FUNCIONES

Anexo

Funciones exponenciales y logarítmicas: Función exponencial: definición, propiedades. Clasificación. Funciones de la forma $y=a^x$. Particularidades. Funciones de la forma $f(x)=k.a^x$. Resolución de ecuaciones exponenciales. Función logarítmica: definición, propiedades. Dominio natural. Resolución de ecuaciones logarítmicas.

Funciones trigonométricas: Dominio, imagen, características y gráficas de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. Periodos, ceros. Funciones trigonométricas inversas. Resolución de ecuaciones trigonométricas. Aplicaciones a la geometría. Ejercitación y problemas.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Pensemos en la siguiente situación problemática:

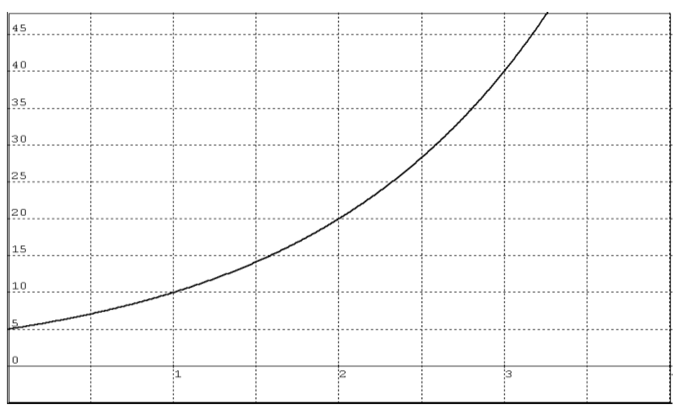
Una población de bacterias está en un medio tal que se reproduce duplicándose cada hora. En el momento en que comenzamos su observación existían 5000 bacterias, al cabo de una hora 10000, a las dos horas 20000, a las tres horas 40000 y así sucesivamente.

Suponiendo la reproducción en forma continua ¿podrá predecirse la cantidad de bacterias en cada momento? ¿Habrá una ley que las interprete?

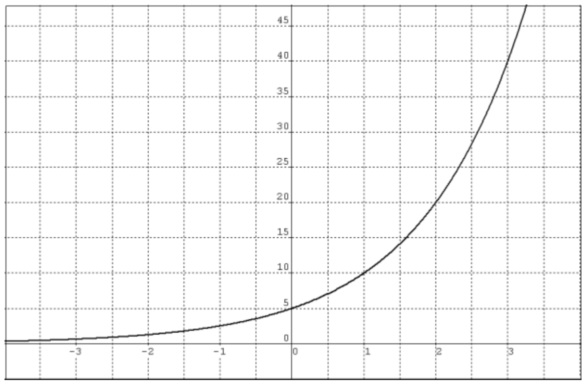
Graficamos: Eje x: tiempo en horas

Eje y: cantidad de bacterias en miles

x	y
0	5000
1	10000
2	20000
3	40000



¿Cuántas bacterias había 1, 2, 3 horas antes?



X	y
0	5000
-1	2500
-2	1250
-3	625

Calculamos algunos valores:

t = 0 f(0) = 5000

t = 1 f(1) = 5000 · 2

t =2 f(2) = 5000 · 2 · 2

t = n f(n) = $5000 \cdot 2^n$

Donde f(n) es la expresión general

La expresión cuya representación gráfica coincide con la anterior se denomina **función exponencial,** con Dominio y conjunto de llegada los números reales, y su expresión general es de la forma:

$$\mathbf{y = a^x}$$

Tengamos en cuenta algunas consideraciones acerca de los valores que puede tomar la base a:

1) a = 0

Si a = 0 entonces podría suceder que en algún momento para a^x obtuviéramos el valor:

0^0 indeterminación!

O bien el valor:

$0^{-1} = \frac{1}{0}$!!

Por lo que concluimos que la función no estaría definida cuando $x=0$

2) $a < 0$

Ejemplo: si $a = -2$

x	$y = (-2)^x$
2	$(-2)^2 = 4$
3	$(-2)^3 = -8$
3/2	$\sqrt{(-2)^3}$!! No tiene solución Real

Por lo que concluimos que no es posible que a tome valores menores que cero.

3) $a = 1$

Si $a = 1$ la función toma la forma $y = 1^x$, cuya gráfica es una recta de ecuación $y = 1$.

Por lo que concluimos que la ecuación obtenida no responde a las características de la función exponencial.

Luego "a" podrá tomar sólo valores mayores que cero y distintos de uno.

Formalizando nuestras ideas decimos que una función exponencial a la función real cuya expresión general es de la forma:

$$\boxed{y = a^x}$$

Donde:

a es una constante tal que sea positiva, distinta de cero y distinta de uno.

$a \in IR^+ \wedge a \neq 1$

x en esas condiciones puede tomar cualquier valor real, $x \in IR$

Definición:

Se llama función exponencial a la función real:

$$f{:}IR \rightarrow IR^+ / f(x) = a^x \qquad \begin{cases} a \in IR^+ - \{ 1 \} \\ x \in IR \end{cases}$$

VARIACIONES DE LOS ELEMENTOS

1. Variaciones de a

El comportamiento de la función exponencial es diferente según sea:

$$a > 1 \quad \text{ó} \quad 0 < a < 1$$

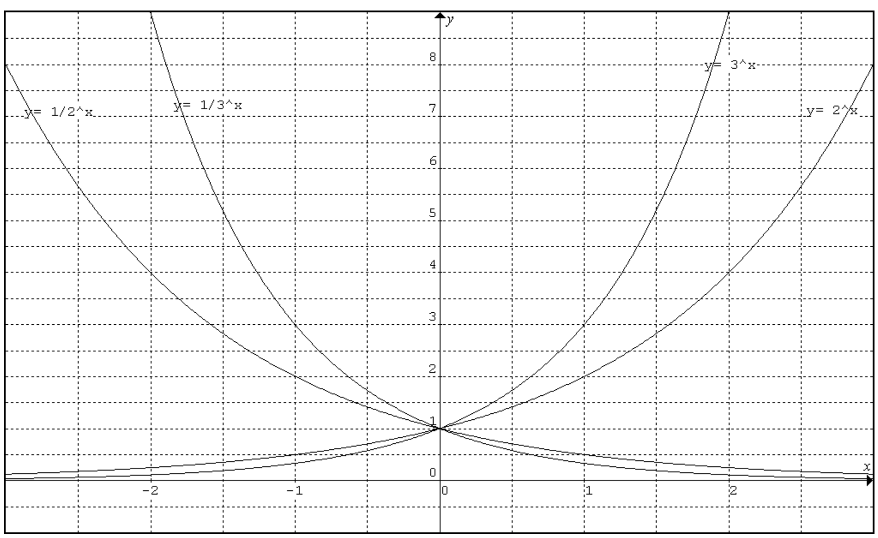
Se observa que:

- Todas ellas tienen un punto común que es el (0 ; 1)
- Cuando a > 1 la función es creciente
- Cuando 0 < a < 1 la función es decreciente
- Entre los exponentes de base recíproca hay simetría axial de eje x = 0. En general:

$$y = a^x \text{ es simétrica de } y = \frac{1}{a^x}$$

Si se observa en la gráfica:

$$y = 2^x \text{ es simétrica de } y = \frac{1}{2^x}$$



2. Variaciones de k – Expansiones – Contracciones - Reflexiones cuando la función exponencial es de la forma $y = k \cdot a^x$

Si se mantiene constante el valor de a se observa qué sucede cuando varía k, siendo k una constante que multiplica a la función exponencial.

