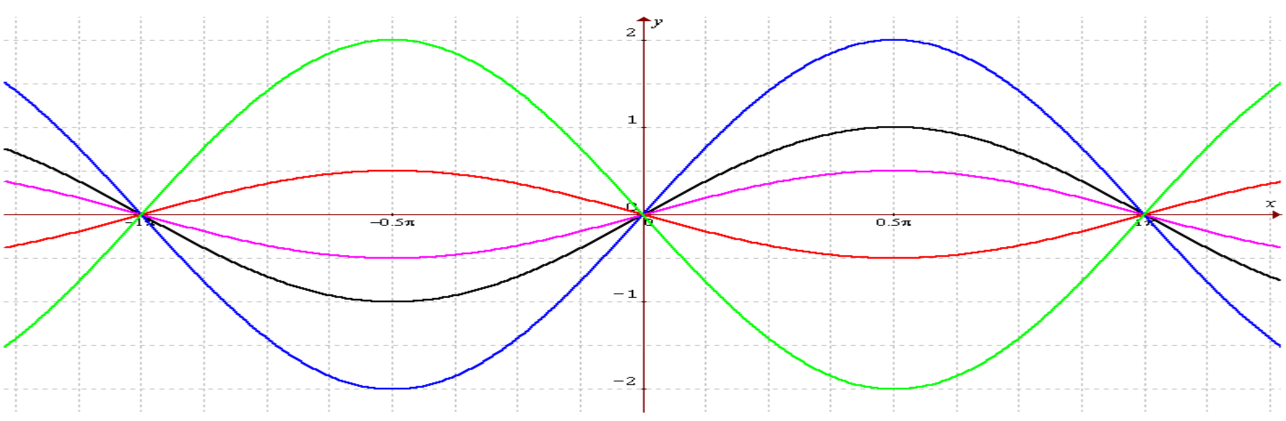
$$\boxed{y = a \cdot sen(b \cdot x + c) + d}$$

Donde las constantes a, b, c, d representan:

1) Amplitud de la Onda "a"
es la máxima ordenada que alcanza la función, es un número real no nulo a ‡ 0.

Si el valor de a = 1 estamos en presencia de una función pura.
Si 0 > a > 1 la función sufre una contracción.
Si a > 1 la función sufre una expansión o estiramiento.
Si a < 0, es decir, es negativo la función sufre una reflexión sobre el eje x.

Para observar estas diferencias realizaremos las siguientes gráficas:
y = sen x donde a = 1 y que tomaremos como referencia
y = ½ sen x donde a = 0,5 y se produce una contracción
y = 2 sen x donde a = 2 y se produce una expansión
y = - ½ sen x donde a = -0,5 y se produce reflexión y contracción
y = -2 sen x donde a = -2 y se produce reflexión y expansión



2) Período de la Onda "b"

Su valor absoluto indica la cantidad de ondas que hay en el intervalo de longitud 2π, es un número real "***b***" no nulo, y cuanto más grande es su valor menor es el periodo.

$$p = \frac{2\pi}{|b|}$$

3) Desplazamiento horizontal "c"

Si se le suma al ángulo de la función trigonométrica una constante diferente de cero "***c***", la desplaza hacia la izquierda el valor de la constante y la desplaza hacia la derecha si restamos la constante al ángulo.

Resumen:

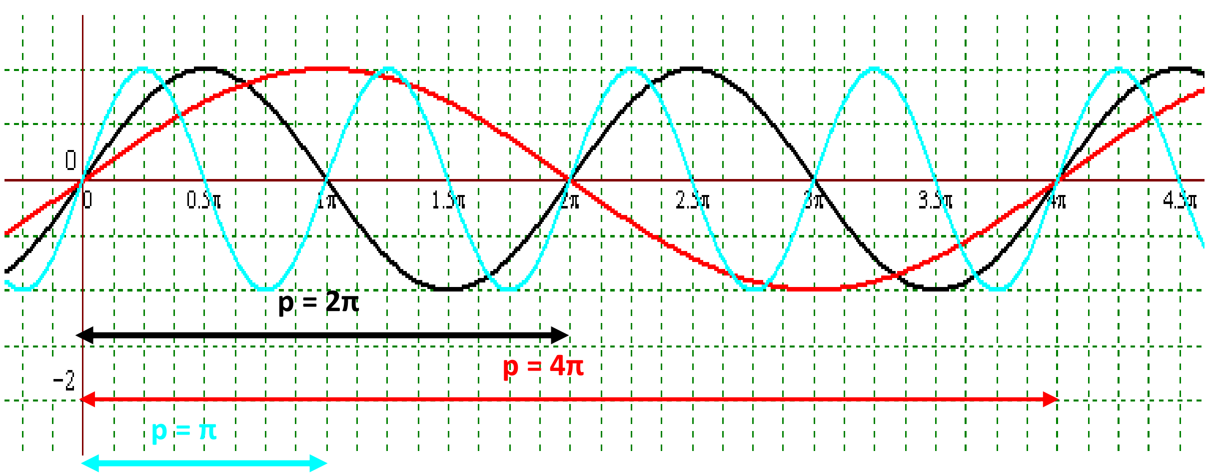
$$(bx+c)\begin{cases} p = \dfrac{2\pi}{|b|} \quad período \\ \dfrac{c}{b} \quad ángulo\ de\ fase \\ c > 0 \quad desplazamiento\ hacia\ la\ izquierda \\ c < 0 \quad desplazamiento\ hacia\ la\ derecha \end{cases}$$

Para ver la variación del período graficaremos:

y = sen x donde b = 1 y que tomaremos como referencia

y = sen (1/2 x) donde b = 0,5 y se produce un aumento del período p=2π/0,5= 4π

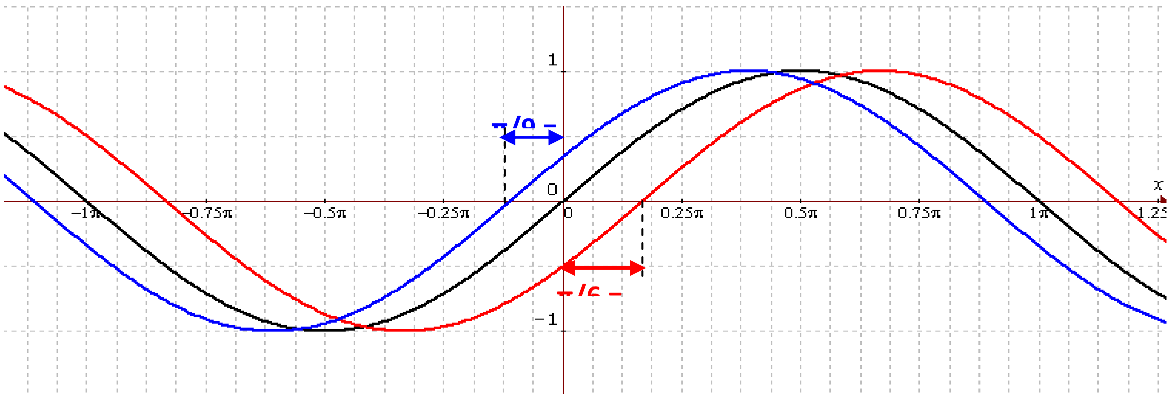
y = sen (2x) donde b = 2 y se produce una disminución del período p=2π/2=π



Para ver los desplazamientos horizontales graficaremos:

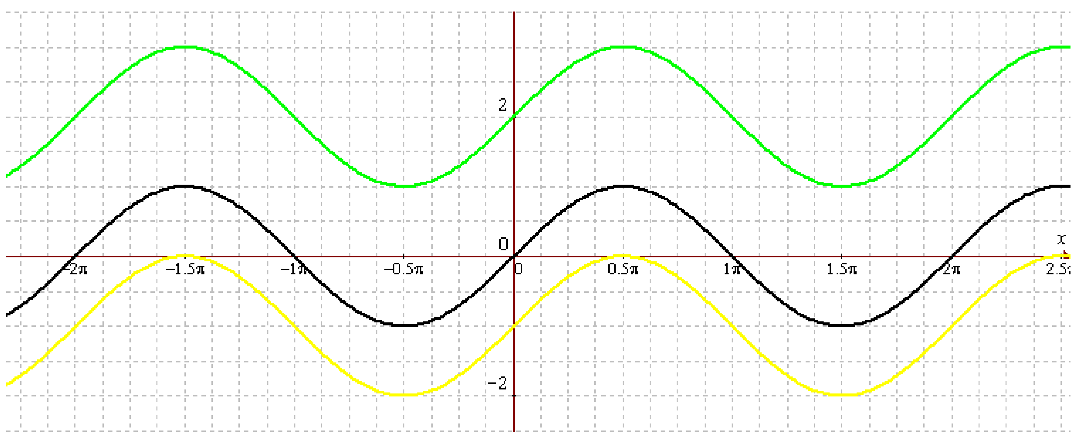
y = sen x donde c = 0 y que tomaremos como referencia.

y = sen (x-п/6) donde c = п/6 (30°) y se produce un desplazamiento hacia la derecha.
y = sen (x+п/9) donde c = п/9 (20°) y se produce un desplazamiento hacia la izquierda.



4) Desplazamiento vertical "d"
Como en todas las funciones vistas, para producir un desplazamiento vertical se le suma o resta un valor constante ***d*** fuera de la función, en este caso, fuera del argumento. El desplazamiento es del mismo signo que la constante ***d***.

Para ver los desplazamientos horizontales graficaremos:
y = sen x donde d = 0 y que tomaremos como referencia.
y = sen x + 2 donde d = 2 y se produce un desplazamiento hacia arriba.
y = sen x - 1 donde d = -1 y se produce un desplazamiento hacia abajo.

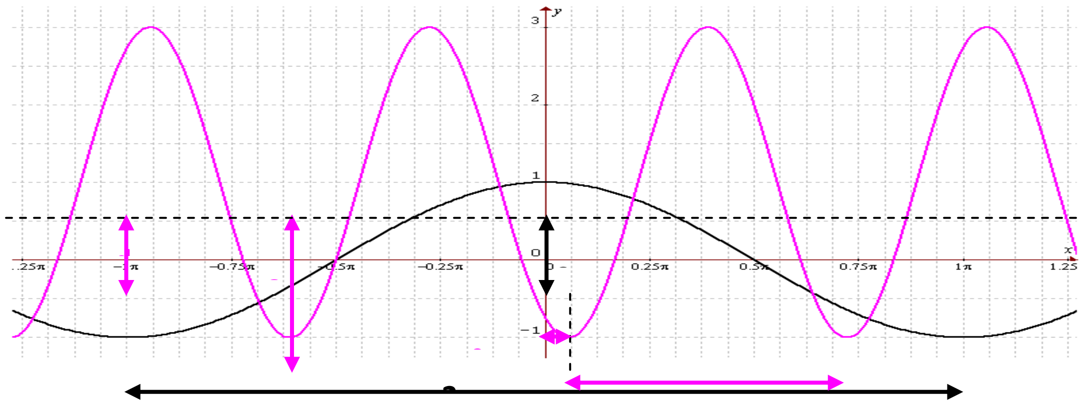


Finalmente graficaremos una función con las distintas variaciones combinadas:

$$y = -2\cos(3x - \pi/6) + 1$$

donde:
a = -2 lo que le produce una reflexión y una expansión
b = 3 lo que acorta su período de 2п a 2п/3
c = -п/6 lo que la desplaza hacia la derecha ese valor (30°)
d = +1 lo que la desplaza hacia arriba