Se observa que:

- La ordenada al origen coincide con el valor de k.

- Si k > 1 se produce una expansión de la función.

Por ejemplo:

$y = 2^x$ comparada con $y = 4 \cdot 2^x$

- Si k <1 se produce una contracción de la función.

Por ejemplo:

$y = 2^x$ comparada con $y = 0,5 \cdot 2^x$

- Para valores de k opuestos las funciones resultan con simetría axial de eje y=0. Se ha producido una reflexión sobre el eje x.

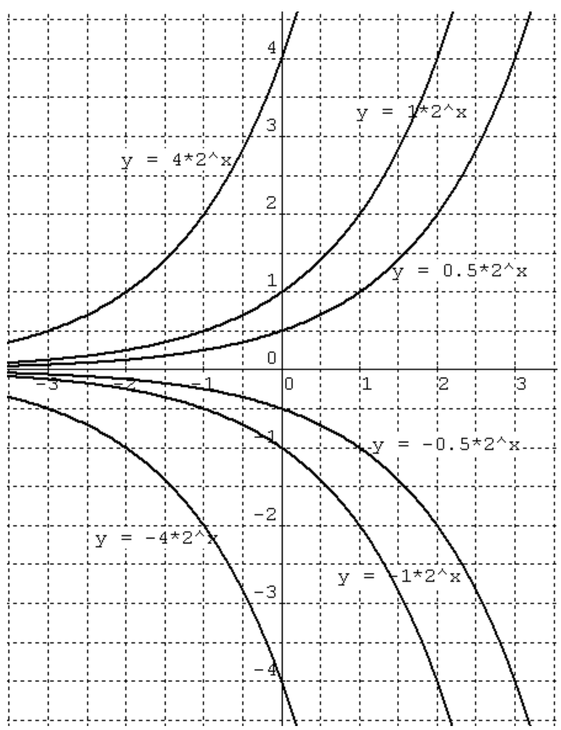
Por ejemplo:

$y = 2^x$ comparada con $y = - 2^x$

$y = 0,5 \cdot 2^x$ comparada con $y = -0,5 \cdot 2^x$

$y = 4 \cdot 2^x$ con $y = -4 \cdot 2^x$

Como se ve las curvas resultan simétricas respecto del eje de abscisas.



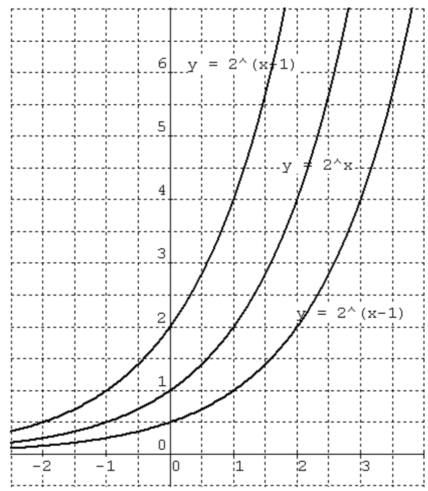
3. Desplazamientos de la Función Exponencial

Ahora se estudiarán los desplazamientos de la función exponencial

- Desplazamiento Horizontal :
  $f(x) = a^{x-b}$,

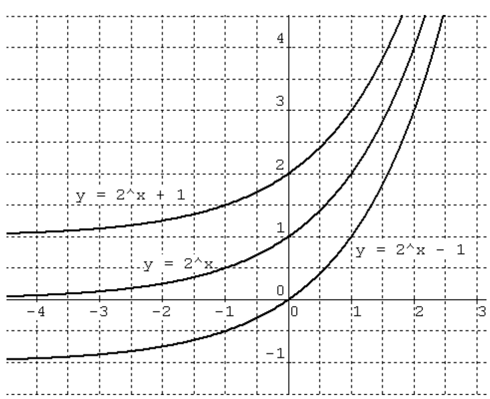
  donde b indica el corrimiento según el eje x

$f(x) = a^{x-b}$	b	Corrimiento
$f(x) = 2^{X}$	0	No hay
$f(x) = 2^{X+1}$	-1	1 hacia izquierda
$f(x) = 2^{X-1}$	1	1 hacia derecha



- Desplazamiento Vertical:
  $f(x) = a^{x} + c \quad \wedge c \in IR$, donde c indica el corrimiento sobre el eje y

$f(x) = a^{x} + c$	c	Corrimiento	Asíntota horizontal
$f(x) = 2^{x}$	0	No hay	y = 0
$f(x) = 2^{x} + 1$	1	1 hacia arriba	y = 1
$f(x) = 2^{x} - 1$	-1	1 hacia abajo	y = -1



1. EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL QUE PASA POR DOS PUNTOS

Determinemos la expresión de la función exponencial que pasa por los siguientes puntos, para ello hallaremos su base y su coeficiente. Verifica.

a) $P_1\left(-1\,;\frac{2}{3}\right)$ y $P_2(4\,;162)$

Puesto que los dos puntos satisfacen la ecuación de la función exponencial reemplazamos sus coordenadas en la misma, y obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: a y k que podemos resolver, por ejemplo, por método de igualación

$y = k \cdot a^x$ $\qquad$ $y = k \cdot a^x$

$\frac{2}{3} = k\,a^{-1}$ (1) $\qquad$ $162 = k \cdot a^4$ (2)

$k = \frac{2}{3}.a$ $\qquad$ $k = \frac{162}{a^4}$

$$\frac{2}{3}.a = \frac{162}{a^4}$$

$$a.a^4 = \frac{162.3}{2}$$

$$a^5 = 81.3$$

$$a = \sqrt[5]{243}$$

$$a = 3$$

Puesto que $k = \frac{2}{3}.a$, el valor de k es: $k = \frac{2}{3}.3 = 2$

$$k = 2$$

La función exponencial que pasa por los puntos dados es:

$$y = 2 \cdot 3^x$$

Para verificar, se reemplaza el valor de x en la función obtenida y se corrobora si se obtiene el correspondiente valor de y, según los puntos dados:

P_1 = (-1; ?) y = $2 \,.\, 3^{-1} = 2 \,.\, \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ luego cumple que la ordenada para el punto P_1 es $\frac{2}{3}$

P_2 = (4; ?) y = $2 \,.\, 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$ luego cumple que la ordenada para el punto P_2 es 162

Realiza los siguientes ejercicios

51)Dada la función real exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ responde:

a) ¿Cuál es el Dominio?
b) ¿La variable se encuentra en la base o en el exponente?
c) ¿Cuál condición debe cumplir a para que el dominio sea el conjunto de los números reales?
d) ¿Para qué valores de x la función exponencial cruza al eje de las abscisas?
e) ¿Puede ser k = 0?
f) ¿Puede ser a = 1?
g) ¿Cómo se denomina k?

52) Indica cuáles de las siguientes expresiones definen funciones exponenciales o no, aplicando la definición:

$f(x) = x^3$ $\quad g(x) = e^x$ $\quad h(x) = 1^x$ $\quad j(x) = (-5)^x$

$i(x) = x^{2x}$ $\quad l(x) = -2^x$ $\quad m(x) = 2^{-x}$ $\quad n(x) = 1/2^x$

53) Determina si las siguientes expresiones son Verdaderas o Falsas.

a) $a.a^n = a^{n+1}$
b) $a^n.a^n = a^{2n}$
c) $a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$
d) $a^n : a = a^{n-1}$
e) $3^{-n} = 1/a^{-n}$
f) $(a^n)^n = a^{2n}$

54) Analiza dominio, imagen, paridad, ceros, ordenada al origen, asíntotas, crecimiento, decrecimiento, bases recíprocas y simetría de las siguientes funciones exponenciales. Grafica en el mismo plano.

a) $y = 2^x$ para $a > 1$, $k > 0$

b) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ para $0 < a < 1$, $k > 0$

c) $y = -2^x$ para $a > 1$, $k < 0$

d) $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ para $0 < a < 1$, $k < 0$

55) Analiza si las siguientes expresiones son Verdaderas o Falsas.

a) Si trasladamos $f(x) = 2^x$ dos unidades hacia la izquierda obtenemos $g(x) = 2^{(x-2)}$
b) Si trasladamos $f(x) = 3^x$ dos unidades hacia arriba obtenemos $g(x) = 3^{(x+2)}$
c) Si trasladamos $f(x) = 3^x$ dos unidades hacia la derecha obtenemos $g(x) = 3^x/3^2$
d) $g(x) = 3^{(x-1)}$ es el resultado de trasladar $f(x) = 3^x$ una unidad hacia la derecha
e) $g(x) = e^x - 1$ es el resultado de trasladar $f(x) = e^x$ e unidades hacia la izquierda
f) Las funciones $g(x) = e^x$ y $h(x) = -e^x$ son simétricas respecto al eje x

56) Analiza los desplazamientos de las siguientes funciones. Grafica.

a) $f(x) = 2^{x+1}$ b) $f(x) = 2^{x-1}$

c) $f(x) = e^x - 1$ d) $f(x) = e^x + 1$

57) Para cada una de las siguientes funciones, analiza dominio, imagen, intersección con el eje de ordenadas, intervalos de positividad y negatividad, crecimiento y decrecimiento de cada una.

a) $y = -3\, e^{-x}$
b) $y = 2^{-x} - 2$

58) Halla la fórmula de una función exponencial que cumpla con las condiciones requeridas en cada caso:

a) Pasa por el punto (-1;3/2) y k = 2.
b) a = 0,5y corta al eje y en y = 4.
c) Pasa por los puntos (-3;1/625) y (5;625).

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Definición:

Sea f una función definida de IR^+ en IR, se llama función logarítmica a la función inversa de la función exponencial

$$y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$$

y se lee "logaritmo de x en base b", cuyo significado es "el logaritmo en base b del número estrictamente positivo (no puede tomar el valor cero) x es el exponente y al cual hay que elevar la base para obtener el número x".

Como son funciones inversas su dominio y su imagen se intercambian.

Para obtener una función logarítmica se intercambian las variables en $y = b^x$, como consecuencia, calcular un logaritmo es buscar un exponente que verifica la función exponencial.

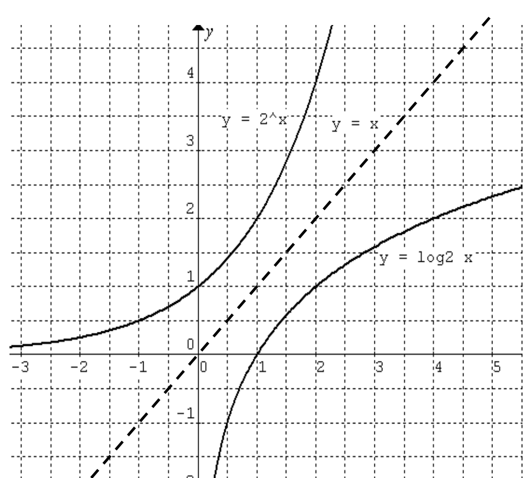
La asíntota horizontal se convierte en asíntota vertical.

Ejemplo:

Construiremos las gráficas que representa las funciones **$y=2^x$** y su inversa **$y= \log_2 x$**. Se debe tener en cuenta que por ser la función logarítmica inversa de la exponencial los valores obtenidos para **y** (imagen de la función), en el caso de f(x) = 2^x, pueden ser tomados como elementos de dominio (elementos de **x**) para la función f(x) = $\log_2$ x.

Y a su vez, los elementos de dominio de la primera serán considerados imagen de la segunda; como se muestra en las siguientes tablas reducidas:

x	**$y = 2^x$**	x	**$y = \log_2 x$**
-3	0.125	0.125	-3
-2	0.25	0.25	-2



-1	0.5	0.5	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

La gráfica permite destacar que la recta **y =x** (función identidad) es el **eje de simetría** de las funciones inversas $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$.

Ejercicio

Utilizando la calculadora, completa, de ser posible, las tablas de valores comparativos de las funciones: $y = 2^x$, $y= \log_2 x$ e $y = x$, en las que se observa que **la función logarítmica no está definida para x = 0 ni para valores negativos:**

x	$y = 2^x$	$y = \log_2 x$	y = x
-7			
-6			
-5			
-4			
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

Teniendo en claro las ideas precedentes se puede formalizar:

Sea f: $IR^+ \rightarrow IR$/

$$y = k \cdot \log_b x \begin{cases} \text{constante} & k \in R \ \wedge \ k \neq 0 \\ \text{base} & b \in R \ \wedge \ b \neq 1 \ \wedge \ b > 0 \\ \text{argumento} & x > 0 \quad x \in R^+ \end{cases}$$

RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL

La función logarítmica definida de IR^+ en IR, es **inyectiva**, es **suryectiva**, entonces es **biyectiva**, admite función inversa:

- $log_b\ x_1 = log_b\ x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ por lo que la función logarítmica es inyectiva
- I (f) = R la imagen de la función es el conjunto de los números reales, por lo que la función logarítmica, es suryectiva.

Luego, por ser inyectiva y suryectiva la **función logarítmica es biyectiva.**

La función logarítmica es la **inversa de la función exponencial**, para comprobarlo seguimos los siguientes pasos

En la función logarítmica $y = \log_b x$ se intercambia x por y, obteniendo:

$$x = \log_b y$$

Despejando la variable y en $x = \log_b y$, se tiene $y = b^x$, es decir la función exponencial

Representando en un mismo diagrama las funciones $x = \log_b y$ e $y = b^x$ los resultados son gráficas simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante $f(x) = x$, como se pudo observar en la gráfica anterior.

VARIACIONES DE LOS ELEMENTOS

1. Variaciones de b

Se pueden observar algunas características de las funciones logarítmicas y exponenciales a través del siguiente gráfico:

- Si b > 1 entonces $y = b^x$ es creciente, luego $y = \log_b x$ también es creciente.

Ejemplo: $y = 2^x$ con $y = \log_2 x$

- Estas funciones poseen simetría respecto del eje x = y por ser funciones inversas.
- Si 0 < b < 1 entonces $y = b^x$ es decreciente, luego $y = \log_b x$ también es decreciente.

Ejemplo: $y = (1/2)^x$ con $y = \log_{1/2} x$

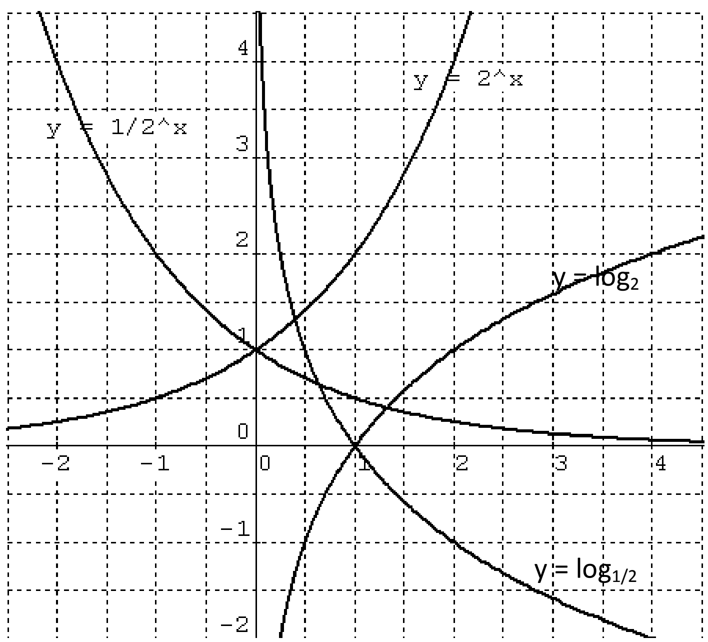
- Estas funciones poseen simetría respecto del eje x = y por ser funciones inversas.

- Todas las funciones logarítmicas intersecan al eje de abscisas "x" en (1;0)

Ejemplo: $y = \log_2 x$ con $y = \log_{1/2} x$

- Las funciones que tienen sus bases recíprocas poseen simetría respecto del eje y = 0 (eje x).

Ejemplo: $y = \log_2 x$ e $y = \log_{1/2} x$



2. Variaciones de k – Expansiones – Contracciones - Reflexiones

Si se mantiene constante el valor de b se puede observar qué sucede cuando varía $k \neq 0$ (constante que multiplica a la función logarítmica)

Se observa que:

- Todas las funciones logarítmicas tienen igual cero o raíz (1;0).
- Si k > 1 se produce una expansión de la función.

Ejemplo: $y = \log_2 x$ con $y = 2 \cdot \log_2 x$

Si k <1 se produce una contracción de la función.

Ejemplo: $y = \log_2 x$ con $y = 0,5 \cdot \log_2 x$

- Para valores de k opuestos las funciones resultan con simetría axial de eje y=0. Se ha producido una reflexión sobre el eje x.

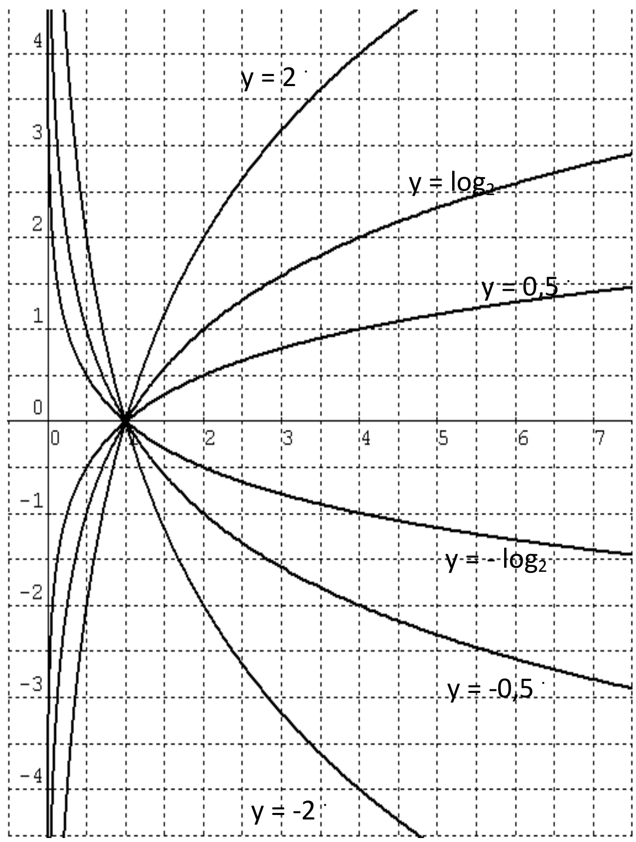
Ejemplos:

$$y = \log_2 x \quad \text{con} \quad y = - \log_2 x$$

$$y = 2 \cdot \log_2 x \quad \text{con} \quad y = -2 \cdot \log_2 x$$

$$y = 0,5 \cdot \log_2 x \quad \text{con} \quad y = -0,5 \cdot \log_2 x$$

Como se ve las curvas resultan simétricas respecto del eje de abscisas.



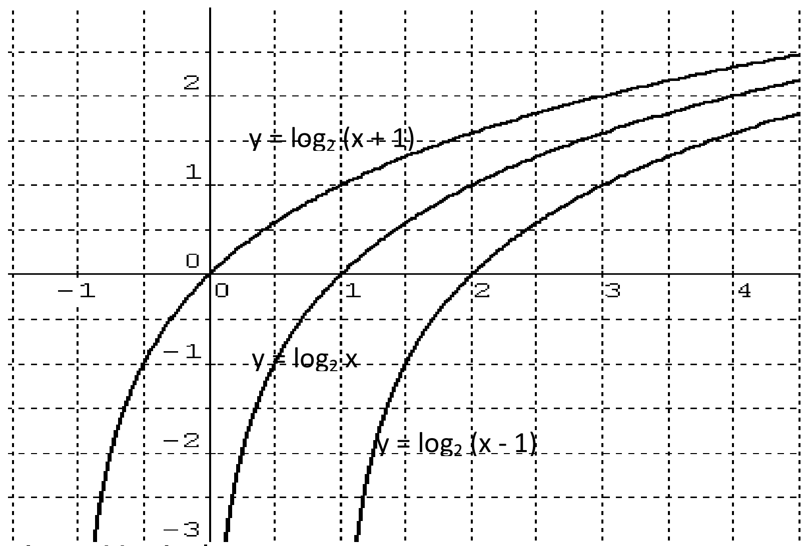
3. Desplazamientos de la Función Logarítmica

- Corrimiento Horizontal

  Se observa lo que ocurre cuando se modifica la variable independiente en un cierto valor a

$$y = \log_b(x-a)$$
$$y = \log(x-1) \qquad \text{para} \quad \begin{matrix} a>0 \\ b>1 \end{matrix} \quad ; \text{para} \quad \begin{matrix} a<0 \\ b>1 \end{matrix}$$
$$y = \log(x+1)$$

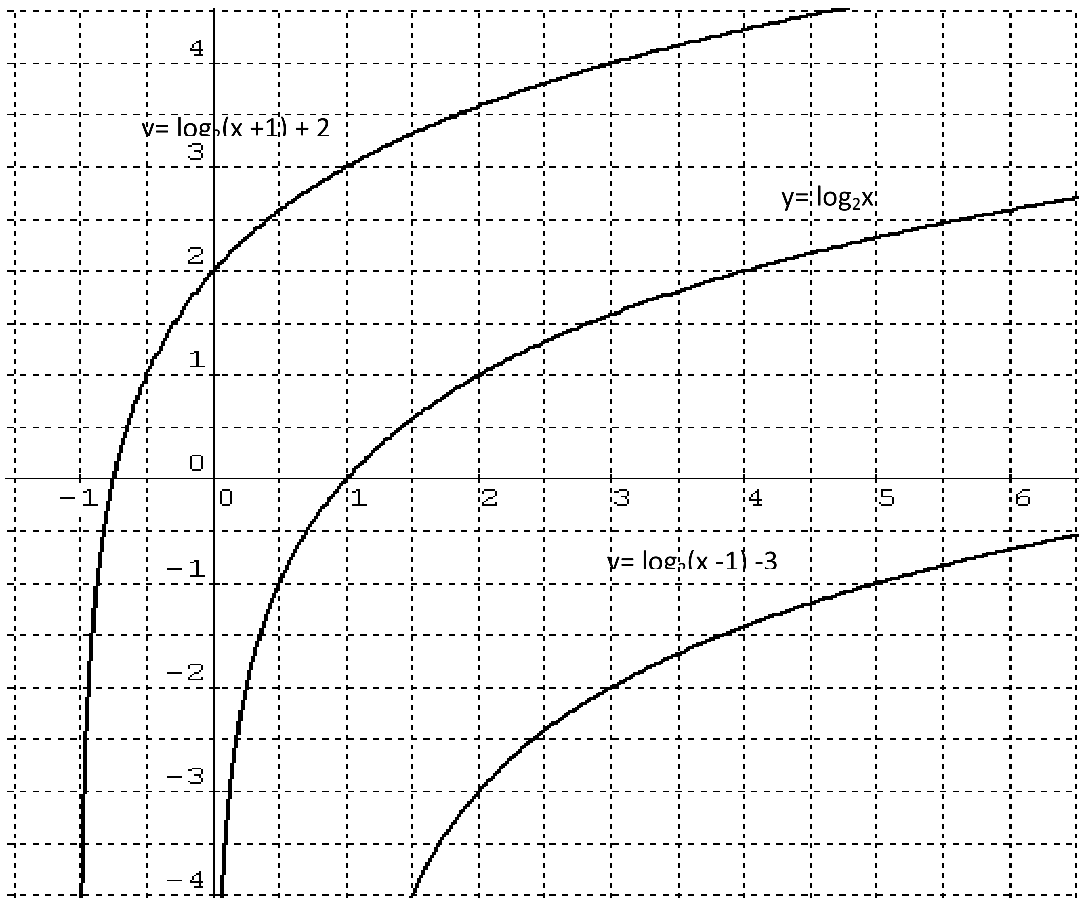
f (x) = $\log_b$ (x – a)	a	Corrimiento	Asíntota Vertical
f(x) = $\log_2 x$	0	No hay	x = 0
f(x) = $\log_2(x + 1)$	-1	1 a izquierda	x = -1
f(x) = $\log_2(x - 1)$	1	1 a derecha	x = 1



- Desplazamiento Vertical:

Se observa que se puede agregar, al corrimiento horizontal, un corrimiento vertical incorporando a la expresión anterior el valor de c

$$y = \log_b(x-a)+c$$
$$y = \log(x+1)+2$$
$$y = \log(x-1)-3$$



f (x)= $\log_b$ (x – a) + c	c	Corrimiento	Asíntota Vertical
f(x) = $\log_2 x$ f(x) = $\log_2(x + 1) + 2$	0 +2	No hay 2 arriba	x = 0 x = -1
f(x) = $\log_2(x - 1) - 3$	-3	3 abajo	x = 1

Dominio Natural de una función es encontrar un subconjunto de los números reales en el cual la función está definida.

$$f(x) = \log\left[\frac{(x-1)}{(x+1)}\right]$$

Sabemos que la función logarítmica está definida para valores de $x \in \mathbb{R}^+$ luego el numerador del argumento, no puede tomar el valor 1.

Además el denominador, del argumento, tampoco puede tomar el valor "-1", porque generaría una indeterminación.

Para los valores de x = 1 y x = -1 la función tiene asíntotas verticales.

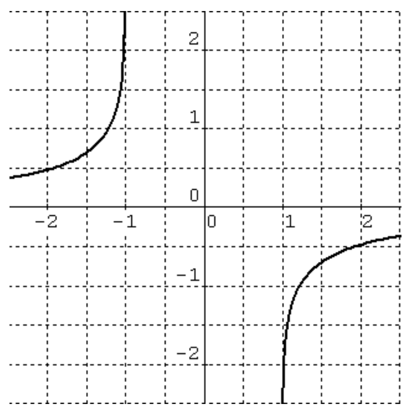
Para valores de $x < -1$ tanto el numerador como el denominador, del argumento, resultan negativos. Luego, aplicando la regla de los signos dicho argumento es positivo y la función logarítmica está definida!!!

Para valores de $x>1$, tanto el numerador como el denominador, del argumento, son positivos y no hay inconveniente para el cálculo de la función logarítmica.

En consecuencia el dominio de la función propuesta es: $(-\infty;-1)\cup(1\,;\,\infty)$

Con respecto a los ceros, ningún valor de x anula la función luego no existe corte con el eje x.

Podemos interpretar gráficamente, la función propuesta, y corroborar nuestras conclusiones:



Realiza los siguientes ejercicios

1) Grafica las siguientes funciones logarítmicas definidas de IR^+ en R:

   a) $f(x) = \log_{1/3} x$
   b) $g(x) = \log_{1/2} x$
   c) $h(x) = \log_3 x$
   d) $l(x) = \log_2 x$
   e) $m(x) = \log_5 x$

2) Teniendo en cuenta las gráficas realizadas en el ejercicio anterior, completa:

   a) Cortan al eje de abscisas en el punto P(;)
   b) No cortan al eje …..
   c) El conjunto imagen es …….
   d) Si la base es mayor que 1, la función es ……..
   e) Si la base es mayor que cero y menor que uno la función es ……..
   f) Las curvas correspondientes a funciones de bases recíprocas son …….

3) Analiza si las siguientes expresiones son Verdaderas o Falsas. Justifica:

a) Si trasladamos $f(x) = \log_3 x$ dos unidades hacia la izquierda obtenemos $g(x) = \log_3 (x - 2)$

b) Si trasladamos $f(x) = \log_3 x$ dos unidades hacia arriba obtenemos $g(x) = \log_3 (x + 2)$

c) $g(x) = \log_3 x - 1$ es el resultado de trasladar $f(x) = \log_3 x$ dos unidades hacia la izquierda.

d) $g(x) = \ln (x + e)$ es el resultado de trasladar $f(x) = \ln x$ e unidades hacia la izquierda

e) Las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = -\ln x$ son simétricas respecto al eje x.

4) Para los casos:

a) $y = -\log x + 1$
b) $y = 2 \log (x - 10) + 1$Determina el dominio de cada una de ellas para que sean funciones, imagen, ceros, intersección con el eje de ordenadas, intervalos de positividad y negatividad, crecimiento y decrecimiento de cada una.

5) Halla la expresión de una función logarítmica del tipo $f(x) = \log (x - a)$, es decir de base 10, cuya asíntota sea:

a) La recta de ecuación $x = 0,5$
b) La recta de ecuación $x = 0,8$

6) Determina el dominio "natural" de las siguientes funciones:
a) $f(x) = - \ln x$
b) $g(x) = \log_5 (x - 2)$
c) $h(x) = \log_5 (x - e)$
d) $l(x) = \log |x - 2|$
e) $m(x) = \log [(x - 2)/(x + 1)]$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO FUNCIONES EXPONENCIALES

Su aplicación es de fundamental importancia para la ciencia en el campo de la biología, economía, química, física, etc.

En los modelos que permiten la formulación de un problema del mundo real en términos matemáticos, aparecen funciones de crecimiento o decrecimiento exponencial

Ello es debido a que tienen la propiedad que “a intervalos iguales de la variable independiente se obtienen porcentajes iguales de crecimiento o decrecimiento de la función”

Diversos ejemplos de fenómenos naturales que pueden ser modelados mediante estas funciones son:

a) Crecimiento exponencial de poblaciones de seres vivos.
b) Crecimiento amortiguado de poblaciones de seres vivos.
c) Crecimiento exponencial demográfico.
d) Predicción del tamaño de una población.
e) Comparación de los efectos de diferentes tasas de crecimiento de población.
f) Determinación de la población inicial.
g) Descripción de la desintegración de sustancias radioactivas en Física y Química.
h) Crecimiento frenado de poblaciones de seres vivos (función logística).
i) Eliminación de medicamentos.
j) Interés compuesto.
k) Interés compuesto continuo.
l) Depreciación de un bien.
m) Ley de enfriamiento de Newton.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Diversos ejemplos de fenómenos naturales que pueden ser modelados mediante estas funciones son:

a) intensidad del sonido
b) intensidad sísmica
c) pH y acidez de las soluciones
d) matemática financiera

Ejemplos

1) La presión atmosférica **p** sobre un globo o un avión disminuye al aumentar la altura. Esta presión medida en milímetros de mercurio se relaciona con el número de kilómetros **h** sobre el nivel del mar mediante la fórmula: $p = 760 \cdot e^{-0,145h}$

a) Determine la presión atmosférica a una altura de 1 kilómetro

b) ¿A qué altura la presión será de 600 milímetros de Hg?

a) $p = 760 \cdot e^{-0,145h} = 760 \cdot e^{-0,1451} = 657 mmHg$

b) $600 = 760 \cdot e^{-0,145h} \Rightarrow h = \dfrac{\ln \dfrac{600}{760}}{-0,145} = 1,630km$

2) En ocasiones los sicólogos utilizan la función L(t) = A(1- e^{-kt}) para medir la cantidad **L** aprendida en el tiempo t .El número A representa la cantidad por aprender y **k** mide el nivel de aprendizaje. Suponga que un estudiante debe aprender un total de A = 200 palabras de vocabulario. Un sicólogo determina que el estudiante aprendió 20 palabras cada 5 minutos.

a) Determine la tasa de aprendizaje k
b) ¿Aproximadamente cuántas palabras habrá aprendido después de 10 minutos?
c) ¿Cuánto tiempo tardará en aprender 180 palabras?

a) $20 = 200 \cdot (1 - e^{-k \cdot 5}) \Rightarrow k = \dfrac{\ln \dfrac{20}{200}}{-5} = 0,02107$

b) $L_{(10)} = 200 \cdot (1 - e^{-0,2107 \cdot 10}) = 38\, palabras$

c) $t = \dfrac{\ln 0,1}{-0,02107} = 109 \min$

3) Se depositó dinero en un banco a plazo fijo. El banco ofrecía el 5 % trimestral y luego de un año depositado el dinero se juntó $% 2.187,91

a) ¿Cuál era el capital inicial?
b) ¿Cuál es la expresión que permite determinar el monto (en $) en función del tiempo (en períodos) y las expresiones de las otras variables?
c) ¿Cuál será el monto dentro de tres años?
d) ¿Al cabo de cuánto tiempo el monto será mayor a $3000?

$\mathrm{C_n} = \text{monto acumulado o Capital al final del período n}$

$\mathrm{Co} = \text{capital inicial}$

$\mathrm{i} = \text{tasa de interés}$

$\mathrm{n} = \text{número de períodos} = \dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{ut}} = \dfrac{tiempo}{unidad\ de\ tiempo}$

ut está dada por la capitalización

a) $C_n = Co(1+i)^n$ monto a interés compuesto

$$2187{,}91 = \text{Co}\left(1+\frac{5}{100}\right)^4 \Rightarrow C_o = \frac{2187{,}91}{(1+0{,}05)^4}$$

$$Co = \$1800$$

El exponente 4 es debido a que en un año existen 4 trimestres (t/ut).

b) $C_n = C_0(1+\mathrm{i})^n \quad \Rightarrow \mathrm{C_o} = \dfrac{C_n}{(1+i)^n} \Rightarrow i = \sqrt[n]{\dfrac{C_n}{C_o}} \Rightarrow n = \dfrac{\log C_n - \log C_o}{\log(1+i)}$

c) $C_n = 1800\cdot(1+0{,}05)^{36/3}$

El 36 del exponente es debido a que en 3 años hay 36 meses, es decir, 12 trimestres (12 grupos de 3 meses)

$$C_n = 1800\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)^{12} = \$3232{,}50$$

$$C_n > 3000 \Rightarrow 1800.(1+0{,}05)^n > 3000$$

$$(1{,}05)^n > \frac{3000}{1800}$$

d) $n\cdot\log 1{,}05 > \log 3000 - \log 1800$

$$n > \frac{\log 3000 - \log 1800}{\log 1{,}05} = 10{,}46 trimestres = 31 meses 12 días$$

4) El pH de una solución química esta dado aproximadamente por la fórmula $pH = -\log_{10}\left[H^+\right]$ donde $\left[H^+\right]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores de pH varían de 0 (ácido) a 14 (alcalino).

a) Determine el pH del agua en un recipiente de 1 litro con 0,0000001 moles de iones hidrógeno.
b) Determinar la concentración de iones de hidrógeno en una solución semiácida con un pH de 4,2.

a) $pH = -\log_{10} 1\cdot 10^{-7} = 7$

b) $4{,}2 = -\log_{10}\left[H^+\right] \Rightarrow \left[H^+\right] = 10^{-4{,}2} = 6{,}31\cdot 10^{-5} = 0{,}0000631 mol$

Funciones trigonométricas

1) Grafica las siguientes funciones. Para cada una de ellas indica dominio, imagen, amplitud, ángulo de fase, período, frecuencia, desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical.

a) y = 2 cos x
b) y = cos (x + 2π/3)
c) y = cos (x+π/2) + 3

d) $y = 3\cos(2x + \pi/3) + 1$

2) Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 50 Hz dada por:

$$i(t)=30\,sen(100\pi\,(t - 7/36))$$

donde i(t) es la corriente medida en amperes, t en segundos. Halla el valor positivo más pequeño de t para que la corriente sea de 15 amperes.

3) En el proceso de la respiración se alternan períodos de inhalación y exhalación que se pueden describir mediante la fórmula:

$$f(t) = 0,6\ sen\,(\pi/2 \cdot t)$$

Siendo t el tiempo medido en segundo y f(t) el caudal del aire en el tiempo t, medido en litros por segundo:

a) Halla el tiempo en que se completa un ciclo, una exhalación, o una inhalación.

b) Realiza el gráfico de la función para dos ciclos completos y halla:

b.1) Los lapsos en que el caudal de aire es positivo y los lapsos en que es negativo.

b.2) Los instantes en que el caudal es nulo, máximo o mínimo.

FUNCIÓN COSECANTE

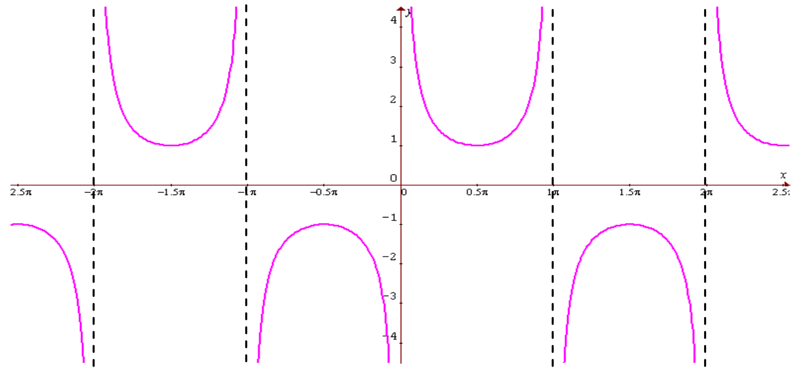
CONSTRUCCIÓN

Sea $f : \mathrm{R} - \{x / x = k\pi, k \in Z\} \to R \,/\, f(x) = \csc x = \dfrac{1}{senx}$

En este ejercicio partiremos de una tabla de valores de *y = csc x* para ángulos de la 1ª vuelta para obtener la gráfica de esta función en ese intervalo y luego se continúa para los otros intervalos como en las funciones anteriores. Por tratarse de una función recíproca para calcular sus valores primero se calcula el valor de la función seno y luego se calcula el valor recíproco.
En el eje de abscisas marcamos a izquierda y derecha del origen de coordenadas intervalos de amplitud $\dfrac{\pi}{6}$. Completa la tabla

x (rad)	y =csc x
0	
...	
...	
...	

...	
....	



Propiedades de la función cosecante en el intervalo $[0;2\pi]$

Observando el gráfico de la función cosecante podemos obtener las siguientes conclusiones:

a) dominio e imagen
D: $[0;2\pi]$
I: (-∞;-1] U [+1;+∞)

b) periodicidad
La gráfica obtenida en el intervalo $[0;2\pi]$ se repite periódicamente
$\forall x \in R: \operatorname{cs} c(x+2\pi) = \operatorname{cs} cx$ período $p = 2\pi$ al igual que la función seno.

c) no es inyectiva

d) ceros de la función: resolvemos la ecuación $\operatorname{cs} cx = 0$
$\frac{1}{senx} = 0 \Rightarrow \notin$ No existe ningún valor de x que cumpla con la ecuación, por lo tanto no hay raíces (la función no corta el eje x).

e) paridad y simetría:es impar.
Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi/2)=1 \\ f(-\pi/2)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\pi/2) = -f(-\pi/2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi/6)=2 \\ f(-\pi/6)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\pi/6) = -f(-\pi/6)$$

En general $\forall x \in IR: f(x) = -f(-x), es\ decir\ \forall x \in IR: \operatorname{cs} cx = -\operatorname{cs} cx$ (el gráfico es simétrico respecto del origen)

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
En algunos intervalos es estrictamente creciente y en otros es estrictamente decreciente.

En $\ldots\cup(0;\pi/2)\cup(3\pi/2;2\pi)\cup\ldots$, es estrictamente decreciente y en $\ldots\cup(\pi/2;\pi)\cup(\pi;3\pi/2)\cup\ldots$, es estrictamente creciente.

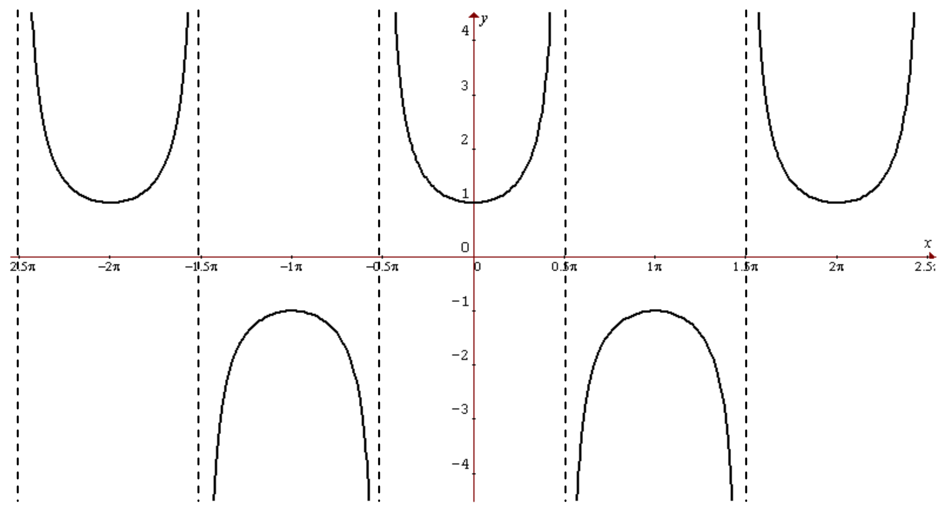
FUNCIÓN SECANTE

CONSTRUCCIÓN

Sea $f:\mathrm{D}\rightarrow IR\,/\,f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

En este ejercicio partiremos de una tabla de valores de *y = sec x* para ángulos de la 1ª vuelta para obtener la gráfica de esta función en ese intervalo y luego se continúa para los otros intervalos como en las funciones anteriores. Por tratarse de una función recíproca para calcular sus valores primero se calcula el valor de la función coseno y luego se calcula el valor recíproco.

En el eje de abscisas marcamos a izquierda y derecha del origen de coordenadas intervalos de amplitud $\dfrac{\pi}{6}$



Propiedades de la función secante en el intervalo $\left[0;2\pi\right]$

Observando el gráfico de la función secante podemos obtener las siguientes conclusiones:

a) dominio e imagen

D: $\left[0;2\pi\right]$ Excepto para $x=k\cdot\pi/2$ para $k\in Z$, es decir para todas las raíces de la función coseno.

I: (-∞;-1] U [+1;+∞)

b) periodicidad

la gráfica obtenida en el intervalo $\left[0;2\pi\right]$ se repite periódicamente

$\forall x\in IR:\sec\left(x+2\pi\right)=\sec x$ período $p=2\pi$

c) no es inyectiva

d) ceros de la función: resolvemos la ecuación $\sec x=0$

$\frac{1}{\cos nx} = 0 \Rightarrow \notin$ No existe ningún valor de x que cumpla con la ecuación, por lo tanto no hay raíces (la función no corta el eje x).

e) paridad y simetría:es par.
Por ejemplo:

$$f(\pi) = f(-\pi) = -1 \Rightarrow f(\pi) = f(-\pi)$$

$$f(\pi/3) = f(-\pi/3) = 2 \Rightarrow f(\pi/3) = -f(-\pi/3)$$

En general $f(x) = f(-x)$ (el gráfico es simétrico respecto del eje y)

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
En algunos intervalos es estrictamente creciente y en otros es estrictamente decreciente.

En $(0;\pi/2) \cup (\pi/2;\pi)$ es estrictamente creciente.

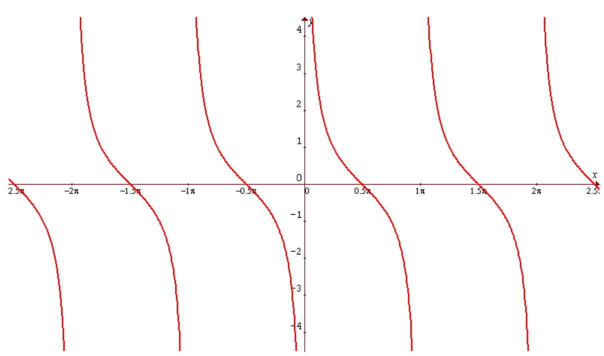
En $(\pi;3\pi/2) \cup (3\pi/2;2\pi)$ es estrictamente decreciente.

FUNCIÓN COTANGENTE

CONSTRUCCIÓN

Sea $f : \mathrm{D} \rightarrow IR \,/\, f(x) = \operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$

En este ejercicio partiremos de una tabla de valores de *y = cotan x* para ángulos de la 1ª vuelta y siguientes para obtener la gráfica de esta función en un intervalo mayor.
En el eje de abscisas marcamos a izquierda y derecha del origen de coordenadas intervalos de amplitud $\frac{\pi}{6}$



La gráfica muestra que los valores de la tangente vuelven a repetirse, de la misma manera que la función seno y coseno.

Propiedades de la función cotangente en el intervalo $[0;2\pi]$

Observando el gráfico de la función cotangente podemos obtener las siguientes conclusiones:

a. dominio e imagen

D: $[0;2\pi]$ excepto para todo $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ para todo $k \in Z$

I: (-∞;+∞)

b. periodicidad

La gráfica obtenida en el intervalo $[0;\pi]$ se repite periódicamente

$\forall x \in IR : \text{cotan}(x+\pi) = \text{cotan}\, x$ período $p = \pi$

c. no es inyectiva

d. ceros de la función: resolvemos la ecuación $\text{cotan}\, x = 0$

$$\text{cotan}\ \pi/2 = 0 \Rightarrow \text{cotan}\ (\pi/2+\pi) = \text{cotan}(\pi/2+2\pi) = \tan(\pi/2+k\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \tan(k\pi/2) = 0,\ \ con\ \ k \in IR$$

en definitiva

$x = k \cdot \pi/2 \quad (\text{k} \in IR)$ es cero de f

el conjunto de ceros de

$$f : S\{x / x = k \cdot \pi/2 \wedge k \in Z\}$$

e. paridad y simetría: es impar.

Por ejemplo:

$$f(\pi/2) = -f(-\pi/2) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

$$f(\pi/4) = -f(-\pi/4) = 1$$

En general $f(x) = -f(-x)$, el gráfico es simétrico respecto del origen de coordenadas.

f. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Es una función estrictamente decreciente en todo su intervalo y los intervalos de decrecimiento tendrán una amplitud igual al período: $\ldots \cup (-\pi;0) \cup (0;\pi) \cup (\pi;2\pi) \cup \ldots.$

19) Analiza la función f(x) = sen x:

a) El valor máximo que toma es … y el valor mínimo que toma es ….
b) El conjunto imagen es el intervalo ……..
c) La curva corta al eje y en P (0;…).
d) Los valores de la función se repiten periódicamente cada …., se cumple que *sen(x+2π) = sen x.*
e) El período de la función es p = …..

f) Es impar, es decir sen(x) =……………(los valores opuestos del dominio tienen imágenes opuestas)
g) ¿Se verifica que **/**sen x**/** ≤ 1? …….

20) Analiza la función f(x) = cos x:
a) El valor máximo que toma es ….. y el valor mínimo que toma es …..
b) El conjunto imagen es el intervalo …….
c) La curva corta al eje y en P (…;…)
d) Los valores de la función se repiten periódicamente cada …., se cumple que cos (x+2π) = cos x.
e) El período de la función es p = ….
f) Es par, es decir cos (x) = ………. (los valores opuestos del dominio tienen imágenes ……………)
g) ¿Se verifica que cos x = sen (π/2 – x). ………………………………………
h) ¿Se verifica que cos x = - sen (x – π/2). …………
i) ¿Se verifica que /cos x/ ≤ 1? ……………

21) Analiza la función f(x) = tan x:
a) ¿Toma algún valor máximo o mínimo? …..
b) El conjunto imagen es el intervalo (….;….)
c) La curva corta al eje y en P (….;….)
d) Los valores de la función se repiten periódicamente cada …., se cumple que ………………….
e) El período de la función es …………
f) Es impar, es decir ………………………., (los valores opuestos del dominio tienen imágenes …………………)
g) Cuando cos x se acerca a cero, el valor de la tangente tiende a …………
h) Tiene infinitas asíntotas verticales, cada vez que ………………….

22) Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) El dominio de f(x) = cotan x es el conjunto de los números reales.

b) La función f(x) = sec x cruza al eje de las x cuando x = 7π/2.

c) La función f(x) = cosec x no tiene ceros.

d) La función f(x) = sec x es la inversa multiplicativa de f(x) = cos x.

e) La función f(x) = sec x = 1/cos x.

f) La imagen de f(x) = cotan x es el conjunto de los números reales.

g) La imagen de f(x) = sec x es el conjunto de los números reales.

h) La función f(x) = sec x es creciente en el intervalo (-π/2; π/2).

i) La función f(x) = sec x es par.

j) No existe ningún valor de x para el cual cosec x = 0,5.

k) No existe ningún valor de x para el cual cotan x = 0,5.

l) La función $f(x) = \sec x$ es positiva en el intervalo $(-\pi/2; \pi/2)$.

m) La función $f(x) = \text{cotan } x$ es positiva en el intervalo $(-\pi; -\pi/2)$.

23) Establece si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:
a) $\text{arcsen } x = \text{sen}^{-1} x$
b) $\cos^{-1} x = 1/\cos x$
c) $\arctan x = \text{cotan } x$
d) Sea $f(x) = \text{sen } x$, cuyo dominio es el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y cuya imagen es el intervalo $[-1, 1]$, la correspondiente función inversa es $f^{-1}(x) = \text{arcsen } x$, cuyo dominio es el intervalo $[-1; 1]$ y cuya imagen es el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.
e) Sea $f(x) = \tan x$, cuyo dominio es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y cuya imagen es $I = \mathbb{R}$, la correspondiente función inversa es $f^{-1}(x)=\arctan x$, cuyo dominio es el intervalo $(-1,1)$ y cuya imagen es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.
f) Sea $f(x) = \cos x$, cuyo dominio es el intervalo $[0, \pi]$ y cuya imagen es el intervalo $[-1,1]$ la correspondiente función inversa es $f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$, cuyo dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y cuya imagen es el intervalo $[0, \pi]$.
g) Si $\tan(\boldsymbol{-\pi/4}) = -1$, $\text{arc tan}(-1) = -\pi/4$
h) $(\tan x \circ \tan^{-1} x) = x$
i) Si $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\arccos(\pi/4) = 2/\sqrt{2}$

24) Para la función $f(x) = a \text{ sen } x$, se verifica que (siendo $a > 0$):

a) El valor máximo que toma es …. y el valor mínimo que toma es ….
b) El conjunto imagen es el intervalo ………
c) La curva corta al eje y en P (….;….)
d) Los valores de la función se repiten periódicamente cada …., se cumple que ………. = ………
e) El período de la función es ……………
f) Es impar, es decir ………. = …….. (los valores opuestos de dominio tienen imágenes …………)
g) El factor a se denomina …………….. de la onda sinusoidal.

25) Para la función $f(x) = \text{sen}(bx)$ se verifica que (siendo $b > 0$):

a) El valor máximo que toma es …. y el valor mínimo que toma es ….
b) El conjunto imagen es el intervalo …………
c) La curva corta al eje y en P (….;….)
d) El período de la función es …………………..
e) El factor b se denomina …………… de la onda sinusoidal.

26) Utilizando los gráficos de las funciones seno y coseno, halla y señala sobre el eje horizontal los valores de x que pertenecen al intervalo $[0;2\pi]$, tales que:
a) $\text{sen } x \geq 0,5$
c) $0 < \text{sen } x < 0,5$
e) $-1 < \text{sen } x \leq 0$
b) $\cos x < 0$
d) $\cos x \geq \sqrt{2}/2$

27) Se ha utilizado la función seno para representar los datos de temperatura en una zona de Ushuaia. Los puntos de la gráfica representan la temperatura media del aire. La función seno usada para ajustar los datos es:

$$y = 12 + \cos(2\pi/360 \cdot (t - 120))$$

a) ¿Cuál es la temperatura promedio máxima para esa región y cuál es la mínima?
b) ¿Cada cuántos días, aproximadamente, se repite la misma temperatura promedio?