Todo en comparación con la función y = cos x



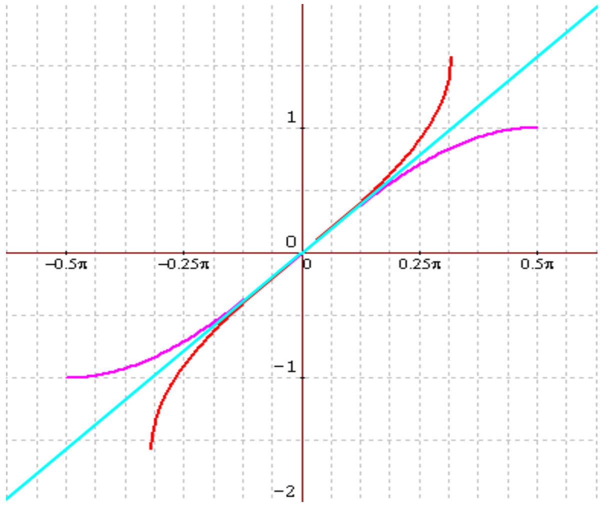
FUNCIONES INVERSAS

Las funciones trigonométricas, seno, coseno y tangente no son inyectivas, por lo que sus relaciones inversas no son funciones. Dada su utilidad en el cálculo de ángulos (cálculo inverso) es conveniente restringir el dominio de dichas funciones para que las relaciones inversas se transformen en funciones.

Al realizar la gráfica de las funciones inversas, recordemos que ambas gráficas deben ser simétricas respecto del eje ***y = x***. El dominio se deberá restringir en un intervalo donde la función sea estrictamente creciente, por ello, el dominio restringido dependerá del tipo de función: si es impar como el seno y la tangente o par como el coseno.

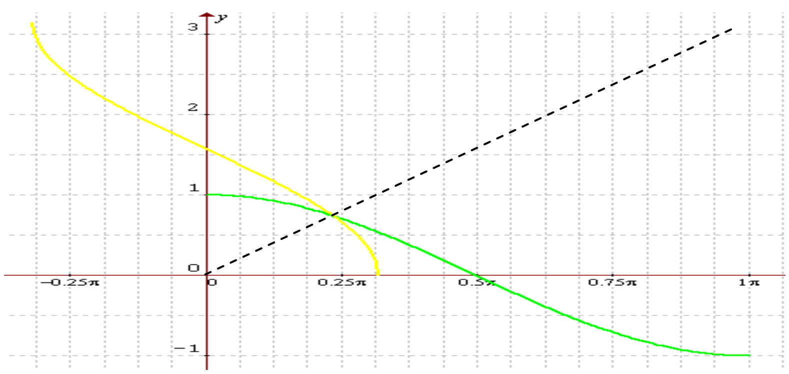
FUNCIÓN ARCO SENO

Para que la función ***y = f(x) = sen x*** admita inversa es necesario acotar el dominio D: [-п/2;п/2] con lo que la imagen I: [-1;+1].
Por lo tanto, la función inversa $\boldsymbol{y^{-1} = f^{-1}(x)}$ ***= arc sen x*** conmutará con la anterior el dominio y la imagen, siendo D:[-1;1] , I:[-п/2;п/2], y sus gráficas:



FUNCIÓN ARCO COSENO

Para que la función ***y = f(x) = cos x*** admita inversa es necesario acotar el dominio D: [0;π] con lo que la imagen I: [-1;+1].
Por lo tanto, la función inversa ***y^{-1} = f^{-1}(x) = arc cos x*** conmutará con la anterior el dominio y la imagen, siendo D:[-1;1] , I:[0;π], y sus gráficas:



FUNCIÓN ARCO TANGENTE

Para que la función ***y = tanx*** admita inversa se debe acotar el dominio D:[-π/2;π/2] con lo que la imagen I: [-∞;+∞].

Por lo tanto, la función inversa $y^{-1} = f^{-1}(x) = \text{arc tan } x$ conmutará con la anterior el dominio y la imagen, siendo D:[-∞;+∞] , I:[-π/2;π/2], y sus gráficas: